184198

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik.

In zwanglosen Heften.

GENERAL LIBRARY University of MICHIGAN

Herausgegeben

von

A. L. Crelle.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preufsischer Behörden.

KÖN. REGIERUNG ZU POTSDAM

Dritter Band,

In 4 Heften.

Mit 4 Kupfertafeln.

Berlin,

bei G. Reimer.

1828.

ESTABLISHED 1876

Inhaltsverzeichnifs
des dritten Bandes, nach den Gegenständen.

I. Reine Mathematik.

1. Analysis.

Nr. der Abhandlung		Heft	Seite
1.	Beweis eines algebraischen Lehrsatzes. Von Herrn Hofrath und Professor Dr. *Gaufs* zu Göttingen.	I.	1
3.	Recherches sur les diviseurs premiers d'une classe de formules du quatrième degré. Par M. *G. Lejeune-Dirichlet*, prof. d. math. à Breslau.	I.	35
4.	Ueber Reihen, durch welche höhere Potenzen des Bogens durch den Sinus ausgedrückt werden. Von Herrn. Dr. *E. J. Scholtz* in Breslau.	I.	70
5.	Note sur le mémoire de Mr. L. Olivier No. 4. du second tome de ce journal, ayant pour titre „remarques sur les séries infinies et leur convergence." Par Mr. *N. H. Abel.*	I.	79
	Remarque de Mr. *L. Olivier* sur le même objet.	I.	82
8.	Addition au Mémoire de M. Abel sur les fonctions elliptiques, inseré dans le vol. II. de ce journ., cah. 2. p. 101. Par Mr. *C. G. J. Jacobi* à Königsberg.	I.	86
9.	Die Function $\frac{1}{a+\frac{1}{a+\frac{1}{a+\ldots}}}$ durch die Anzahl der a ausgedrückt. (In Folge der Aufgabe 40. S. 193. im zweiten Bande dieses Journals.) Von Herrn *Th. Clausen* zu Altona.	I.	87
10.	Ueber die Fälle, wenn die Reihe von der Form $y = 1 + \frac{\alpha}{1}\cdot\frac{\beta}{\gamma}x + \frac{\alpha.\alpha+1}{1.2}\cdot\frac{\beta.\beta+1}{\gamma.\gamma+1}x^2 + \text{etc.}$ ein Quadrat von der Form $z = 1 + \frac{\alpha'}{1}\cdot\frac{\beta'}{\gamma'}\cdot\frac{\delta'}{\varepsilon'}x + \frac{\alpha'.\alpha'+1}{1.2}\cdot\frac{\beta'.\beta'+1}{\gamma'.\gamma'+1}\cdot\frac{\delta'.\delta'+1}{\varepsilon'.\varepsilon'+1}x^2 + \text{etc.}$ hat. Von Herrn *Th. Clausen* zu Altona.	I.	89
11.	Beitrag zur Theorie der Reihen. Von Herrn *Th. Clausen* zu Altona.	I.	92
13.	Ueber die Integration logarithmisch-rationaler Differentiale. Von Herrn Prof. Dr. *C. J. Hill* zu Lund.	II.	101
14.	Recherches sur les fonctions elliptiques. Par. Mr. *N. H. Abel.* (Suite du mémoire Nr. 12. Tom. II. cah. 2. de ce journal.)	II.	160
15.	Note sur la décomposition d'un nombre donné en quatre quarrés. Par Mr. *C. G. J. Jacobi*, prof. en phil. à Königsberg.	II.	191
16.	Note sur les fonctions elliptiques. Par Mr. *C. G. J. Jacobi*, prof. en phil. à Königsberg. (Extrait d'une lettre de l'auteur au rédacteur de ce journal sous le date de 2. Avril 1828.)	II.	192
26.	Beantwortung der Aufgabe S. 212. dieses Bandes: „Kann $\alpha^{\mu-1}-1$, wenn μ eine Primzahl und α eine ganze Zahl und kleiner als μ und gröfser als 1 ist, durch $\mu\mu$ theilbar sein?" Von Hrn. Prof. *C. G. J. Jacobi.*	III.	301
27.	Suite des notices sur les fonctions elliptiques (Voy. p. 192). Par Mr. *C. G. J. Jacobi*, prof. en phil. à Königsberg. (Extrait d'une lettre de l'auteur au redacteur de ce journal, du 21. Juillet 1828.	III.	303
28.	Demonstratio duarum celeb. Gaussii propositionum. (Disqu. arithm. p. 17.) Auct. Theod. *Clausen.*	III.	311
30.	Remarques sur quelques propriétés générales d'une certaine sorte de fonctions transcendantes. Par Mr. *N. H. Abel* de Christiania.	IV.	313
33.	Auflösungen der Aufgabe No. 19. S. 99. im 1. Hefte des II. Bandes d. Journ.	IV.	347
34.	Mémoire sur l'impossibilité de quelques équations indéterminées du cinquième degré. Par Mr. *Lejeune-Dirichlet*, prof. de mathématiques. .	IV.	354
36.	Démonstrations nouvelles de quelques théorèmes relatifs aux nombres. Par Mr. *Lejeune-Dirichlet*, prof. de mathém.	IV.	390
37.	Sur le nombre des transformations différentes, qu'on peut faire subir a une fonction elliptique par la substitution d'une fonction donnée e premier degré. Par Mr. *N. H. Abel.*	IV.	394

Abhandlung		Heft	Seite
38.	Théorème général sur la transformation des fonctions elliptiques de la seconde et de la troisième espèce. Par Mr. *N. H. Abel.*	IV.	402
39.	Suite des notices sur les fonctions elliptiques. Par M. *C. G. J. Jacobi.* prof. en phil. à Königberg.	IV.	403

2. Geometrie.

2.	Ueber die Gleichungen, mittelst welcher aus den Seiten eines in einen Kreis zu beschreibenden Vielecks der Halbmesser des Kreises und die Fläche des Vielecks gefunden werden. Von Herrn *A. F. Möbius*, Professor zu Leipzig.	I.	5
6.	Annäherungs-Construction des Kreis-Umfangs und Flächen-Inhalts. Vom Herrn Cand. phil. *Specht* zu Berlin.	I.	83
7.	Beweis zweier Lehrsätze im zweiten Bande dieses Journals, Hft. I. S. 97. No. 7. und Hft. III. S. 292. No. 64. Von Herrn *Remy*, Stud. phil. zu Berlin.	I.	84
17.	Geometrische Sätze. Von Herrn *Th. Clausen* zu Altona.	II.	196
18.	Bemerkung über ein Polyëder. Von einem Ungenannten.	II.	199
19.	Bemerkungen zu der zweiten Aufgabe in der Abhandlung No. 17. in diesem Hefte. Von Herrn *J. Steiner* zu Berlin.	II.	201
20.	Anmerkungen zu dem Aufsatze No. 18. Von Hrn. *J. Steiner* zu Berlin.	II.	205
22.	Mémoire sur les centres de moyennes harmoniques; pour faire suite au traité des propriétés projectives des figures, et servir d'introduction à la Théorie générale des propriétés projectives des courbes et surfaces géométriques. (Présenté à l'Académie royale des Sciences de l'institut de France le 8. Mars 1824, et approuvé le 22. Janvier 1826, par une commission composée de M. M. Legendre, Ampère et Cauchy rapporteur.) Par Mr. *J. V. Poncelet*, Capitaine au corps Royal du Génie.	III.	213
23.	Kann von zwei dreiseitigen Pyramiden eine jede in Bezug auf die andere um- u. eingeschrieben zugleich heifsen? Vom Hrn. Prof. *Möbius* zu Leipz.	III.	273
24.	Beweise des Lehrsatzes No. 16. im 2. Heft des 3. Bandes dieses Journals.	III.	279
25.	Auflösung der Aufgaben und Beweis der Lehrsätze 5. 6. 7. 8. 9. im 1sten Hefte S. 96, und 29. 30. 31. 32. 33. im 2ten Hefte S. 191 des 2ten Bandes dieses Journals. Von Herrn Stud. math. *Heinen* zu Bonn.	III.	285
31.	Ueber die Krümmung einer beliebigen Fläche in einem gegebenen Puncte. Von Herrn Dr. *Plücker* zu Bonn.	IV.	324
35.	Ueber die Anwendung der elliptischen Transcendenten auf ein bekanntes Problem der Elementargeometrie: „Die Relation zwischen der Distanz der Mittelpuncte und den Radien zweier Kreise zu finden, von denen der eine einem unregelmäfsigen Polygon eingeschrieben, der andere demselben umgeschrieben ist." Von Hrn. Prof. Dr. *C. G. J. Jacobi* zu Königsberg in Pr.	IV.	376
40.	Zweite Annäherungs-Construction des Kreis-Umfanges. Von Hrn. *C. G. Specht* zu Berlin.	IV.	405

II. Angewandte Mathematik.

32.	Analytische Auflösung dreier Aufgaben der Calendarographie. Von Hrn. *W. Matzka*, Ober-Feuerwerker im K. K. Bombardier-Corps zu Wien.	IV.	337

Aufgaben und Lehrsätze.

12.	Lehrsätze über den Zusammenhang von Combinationen mit Variationen und jener unter einander, von Herrn Prof. *Scherk* zu Halle. . .	I.	96
	Aufgaben von Anderen.	I.	97
21.	Aufgaben und Lehrsätze. Von Herrn *J. Steiner* zu Berlin. . . .	II.	207
	Aufgabe von Herrn *N. H. Abel* zu Christiania in Norwegen. . . .	II.	212
29.	Lehrsatz. Von Herrn Dr. *Hellerung* zu Wismar.	III.	312
41.	Aufgaben. Question d'analyse indéterminée. Par Mr. *Lejeune-Dirichlet*, prof. en mathématiques.	IV.	407
	Von Anderen.	IV.	408
42.	Einige Nachrichten von Büchern.	IV.	410

1.

Beweis eines algebraischen Lehrsatzes.

(Von Hrn. Hofrath u. Professor, Dr. *Gaufs* zu Göttingen.)

Der Gegenstand dieses Aufsatzes ist der Cartesische, gewöhnlich nach Harriot benannte, Lehrsatz über den Zusammenhang der Anzahl der positiven und negativen Wurzeln einer algebraischen Gleichung mit der Anzahl der Abwechslungen und Folgen in den Zeichen der Coëfficienten. Man vermifst an den von verschiedenen Schriftstellern versuchten Beweisen dieses Theorems die Klarheit, Kürze und umfassende Allgemeinheit, die man bei einem so elementarischen Gegenstande mit Recht verlangen kann, und eine neue Behandlung desselben scheint daher nicht überflüssig zu sein.

Es sei X eine algebraische ganze Function von x von der Ordnung m, nach absteigenden Potenzen von x geordnet. Wir nehmen an (ohne Nachtheil für die Allgemeinheit), dafs das höchste Glied x^m sei, und das niedrigste von x freie Glied nicht fehle; blofs die wirklich vorhandenen Glieder sollen aufgestellt, also nicht die etwa fehlenden mit dem Coëfficienten 0 angesetzt sein.

Wenn nicht alle Coëfficienten positiv sind, so werden sie einen oder mehrere Zeichenwechsel darbieten. Es sei $-Nx^n$ das erste negative Glied, das erste hierauf folgende positive $+Px^p$, das erste hierauf folgende negative $-Qx^q$ u. s. w. Es sind mithin m, n, p, q u. s. w. abnehmende ganze Zahlen; N, P, Q u. s. w. positiv, und X erscheint so dargestellt:

$$X = x^m + + \ldots . - Nx^n - - \ldots . + Px^p + + \ldots . - Qx^q - \text{ u. s. w.}$$

Es werde X mit dem einfachen Factor $x - \alpha$ multiplicirt, wo α positiv vorausgesetzt wird. Man sieht leicht, dafs in dem Producte, x^{n+1}

einen negativen, x^{p+1} einen positiven, x^{q+1} einen negativen Coëfficienten u. s. w., also das Product diese Form erhalten wird:

$$\int X(x-\alpha) = x^{m+1} \ldots . - N' x^{n+1} \ldots . + P' x^{p+1} \ldots . - Q' x^{q+1} \ldots .$$

so dafs N', P', Q' u. s. w. positiv werden. Die Zeichen zwischen den aufgestellten Gliedern bleiben zwar unentschieden: allein es ist klar, dafs vom höchsten Gliede bis zur Potenz x^{n+1} wenigstens ein Zeichenwechsel, bis x^{p+1} wenigstens zwei, bis x^{q+1} wenigstens drei u. s. w. statt finden. Ist der letzte Zeichenwechsel in X bei dem Gliede $\pm U x^u$, und bezeichnet man den Coëfficienten von x^{n+1} in $X(x-\alpha)$ durch $\pm U'$, so wird U' positiv sein, und bis zum Gliede $\pm U' x^{u+1}$ haben dann wenigstens eben so viele Zeichenwechsel, wie in X sind, statt gefunden. Das letzte Glied in $X(x-\alpha)$ wird aber das Zeichen $\mp$ haben; es mufs also bis dahin wenigstens noch ein Zeichenwechsel hinzugekommen sein. Wir schliefsen also, dafs $X(x-\alpha)$ wenigstens einen Zeichenwechsel mehr hat als X.

Es sei nun X das Product aller einfachen Factoren, die den negativen und imaginären Wurzeln einer Gleichung $y=0$ entsprechen, also, wenn α, β, γ u. s. w. die positiven Wurzeln derselben Gleichung sind,

$$y = X(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) \ldots .$$

Es finden sich also nach vorstehendem Satze, in $X(x-\alpha)$ wenigstens ein Zeichenwechsel, in $X(x-\alpha)(x-\beta)$ wenigstens zwei, in $X(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ wenigstens drei u. s. w. mehr als in X; folglich werden, auch wenn in X gar kein Zeichenwechsel vorkommt, in y wenigstens so viele Zeichenwechsel sein, wie positive Wurzeln. Man sieht von selbst, dafs wenn die Gleichung weder negative, noch imaginäre Wurzeln hat, man $X=1$ zu setzen hat, und dieser Schlufs seine Gültigkeit behält.

Es gehe y, wenn den Coëfficienten der Potenzen x^{m-1}, x^{m-3}, x^{m-5} u. s. w. die entgegengesetzten Zeichen beigelegt werden, in y' über; sämmtliche Wurzeln der Gleichung $y'=0$ werden dann den Wurzeln der Gleichung $y=0$ entgegengesetzt sein. Es wird daher in y' wenigstens eben so viele Zeichenwechsel geben, als die Gleichung $y=0$ negative Wurzeln hat.

Wir haben daher folgenden Lehrsatz:

Die Gleichung $y=0$ kann nicht mehr positive Wurzeln haben, als es Zeichenwechsel in y giebt, und nicht mehr negative Wurzeln, als Zeichenwechsel in y' sind.

Diese Einkleidung des Theorems scheint die zweckmäfsigste zu sein, da sie die gröfste Einfachheit mit der umfassendsten Allgemeinheit vereinigt, und alle Gestalten des Satzes, die nur unter besondern Bedingungen gelten, von selbst daraus fliefsen.

Will man die Grenze der Anzahl der negativen Wurzeln unmittelbar an den Zeichen der Coëfficienten von y erkennen, so wird es nothwendig, die unmittelbaren Zeichenwechsel und Zeichenfolgen (bei Gliedern, wo die Exponenten von x um eine Einheit verschieden sind), von den durch fehlende Glieder unterbrochenen zu unterscheiden. Offenbar wird jeder unmittelbare und jeder durch eine gerade Anzahl fehlender Glieder unterbrochene Zeichenwechsel in y' zu einer ähnlichen Zeichenfolge in y, während ein durch eine ungerade Anzahl fehlender Glieder unterbrochener Zeichenwechsel in y' auch in y ein ähnlicher Zeichenwechsel bleibt. Der zweite Theil des Theorems läfst sich daher auch so ausdrücken:

Die Anzahl der negativen Wurzeln der Gleichung $y=0$ kann nicht gröfser sein, als die Anzahl der unmittelbaren und der durch eine gerade Anzahl fehlender Glieder unterbrochenen Zeichenfolgen, addirt zu der Anzahl der durch eine ungerade Anzahl fehlender Glieder unterbrochenen Zeichenwechsel in y.

Fehlt in y gar kein Glied, so ist die Anzahl der negativen Wurzeln nicht gröfser, als die Anzahl der Zeichenfolgen.

Bezeichnet man durch A die Anzahl der unmittelbaren Zeichenwechsel, und durch B die Anzahl der unmittelbaren Zeichenfolgen in y, so wird, wenn kein Glied fehlt, $A+B=m$ sein, also der Anzahl aller Wurzeln gleich. Insofern diese Zeichen also blofs lehren, dafs die Anzahl der positiven Wurzeln nicht gröfser als A, und die der negativen nicht gröfser als B sein kann, bleibt es unentschieden, ob oder wie viele imaginäre Wurzeln vorhanden sind. Weifs man aber anders woher, dafs die Gleichung keine imaginäre Wurzeln hat, so mufs nothwendig A der Anzahl der positiven, und B der Anzahl der negativen Wurzeln gleich sein.

Anders aber verhält es sich, wenn in y Glieder fehlen. Um mit Klarheit zu übersehen, was sich daraus in Beziehung auf die imaginären Wurzeln schliefsen läfst, bezeichnen wir durch a die Anzahl der durch eine gerade, durch c die Anzahl der durch eine ungerade Anzahl fehlender Glieder unterbrochenen Zeichenwechsel; durch b und d resp. die Anzahl der durch eine gerade und ungerade Anzahl fehlender Glieder unterbrochenen Zeichenfolgen in y. Man sieht leicht, dafs $m - A - B - a - b - c - d$ der Anzahl sämmtlicher fehlender Glieder, die wir durch e bezeichnen wollen, gleich sein werde. Nun ist nach unserm Lehrsatze die Anzahl der positiven Wurzeln höchstens $A + a + c$, die Anzahl der negativen höchstens $B + b + c$, also die Anzahl aller reellen Wurzeln höchstens

$$A + B + a + b + 2c = m + c - d - e.$$

Es mufs daher die Anzahl der imaginären Wurzeln wenigstens $e - c + d$ sein.

Zählt man also alle fehlenden Glieder zusammen, jedoch so, dafs man in jeder Lücke zwischen einem Zeichenwechsel eine Einheit weniger, zwischen einer Zeichenfolge aber eine Einheit mehr rechnet, als Glieder fehlen, so oft deren Anzahl ungerade ist, so erhält man eine Zahl, der die Anzahl der imaginären Wurzeln wenigstens gleich kommen mufs.

2.

Ueber die Gleichungen, mittelst welcher aus den Seiten eines in einen Kreis zu beschreibenden Vielecks der Halbmesser des Kreises und die Fläche des Vielecks gefunden werden *).

(Von Herrn *A. F. Möbius*, Professor zu Leipzig.)

Die Gleichungen, mit Hülfe deren man aus den Seiten eines in einen Kreis beschriebenen Dreiecks oder Vierecks den Halbmesser des Kreises und die Fläche des Drei- oder Vierecks findet, sind allgemein bekannt. Von der Entwicklung derselben Gleichungen für Vielecke mit mehreren Seiten, mag bis jetzt theils ihr seltenes Bedürfnifs, theils aber und vorzüglich der Umstand abgehalten haben, dafs diese Gleichungen bei wachsender Seitenzahl in hohem Grade immer zusammengesetzter werden. Denn die Analysis ist hier, auf ähnliche Art, wie bei der Dreitheilung des Winkels und in vielen anderen Fällen, genöthigt, auch diejenigen Vielecke mit anzugeben, bei welchen der Perimeter, bevor er in sich zurückkehrt, sich selbst ein oder mehrere Male schneidet, und welche man, da sie im Practischen keinen besonderen Nutzen haben, nur als Abarten von Vielecken zu betrachten pflegt. Die Mannigfaltigkeit solcher Vielecke wird aber bei zunehmender Seitenzahl immer gröfser, und eben so mufs auch die Anzahl der Kreise zunehmen, in denen sich die nemlichen Seiten zu Vielecken zusammensetzen lassen. Uebrigens leuchtet ein, dafs blofs die verschiedene Aufeinanderfolge der Seiten zur Vermehrung der Kreise nichts beitragen kann.

Der Zweck des vorliegenden Aufsatzes ist eine nähere Untersuchung der Beschaffenheit der gedachten Gleichungen. Ich habe darin, wenn auch nicht sie selbst entwickelt, doch einen einfachen Weg zu ihrer Entwicklung nachgewiesen, und hoffe, dafs dieser Weg, so wie die Bestimmung des Grades der Gleichungen, die Betrachtung der Natur jener

*) Diese Abhandlung ist, wie der Herr Verfasser dem Herausgeber meldet, durch die Aufgabe No. 21. Heft 1. Band 2. dieses Journals veranlafst worden.

sternartigen Vielecke, und noch einiges Andere für den Geometer nicht ganz ohne Interesse und für die Wissenschaft von einigem Nutzen sein werde.

Sei A ein Punct in der Peripherie eines Kreises, B ein zweiter Punct in derselben, den man sich anfangs mit A zusammenfallend denke. B trenne sich hierauf von A, und bewege sich immerfort nach derselben Richtung, etwa von der Linken nach der Rechten, wenn man sich selbst innerhalb des Kreises befindet.

Während auf diese Weise der Bogen AB ohne Ende wächst, und der Punct B jedesmal, wenn der Bogen einem Vielfachen der Peripherie gleich geworden ist, mit dem Puncte A von Neuem zusammenfällt, wird die Sehne AB, deren anfänglicher Werth $=0$ ist, so lange zunehmen, bis der Bogen $AB=180^\circ$ geworden, wo sie die Gröfse des Durchmessers erreicht hat. Sie wird hierauf eben so abnehmen, verschwinden, wenn der Bogen bis zu 360° angewachsen ist, und alsdann durch 0 in das Entgegengesetzte übergehen, so dafs, wenn man die Sehne anfänglich positiv annimmt, sie nunmehr negativ wird, und während der Punct B den zweiten Umkreis beschreibt, die Sehne, eben so, wie beim ersten, nur negativ, zu und abnimmt. Kommt hierauf B von Neuem nach A, wird also der Bogen $=2.360^\circ$, so geht die Sehne aus dem Negativen in das Positive zurück, und so wieder umgekehrt, aus dem Positiven in das Negative, wenn der Bogen 3.360° geworden. u. s. f.

Bezeichnet daher n irgend eine positive ganze Zahl, und φ einen Bogen $<360^\circ$, so ist die Sehne des Bogens $n.360^\circ+\varphi$ positiv oder negativ, je nachdem n gerade oder ungerade ist. Der absolute Werth der Sehne aber ist der Sehne von φ selbst gleich. Auch wird man sich leicht durch ähnliche Betrachtungen überzeugen, dafs dieser Satz seine Gültigkeit behält, auch wenn n negativ genommen wird.

Seien nun $A, B, C \ldots M$ die Spitzen eines in einen Kreis beschriebenen Vielecks, in der Ordnung, in welcher sie im Perimeter auf einander folgen, und daher $AB, BC \ldots MA$ die auf einander folgenden Seiten des Vielecks, deren Anzahl $=m$. Dafs die Puncte $A, B, C \ldots$ auch in der Peripherie des Kreises nach dieser Ordnung fortgehen, ist deshalb keinesweges nothwendig. Vielmehr ist dieser Fall nur als ein specieller und zugleich als der einfachste zu betrachten, indem alsdann keine Seite von der anderen innerhalb ihrer Endpuncte geschnitten wird.

Man lasse nun von A einen Punct im Kreise nach der einen oder anderen Richtung, die man für die positive nehme, im Kreise fortgehen, bis er nach B, und zwar zum erstenmale kommt, d. h. nicht noch einen ganzen Umkreis weiter, wo er wieder in B eintreffen würde; hierauf von B weiter, bis er zum erstenmale nach C kommt, u. s. w., endlich von der letzten Spitze M bis zum erstenmale wieder zu der ersten A. Die Summe der so zurückgelegten Bogen wird offenbar entweder 360° selbst oder ein gewisses Vielfache davon, z. B. $n.360^\circ$ sein.

Die diesen Bogen zugehörigen Sehnen aber, oder die Vielecks-Seiten, sind nach dem vorhin Gesagten insgesammt als positiv zu betrachten, so wie man auch, ohne die positive Beschaffenheit aufzuheben, zu jedem einzelnen Bogen irgend ein gerades Vielfache von 360° hinzufügen oder davon wegnehmen, und daher die Summe aller $= n.360^\circ \pm 2p.360^\circ$ setzen kann.

Man nehme jetzt bei demselben Vieleck die der vorigen entgegengesetzte Richtung im Kreise für die positive, und bestimme danach, wie vorhin, die Bogen AB, $BC \ldots . MA$. Jeder derselben wird offenbar die Ergänzung des vorigen zu 360°, d. h. $= (m-n)\,360^\circ$ sein, zu welcher Summe man aus gleichem Grunde wie vorhin, das Glied $\pm 2p.360^\circ$ setzen kann.

Allgemein wird man daher bei einem m Eck die Summe der Bogen AB, $BC \ldots . MA$, wenn die ihnen zugehörigen Sehnen oder Vielecks-Seiten ins gesammt positiv sein sollen, zu setzen haben

$$= (n \pm 2p)360 \text{ oder } = (m - n \pm 2p)360^\circ,$$

wo m die Seitenzahl des Vielecks, n eine von der Aufeinanderfolge der Spitzen im Kreise nach einer festgesetzten Richtung abhängige, p aber eine beliebige ganze Zahl ist.

Hier zeigt sich sogleich ein merkwürdiger Unterschied zwischen den Vielecken mit gerader und denen mit ungerader Seitenzahl, oder, wie wir uns der Kürze wegen in der Folge ausdrücken wollen, zwischen geraden und ungeraden Vielecken. Findet sich z. B. bei einem vorgegebenen ungeraden Vieleck n gerade (ungerade), so stellt $n \pm 2p$ jede andere gerade (ungerade) und $m - n \pm 2p$ jede ungerade (gerade) Zahl vor.

Bei einem ungeraden Vieleck kann daher die Bogensumme einem geraden sowohl, als ungeraden Vielfachen von 360° gleich gesetzt werden.

Bei einem geraden Vieleck hingegen ist, wenn n gerade (ungerade) sich ergiebt, $n \pm 2p$ sowohl als $m - n \pm 2p$ der Ausdruck jeder anderen geraden (ungeraden) Zahl.

Alle geraden Vielecke zerfallen daher in zwei verschiedene Klassen. Bei den Vielecken der einen Klasse ist die Bogensumme einem ungeraden Vielfachen von 360° gleich; und diese Klasse heifse die erste, weil darin auch die einfachsten Vielecke, wo keine Seite der anderen innerhalb ihrer Endpuncte begegnet, begriffen sind. Bei den ungeraden Vielecken der zweiten Klasse kann die Bogensumme blofs geraden Vielfachen von 360° gleich gesetzt werden.

So ist z. B. bei dem Viereck $ABCD$, wenn B und D auf entgegengesetzten Seiten der Diagonale AC liegen, die Bogensumme $AB + BC + CD + DA = 360°$, oder $3.360°$ etc.; liegen aber B und D auf einerlei Seite von AC, so ist dieselbe Bogensumme $= 2.360°$, $4.360°$ etc., nach welcher Richtung man auch bei diesem, so wie beim vorigen Viereck im Kreise fortgehen mag. Mithin gehört jenes Viereck zur ersten, und dieses zur zweiten Klasse. Dagegen ist bei einem und demselben Dreieck ABC, die Bogensumme $AB + BC + CA$, nach der einen Richtung gezählt, $= 360°$, oder $3.360°$ etc., nach der entgegengesetzten Richtung, $= 2.360°$ oder $4.360°$ etc.

Man kann auch immer schon aus der niedergeschriebenen Reihe der Buchstaben, nach welcher die damit bezeichneten Spitzen eines gegeraden Vielecks in der Peripherie auf einander folgen, beurtheilen, ob das Vieleck zur ersten oder zweiten Klasse gehört. Vergleicht man nemlich mit dieser Reihe die Ausdrücke für die einzelnen Seiten AB, BC, $CD \ldots . MA$, und finden sich in der Reihe bei einer ungeraden (geraden) Zahl der Seiten die zwei, jede Seite bezeichnenden Buchstaben, in derselben Folge, als wie in jenen Ausdrücken, also auch bei einer ungeraden (geraden) Anzahl in umgekehrter Folge, so gehört das Vieleck der ersten (zweiten) Klasse an.

So ist z. E. bei dem Sechseck (Fig. 1.) die Reihe der Spitzen in der Peripherie: $ABCDEF$, und darin nur der Seitenausdruck FA in umgekehrter Folge (AF) anzutreffen. Mithin ist es ein Sechseck der ersten Klasse.

Bei dem Sechseck (Fig. 2.) ist die Reihe der Spitzen $ABEDCF$, worin AB, BC, EF in directer, und CD, DE, FA in umgekehrter Folge

sich

sich finden, und das Sechseck gehört daher ebenfalls zur ersten Klasse, so wie auch (Fig. 3.) mit der Reihe *ABDFEC*.

Dagegen sind (Fig. 4. u. 5.) zur zweiten Klasse zu rechnen, indem in der Reihe des erstern Sechsecks *ABCFDE* die zwei Ausdrücke *EF* und *FA*, in der Reihe des letzteren *ABEFCD* die zwei Ausdrücke *DE* und *FA*, umgekehrt anzutreffen sind.

Die oben entwickelten Sätze lassen sich sehr einfach durch trigonometrische Functionen darstellen. Setzen wir nemlich die Bogen *AB*, *BC* .... *MA* resp.

$$= 2\alpha,\ 2\beta \ldots . 2\mu,$$

so ist bei ungeraden Vielecken

$$2\alpha + 2\beta + \ldots . + 2\mu = p \,.\, 360^\circ,$$

also

$$\alpha + \beta + \ldots . + \mu = p \,.\, 180^\circ,$$

oder, was dasselbe ausdrückt:

$$\text{I.}\quad \sin(\alpha + \beta + \ldots . + \mu) = 0.$$

Ferner ist bei den geraden Vielecken der ersten Klasse

$$2\alpha + 2\beta + \ldots . + 2\mu = (2p+1)\,360^\circ,$$

folglich

$$\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta + \ldots .) = (2p+1)\,90^\circ,$$

oder

$$\text{II.}\quad \cos\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta + \ldots . + \mu) = 0,$$

und bei geraden Vielecken der zweiten Klasse

$$2\alpha + 2\beta + \ldots . = 2p \,.\, 360^\circ,$$

$$\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta + \ldots .) = p \,.\, 180,$$

oder

$$\text{II}^*.\quad \sin\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta + \ldots . + \mu) = 0.$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen I. II. II*., können wir nun ohne Weiteres an die Lösung der Haupt-Aufgabe gehen: Aus den gegebenen Seiten eines in einen Kreis zu beschreibenden Vielecks den Halbmesser des Kreises zu finden.

Bezeichnen wir die Seiten des Vielecks, *AB*, *BC* .... *MA* mit $2a$, $2b$, ... $2m$, und den Halbmesser mit r, so ist einleuchtend, dafs

$$\sin\alpha = \frac{a}{r},\ \sin\beta = \frac{b}{r},\ \ldots . \sin\mu = \frac{m}{r},$$

und die gesuchte Gleichung zwischen den Seiten und dem Halbmesser wird gefunden sein, wenn man mittelst der letzteren Gleichungen aus I. oder II. die Hülfswinkel α, β .... μ eliminirt hat.

Zu diesem Zwecke wird man die Sinus und Cosinus der Bogensummen in I. und II. als Functionen der Sinus der einzelnen Bogen α, β, ... darzustellen haben, und zwar als rationale Functionen dieser Sinus, wenn die Gleichung zwischen r, a, b, c ...., wie wohl immer gefordert wird, rational sein soll.

Um den hierbei zu nehmenden Gang mit möglichster Deutlichkeit vorzulegen, machen wir mit dem Dreieck den Anfang. Für dieses ist die Gleichung

$$a) \quad \sin(\alpha+\beta+\gamma) = 0.$$

Damit sie zuerst nach $\sin\alpha$ rational werde, erwäge man, dafs das Wesentliche der Function $\sin\alpha$, und jeder rationalen Function von $\sin\alpha$ überhaupt darin bestehet, dafs eine solche Function sich nicht ändert, wenn man statt α, $\alpha+2p.180$, oder $-\alpha+(2p+1)180$ substituirt. Nun bleibt $\sin(\alpha+\beta+\gamma)$ durch erstere Substitution ungeändert, verwandelt sich aber durch letztere Substitution in $\sin(\alpha-\beta-\gamma)$. Mithin wird die nach $\sin\alpha$ rationalisirte Gleichung (a) sein:

$$b) \quad \sin(\alpha+\beta+\gamma)\sin(-\alpha+\beta+\gamma) = 0,$$

als welche bei der einen sowohl, als bei der anderen Substitution für α unverändert bleibt.

Um jetzt diese Gleichung (b) nach $\sin\beta$ rational zu machen, so kommt, wenn man auf der rechten Seite von (b) für β, $-\beta+(2p+1)180^\circ$ setzt:

$$\sin(-\alpha+\beta-\gamma)\sin(\alpha+\beta-\gamma);$$

mithin ergiebt sich die nach $\sin\beta$ rationalisirte Gleichung, wenn man das zuletzt Erhaltene in (b) multiplicirt:

III. $\sin(\alpha+\beta+\gamma)\sin(-\alpha+\beta+\gamma)\sin(\alpha-\beta+\gamma)\sin(\alpha+\beta-\gamma) = 0.$

Zugleich aber erkennt man, dafs diese Gleichung III. nach $\sin\gamma$ schon rational ist, und es daher wegen $\sin\gamma$ keiner neuen Multiplication bedarf. Es bleibt daher nur die wirkliche Entwickelung der Gleichung III. vorzunehmen übrig. Diese giebt, wie man bald findet:

$$\sin\alpha^4+\sin\beta^4+\sin\gamma^4-2(\sin\beta^2\sin\gamma^2+\sin\gamma^2\sin\alpha^2+\sin\alpha^2\sin\beta^2) + 4\sin\alpha^2\sin\beta^2\sin\gamma^2 = 0,$$

und wenn man $\sin\alpha = \frac{a}{r}$ etc. setzt:

$$[a^4+b^4+c^4-2(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)]r^2+4a^2b^2c^2 = 0,$$

oder

$$(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)r^2-4a^2b^2c^2 = 0,$$

die bekannte Gleichung zwischen den halben Seiten eines Dreiecks und dem Halbmesser des umschriebenen Kreises.

Auf ähnliche Weise wollen wir die Gleichung für das nächst folgende ungerade Vieleck, das Fünfeck, abzuleiten suchen.

Die ursprüngliche Gleichung für dasselbe ist:

$$a)\quad \sin(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)=0.$$

Verwandelt man darin α in $-\alpha$, und multiplicirt das Ergebnifs in (a), so kommt die nach $\sin\alpha$ rationalisirte Gleichung:

$$b)\quad \sin(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)\sin(-\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)=0.$$

Um (b) nach $\sin\beta$ rational zu machen, verändere man in (b) das Zeichen von β in das entgegengesetzte, und man erhält, wenn man das so veränderte (b) in das vorige multiplicirt:

$$\begin{aligned} c)\quad &\sin(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)\sin(-\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)\\ &\times\sin(\alpha-\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)\sin(-\alpha-\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)=0, \end{aligned}$$

eine Gleichung, welche nach $\sin\alpha$ und $\sin\beta$ zugleich rational ist.

Hierin wird noch

$$\begin{aligned} &\sin(\alpha+\beta-\gamma+\delta+\varepsilon)\sin(-\alpha+\beta-\gamma+\delta+\varepsilon)\\ &\times\sin(\alpha-\beta-\gamma+\delta+\varepsilon)\sin(-\alpha-\beta-\gamma+\delta+\varepsilon) \end{aligned}$$

multiplicirt merden müssen, um eine auch nach $\sin\gamma$ rationale Gleichung zu erhalten, und dieses neue Product noch mit

$$\begin{aligned} &\sin(\alpha+\beta+\gamma-\delta+\varepsilon)\sin(-\alpha+\beta+\gamma-\delta+\varepsilon)\\ &\times\sin(\alpha-\beta+\gamma-\delta+\varepsilon)\sin(-\alpha-\beta+\gamma-\delta+\varepsilon)\\ &\times\sin(\alpha+\beta-\gamma-\delta+\varepsilon)\sin(-\alpha+\beta-\gamma-\delta+\varepsilon)\\ &\times\sin(\alpha-\beta-\gamma-\delta+\varepsilon)\sin(-\alpha-\beta-\gamma-\delta+\varepsilon), \end{aligned}$$

damit die Gleichung auch nach $\sin\delta$ rational werde.

Dieses ganze, aus 16 Factoren bestehende Product läfst sich zur Uebersicht am bequemsten auf folgende Weise darstellen. Man bezeichne das Product aus den 5 Factoren, welche man erhält, wenn man in a, von den 5 Bogen, nur einen auf einmal negativ setzt, durch $\Sigma\sin(-\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)$, und eben so das Product aus den 16 Factoren, welche entstehen, wenn man in a, zwei Bogen immer zugleich negativ nimmt, durch $\Sigma\sin(-\alpha-\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)$. Alsdann ist das Product aus allen 16 Factoren:

$$V.\quad \sin(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)\,\Sigma\sin(-\alpha+\beta+\ldots..)\,\Sigma\sin(-\alpha-\beta+\gamma+\ldots..),$$

und dieses, gleich Null gesetzt, wird zur unmittelbaren Entwickelung der rationalen Gleichung für das Fünfeck dienen. Denn dafs auch $\sin\varepsilon$

rational darin vorkomme, folgt sogleich daraus, dafs die nach $\sin\alpha$, ... $\sin\delta$ rational gemachte Gleichung nach α, β, γ, δ, ε zugleich symmetrisch ist.

Es ist nun nicht schwer auf diesem Wege weiter fortzugehen, und die Gleichungen für ungerade Vielecke von noch mehreren Seiten zu entwickeln. So wird mit Anwendung der vorigen Bezeichnungsart für das Siebeneck die Gleichung sein:

$$\text{VII.}\quad \sin(\alpha+\beta+\ldots.+\eta)\Sigma\sin(-\alpha+\beta+\ldots.)\Sigma\sin(-\alpha-\beta+\gamma\ldots.) \times\Sigma\sin(-\alpha-\beta-\gamma+\delta+\ldots.) = 0,$$

wo von den drei durch Σ angedeuteten Producten das erste aus 7, das zweite aus 21, das dritte aus 35 Factoren bestehet. Dafs aber alle diese Factoren, und aufser diesen keine anderen nöthig sind, um $\sin(\alpha+\beta+\ldots.+\eta)$ nach $\sin\alpha$, $\sin\beta$, ... $\sin\eta$ rational zu machen, läfst sich folgendergestalt übersehen.

Zuerst ist klar, dafs, weil $\sin(\alpha+\beta+\ldots.+\eta)$ eine symmetrische Function von α, β, ... η ist, auch P nach diesen Gröfsen symmetrisch sein mufs, wenn wir, der Kürze willen, durch $P=0$ die rationalisirte Gleichung vorstellen.

2) Aus der bei dem Drei- und Fünfeck angewandten Methode erhellet, dafs P ein Product von m Factoren von der Form $\sin(\pm\alpha\pm\beta\pm\ldots..\pm\eta)$ sein mufs.

3) Jeder dieser Factoren an sich ist irrational, giebt aber in Verbindung mit den jedesmal $m-1$ übrigen das rationale P.

4) Es ist gewifs, dafs $\sin(-\alpha+\beta+\ldots.+\eta)$ einer der m Factoren ist. Mithin kann man P auch, als durch Rationalisirung dieses Factors hervorgehend betrachten. Ursprünglich aber entstehet P durch Rationalisirung von $\sin(\alpha+\beta+\ldots.+\eta)$. P wird sich folglich nicht ändern, wenn man darin $-\alpha$ für α, und der symmetrischen Form wegen, überhaupt irgend ein Element in jedem der m Factoren mit dem entgegengesetzten Zeichen nimmt; d. h. es müssen durch diese Aenderung des Zeichens dieselben Factoren, nur in anderer Ordnung, zum Vorschein kommen.

5) Hieraus folgt nun leicht, dafs in den Sinussen $\sin(\pm\alpha\pm\beta\pm\ldots.)$, woraus P zusammengesetzt, alle möglichen und absolut verschiedenen Combinationen der Bogen α, β, ... durch + und — vorkommen müs-

sen, so wie auch, dafs jeder Sinus auf gleiche Art da sein mufs, d. h. jeder entweder in der ersten oder in der zweiten oder dritten etc. Potenz.

6) Es reicht aber hin, alle die verschiedenen Sinus, welche man p, q, r, s nenne, nur in der ersten Potenz zu nehmen. Denn gesetzt, dafs durch Vertauschung des α mit $-\alpha$, p in q und q in p, r in s und s in r übergehe, so werden schon die einzelnen Producte pq, rs, ... rationale Functionen von $\sin\alpha$, also auch das ganze $pqrs.....$ eine rationale Function desselben Sinus sein. Eben so ist klar, dafs durch Zeichen-Aenderung des β von allen den verschiedenen Sinussen p, q, r, s ...., die eine Hälfte in die andere, und umgekehrt, übergehen mufs, und dafs schon die einzelnen Producte je zweier sich gegenseitig in einander verwandelnder Sinus nach $\sin\beta$ rational sein müssen. Dasselbe gilt von der Rationalität nach $\sin\gamma$ u. s. w. Folglich wird schon das einfache Product $pqrs.....$ selbst, nicht erst eine höhere Potenz desselben, nach allen den einzelnen $\sin\alpha$, $\sin\beta$, ..., rational sein.

Da nun in der That die linke Seite der obigen Gleichung alle Sinus enthält, die aus der Form $\sin(\pm\alpha\pm\beta\pm....\pm\eta)$ durch alle möglichen Combinationen der Vorzeichen entstehen, und auch jeder Sinus nicht mehr als einmal vorkommt, so mufs durch diese Gleichung die ursprüngliche, $\sin(\alpha+.....\eta)=0$, und zwar auf die einfachste Weise, rational gemacht sein.

Nach denselben Schlüssen wird allgemein in der rational gemachten Gleichung für das $(2n+1)$Eck auf der einen Seite Null und auf der anderen ein Product aus folgenden Factoren stehen:

1) der Sinus f der Summe aller $2m+1$ Bogen α, β, γ, ...;
2) die $2m+1$ Sinus, welche hervorgehen, wenn man in f einen der $2m+1$ Bogen negativ nimmt;
3) die $\frac{(2m+1)2m}{1.2}$ Sinus, die aus f erhalten werden, wenn man 2 Bogen zugleich negativ nimmt;
4) die $\frac{(2m+1)2m(2m-1)}{1\ .\ 2\ .\ 3}$ Sinus, wenn man 3 Bogen zugleich negativ setzt; u. s. w.

und endlich die $\frac{(2m+1)2m.....(m+2)}{1\ .\ 2\ .....\ m}$ Sinus mit m negativen Bogen.

Die Anzahl aller dieser Sinus ist $=2^{2m}$.

Wir gehen nunmehr zu den Vielecken von gerader Seitenzahl fort. Sie zerfallen, wie oben gezeigt wurde, in zwei Klassen, von denen wir aber nur die eine, — es sei die erste, — einer umständlicheren Betrachtung zu unterwerfen nöthig haben.

Für das Viereck der ersten Klasse ist die zu rationalisirende Gleichung

$$\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma+\delta) = 0.$$

Dieser Cosinus wird, wenn man für α, $-\alpha+(2p+1)\,180^\circ$ substituirt,

$$\cos[2p+1)90^\circ+\tfrac{1}{2}(-\alpha+\beta\ldots.)] = -\sin\tfrac{1}{2}(-\alpha+\beta\ldots.)\sin(2p+1)90^\circ;$$

ferner wird $\sin\frac{1}{2}(-\alpha+\beta\ldots.)$ durch die nemliche Substitution

$$\sin[\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta\ldots.)-(2p+1)90^\circ] = -\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta\ldots.)\sin(2p+1)90^\circ;$$

mithin wird bei dieser Substitution, weil $[\sin(2p+1)90^\circ]^2 = 1$, das Product $\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta\ldots.)\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta\ldots.)$ ungeändert bleiben. Es findet sich aber eben so leicht, dafs dieses Product sich nicht ändert, wenn man α mit $\alpha+2p.180^\circ$ vertauscht, indem dadurch

$$\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta\ldots.) \text{ in } \cos[\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)+p.180^\circ] = \cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos(p.180^\circ),$$
$$\sin\tfrac{1}{2}(-\alpha+\beta\ldots.) \text{ in } \sin[\tfrac{1}{2}(-\alpha+\beta)-p.180^\circ] = \sin\tfrac{1}{2}(-\alpha+\beta)\cos(p.180^\circ)$$

übergeht, und

$$[\cos(p.180^\circ)]^2 = 1 \text{ ist.}$$

Es mufs folglich

$$\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta\ldots.)\sin\tfrac{1}{2}(-\alpha+\beta\ldots.)$$

nach $\sin\alpha$ rational sein, so wie es auch in der That $= \frac{1}{2}\sin(\beta\ldots.)-\frac{1}{2}\sin\alpha$ ist. Da nun ebenso, wenn man $-\alpha$ für α setzt, auch $\cos\frac{1}{2}(-\alpha+\beta\ldots.)\times\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta\ldots.)$ nach $\sin\alpha$ rational sein mufs, so entspringt daraus die Regel, dafs, um cos oder $\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta\ldots.)$ nach $\sin\alpha$ rational zu machen, man darin sin oder $\cos\frac{1}{2}(-\alpha+\beta\ldots.)$ multipliciren mufs.

Die nach $\sin\alpha$ rationalisirte Gleichung für das Viereck ist daher:

$$\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\sin\tfrac{1}{2}(-\alpha+\beta+\gamma+\delta) = 0.$$

Um sie nach $\sin\beta$ rational zu machen, wird in sie nach jener Regel

$$\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma+\delta)\cos\tfrac{1}{2}(-\alpha-\beta+\gamma+\delta)$$

zu multipliciren sein. In dieses, jetzt aus vier Factoren bestehende Product multiplicire man

$$\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma+\delta)\cos\tfrac{1}{2}(-\alpha+\beta-\gamma+\delta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta-\gamma+\delta)\sin\tfrac{1}{2}(-\alpha-\beta-\gamma+\delta),$$

um es nach $\sin\gamma$ rational zu machen. Hiernach ist die nach $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$ rationalisirte Gleichung des Vierecks:

$$\text{IV.}\quad 0 = \begin{cases} \cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\cos\tfrac{1}{2}(-\alpha-\beta+\gamma+\delta) \\ \times\cos\tfrac{1}{2}(-\alpha+\beta-\gamma+\delta)\cos\tfrac{1}{2}(-\alpha+\beta+\gamma-\delta) \\ \times\sin\tfrac{1}{2}(-\alpha+\beta+\gamma+\delta)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma+\delta) \\ \times\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma+\delta)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma-\delta). \end{cases}$$

Da aber $\cos\frac{1}{2}(-\alpha-\beta+\gamma+\delta) = \cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma-\delta)$ etc., so leuchtet ein, dafs diese Gleichung nach α, β, γ, δ symmetrisch, mithin auch nach $\sin\delta$ rational, folglich die gesuchte Gleichung ist.

Hieraus läfst sich endlich die Gleichung zwischen r, a, b, c, d etwa auf folgende Weise am kürzesten ableiten. Multiplicirt man je zwei unter einander geschriebene Factoren, so kommt:

$$[\sin\alpha-\sin(\beta+\gamma+\delta)][\sin\alpha+\sin(-\beta+\gamma+\delta)]$$
$$\times[\sin\alpha+\sin(\beta-\gamma+\delta)][\sin\alpha+\sin(\beta+\gamma-\delta)] = 0,$$

welche vier Factoren man der Reihe nach f, g, h, i setze. Man hat weiter:

$$fg = \sin\alpha^2-2\sin\alpha\sin\beta\cos(\gamma+\delta)-\tfrac{1}{2}\cos2\beta+\tfrac{1}{2}\cos2(\gamma+\delta),$$
$$hi = \sin\alpha^2+2\sin\alpha\sin\beta\cos(\gamma-\delta)-\tfrac{1}{2}\cos2\beta+\tfrac{1}{2}\cos2(\gamma-\delta).$$

Man setze nun einstweilen $r = 1$ und hiernach $\sin\alpha = a$, $\sin\beta = b$ etc., so wird

$$\cos(\gamma\pm\delta) = \cos\gamma\cos\delta\mp cd,$$
$$\cos2\beta = 1-2b^2,$$
$$\cos2(\gamma\pm\delta) = (1-2c^2)(1-2d^2)\mp 2cd\cos\gamma\cos\delta,$$

und hiernach:

$$fg = a^2+b^2-c^2-d^2+2c^2d^2+2abcd-2(ab+cd)\cos\gamma\cos\delta,$$
$$hi = a^2+b^2-c^2-d^2+2c^2d^2+2abcd+2(ab+cd)\cos\gamma\cos\delta,$$

folglich:

$$fghi = 0 = [a^2+b^2-c^2-d^2+2cd(ab+cd)]^2-4(ab+cd)^2(1-c^2)(1-d^2)$$
$$= (a^2+b^2-c^2-d^2)^2+4cd(ab+cd)(a^2+b^2-c^2-d^2)-4(ab+cd)^2(1-c^2-d^2)$$

und wenn man jetzt noch r hinzufügt, so dafs alle Glieder einerlei Dimension erhalten:

$$[4(ab+cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2]r^2 = 4(ab+cd)[ab(c^2+d^2)+cd(a^2+b^2)],$$

welche Gleichung sich ohne Schwierigkeit auf die bekannte Form bringen läfst:

$$(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)r^2$$
$$= 4(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc).$$

Bedeuten a, b, c, d nicht, wie oben angenommen wurde, die halben, sondern die ganzen Seiten, so fällt der Factor 4 weg.

Um jetzt die rationale Gleichung für das Sechseck und die höheren geraden Vieleke überhaupt zu finden, wird es genug sein, zu überlegen

1) dafs diese Gleichung nach allen den darin vorkommenden $2m$ Bogen (wenn $2m$ die Seitenzahl ist) symmetrisch sein mufs;

2) dafs, indem man in $\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma.....)$ nach und nach einen, zwei, drei Bogen etc. negativ nimmt, der cosinus in sinus, hierauf wieder in cosinus und so fort, abwechselnd, zu verwandeln ist, wie dies unmittelbar aus obiger Regel folgt: dafs man also überhaupt cos oder sin vorzusetzen hat, nachdem die Anzahl der negativen Bogen, und folglich auch der positiven (weil die Anzahl aller $= 2m$), gerade oder ungerade ist;

3) dafs höchstens nur m Bogen negativ zu nehmen sind, indem die cosinus oder sinus bei $m+n$ negativen Bogen mit den cos. oder sin. bei $m-n$ negativen, die Cosinus ganz, die Sinus doch ihrem absoluten Werth nach, identisch sind;

4) dafs man aus eben dem Grunde von den Factoren mit m negativen Bogen nur die eine Hälfte beizubehalten hat; z. B. alle diejenigen, worin α negativ vorkommt, wie in IV.

Nach diesen Betrachtungen wird die rationalisirte Gleichung für das Sechseck sein:

$$\text{VI.}\quad 0 = \cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta)$$
$$\times \sin\tfrac{1}{2}(-\alpha+\beta....+\zeta)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma+....+\zeta)....\sin\tfrac{1}{2}(\alpha....+\varepsilon-\zeta)$$
$$\times \cos\tfrac{1}{2}(-\alpha-\beta+\gamma....+\zeta)\cos\tfrac{1}{2}(-\alpha+\beta-\gamma+\delta....\zeta)....\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+....+\delta-\varepsilon-\zeta)$$
$$\times \sin\tfrac{1}{2}(-\alpha-\beta-\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta).....\sin\tfrac{1}{2}(-\alpha+\beta+\gamma+\delta-\varepsilon-\zeta).$$

Die Anzahl sämmtlicher Factoren ist

$$1+6+\frac{6.5}{2}+\tfrac{1}{2}.\frac{6.5.4}{1.2.3}=32.$$

Dafs aber dieses Product nach allen $\sin\alpha$, $\sin\beta$, ... $\sin\zeta$ rational ist, ergiebt sich leicht daraus, dafs für jeden dieser Sinus je 2 Factoren zusammengehören, die ein nach demselben rationales Product mit einander bilden. So gehört z. B. nach $\sin\delta$ zu dem Factor $\sin\frac{1}{2}(-\alpha-\beta-\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta)$ der Factor $\cos\frac{1}{2}(-\alpha-\beta-\gamma-\delta+\varepsilon+\zeta)=\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma+\delta-\varepsilon-\zeta)$, und umgekehrt zu letzterem der erstere, indem ihr Product

$$=\tfrac{1}{2}\sin\delta-\tfrac{1}{2}\sin(\alpha+\beta+\gamma-\varepsilon-\zeta)\text{ ist.}$$

Auf gleiche Art wird überhaupt die rationalisirte Gleichung für das $2m$ Eck der ersten Klasse sein:

$$0 = \cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\ldots.)\,\Sigma\sin\tfrac{1}{2}(-\alpha+\beta+\ldots.)\,\Sigma\cos\tfrac{1}{2}(-\alpha-\beta+\gamma+\ldots.)$$
$$\times\,\Sigma\sin\tfrac{1}{2}(-\alpha-\beta-\gamma+\delta+\ldots.),$$

und so fort, bis zu dem Product aus allen den Cosinussen (wenn m gerade), oder Sinussen (wenn m ungerade), bei welchen nebst einem und demselben Bogen, z. B. α, noch $m-1$ andere negativ, die m übrigen aber positiv sind.

Die Anzahl sämmtlicher Factoren ist:

$$1+2m+\frac{2m(2m-1)}{1.2}+\frac{2m(2m-1)(2m-2)}{1.2.3}+\ldots.$$
$$+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{2m.(2m-1)\ldots.(m+1)}{1.2\ldots.m}=2^{2m-1}.$$

Was die geraden Vielecke der zweiten Klasse anbelangt, so hat die hierbei rational zu machende Gleichung die Form:

$$\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma+\ldots.)=0.$$

Nach der oben gegebenen Regel wird diese Gleichung nach $\sin\alpha$ rational gemacht, wenn man sie mit $\cos\frac{1}{2}(-\alpha+\beta+\ldots.)$ multiplicirt, und dieses nach $\sin\alpha$ rationale Product wird auch nach $\sin\beta$ rational werden, wenn man es mit $\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma\ldots.)\sin\frac{1}{2}(-\alpha-\beta+\ldots.)$ multiplicirt etc. Die rationalisirte Gleichung eines geraden Vielecks der 2ten Klasse erhält man also unmittelbar aus der Gleichung desselben Vielecks der ersten Classe, wenn man in letzterer Gleichung die Wörter sinus und cosinus mit einander verwechselt. So wird z. B. die rational gemachte Gleichung für das Viereck der zweiten Klasse sein:

$$\text{VI}^*.\quad 0=\begin{cases}\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\sin\frac{1}{2}(-\alpha-\beta+\gamma+\delta)\sin\frac{1}{2}(-\alpha+\beta-\gamma+\delta)\\ \qquad\times\sin\frac{1}{2}(-\alpha+\beta+\gamma-\delta),\\ \cos\frac{1}{2}(-\alpha+\beta+\gamma+\delta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma+\delta)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma+\delta)\\ \qquad\times\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma-\delta).\end{cases}$$

Hier ist also bei den Cosinussen die Anzahl der negativen Bogen ungerade und bei den Sinussen gerade, während dafs bei der ersten Klasse das Gegentheil Statt fand. Daraus ergiebt sich ferner, dafs IV. in IV*., VI. in VI*. etc., und umgekehrt, auch dann sich verwandelt, wenn man irgend einen der $2m$ Bogen, z. B. α, oder auch irgend drei, fünf etc. Bogen negativ nimmt, dafs aber die Gleichungen IV., VI. etc. sowohl als IV*., VI*. etc. unverändert bleiben, wenn man irgend eine gerade Anzahl der $2m$ Bogen mit dem entgegengesetzten Zeichen nimmt. Es wird folglich auch die daraus abgeleitete Gleichung zwischen r, a, b, c....

eines geraden Vielecks der einen Klasse in die Gleichung des der anderen Klasse zugehörigen Vielecks sich verwandeln, oder sich nicht ändern, je nachdem man einer ungeraden oder geraden Anzahl der Seiten entgegengesetzte Werthe giebt.

Die Gleichung zwischen r, a, b.... für das Viereck der zweiten Klasse wird daher sein:

$$(a+b+c+d)(-a-b+c+d)(-a+b-c+d)(-a+b+c-d)r^2 = -4(ab-cd)(ac-bd)(ad-bc).$$

Diese Gleichung, so wie die vorige für das Viereck der ersten Klasse, besitzen demnach die Eigenschaft, dafs die eine in die andere übergehet, wenn man irgend eine der vier Gröfsen negativ nimmt, dafs also jede derselben für sich auf gleiche Art sich ändert, man mag a in $-a$, oder b in $-b$ etc. verwandeln, und dabei in dem ersten Zustande sowohl, als in dem geänderten, nach a, b, c, d symmetrisch ist. Wir schliefsen hieraus, dafs jede der beiden Gleichungen, in einzelne Glieder aufgelöset, aufser symmetrischen Functionen vor a^2, b^2, c^2, d^2, als welche bei jedem Zeichenwechsel der Elemente a, b,.... dieselben bleiben, noch das Product $abcd$ enthalten werde, welches die einfachste symmetrische Function von a, b, c, d ist, die sich bei dem Zeichenwechsel eines jeden ihrer vier Elemente auf gleiche Art ändert. Und in der That lassen sich die Gleichungen IV. und IV*. in folgender Form darstellen:

$$[-a^4-\ldots.-d^4+2(a^2b^2+a^2c^2+\ldots.+c^2d^2)\pm 8abcd]r^2 = 4(a^2b^2c^2+\ldots.+b^2c^2d^2)\pm 4abcd(a^2+\ldots.+d^2),$$

wo das obere Zeichen für die erste, das untere für die zweite Klasse gilt. Auf ähnliche Art wird die Gleichung für das Sechseck aus symmetrischen Functionen von a^2, b^2....f^2 und aus dem Producte $abcdef$ zusammengesetzt sein, u. s. w.

Die Gleichungen für ungerade Vielecke dagegen enthalten nur symmetrische Functionen von a^2, b^2, c^2.... und bleiben daher bei jedem Zeichenwechsel ihrer Elemente unverändert.

Noch kann man bemerken, dafs die zwei rationalisirten Gleichungen der ersten und zweiten Klasse eines geraden Vielecks, in einander multiplicirt, ein Product geben, welches die Form der rationalisirten Gleichung eines ungeraden Vielecks hat, nemlich:

$$\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\ldots.)\Sigma\sin\tfrac{1}{2}(-\alpha+\beta+\ldots.)\ldots. \times \sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\ldots.)\Sigma\cos\tfrac{1}{2}(-\alpha+\beta+\ldots.) = 0,$$

einerlei mit

$$\sin(\alpha+\beta+\ldots.)\Sigma\sin(-\alpha+\beta+\ldots.)\ldots. = 0;$$

und dafs, wenn man auch bei einem ungeraden Vielecke als rational zu machende Gleichung eine Gleichung von derselben Form, wie bei geraden Vielecken, zum Grunde legen wollte, man dennoch zu derselben rationalisirten Gleichung wie vorhin, gelangen würde. Setzte man z. B. für das Dreieck die Gleichung $\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)=0$, so müfste man sie, um sie nach $\sin\alpha$ rational zu machen, mit $\sin\frac{1}{2}(-\alpha+\beta+\gamma)$, und wegen $\sin\beta$ noch mit $\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma)\cos\frac{1}{2}(-\alpha-\beta+\gamma)$ multipliciren. Dieses Product ist aber noch nicht nach $\sin\gamma$ rational, sondern wird es erst durch Multiplication mit

$$\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)\cos\tfrac{1}{2}(-\alpha+\beta-\gamma)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta-\gamma)\sin\tfrac{1}{2}(-\alpha-\beta-\gamma),$$

wodurch man auf die obige Gleichung III. zurück kommt.

Das Bisherige wird genug sein, um zu sehen, wie man aus der Seitenzahl irgend eines in einen Kreis zu beschreibenden Vielecks die Gleichung zwischen den Seiten und dem Halbmesser des Kreises finden könne, zugleich aber auch um einzusehen, dafs diese Gleichungen, die bereits entwickelten für das Dreieck und Viereck ausgenommen, schon vom Fünfeck an sehr zusammengesetzt sein müssen. Ohne daher im Gegenwärtigen diese Entwicklung selbst vorzunehmen, will ich jetzt nur die hierbei gewifs noch am meisten interessirende Frage zu beantworten suchen, bis auf welchen Grad eine solche, nach den Potenzen von r geordnete Gleichung steige, wie viel also verschiedene Kreise existiren, in denen aus einer gegebenen Anzahl von Seiten ein Vieleck zusammengesetzt werden kann.

Weil in der Gleichung zwischen r, a, b, c .... nur die Quadrate von a, b...., und bei geraden Vielecken noch das Product aus allen Seiten vorkommen, so ersieht man zuerst, dafs die Gleichung nur gerade Potenzen von r enthalten könne, und dafs sie mithin, nach ihnen geordnet, von der Form sein werde:

$$\Theta)\quad 0 = A + Br^2 + Cr^4 + \ldots. + Pr^{2p},$$

wo A, B, C.... rationale, ganze, symmetrische Functionen von a^2, b^2.... (und $abc\ldots.$) sind, und p eine ganze, von der Seitenzahl m abhängige, jetzt eben zu bestimmende Zahl ist. Diese Gleichung läfst sich nemlich in p Factoren von der Form r^2-q auflösen, deren jeder, wenn anders q eine mögliche und positive Gröfse ist, einen besonderen Kreis, dessen

Halbmesser $= \pm \sqrt{q}$, zu erkennen giebt, in welchen das Vieleck beschrieben werden kann. Das Doppelzeichen $\pm$, womit hiernach jeder Halbmesser behaftet erscheint, rührt daher, dafs die Richtung des Halbmessers, nach welcher er als positiv oder negativ bestimmt wird, hierbei nicht in Betracht kommen kann.

Um nun den Grad der Gleichung, oder $2p$ für ein gegebenes m zu bestimmen, wird es hinreichen, das erste und letzte Glied der Gleichung zu entwickeln, worauf dann der Unterschied zwischen den Dimensionen dieser Glieder dem gesuchten $2p$ gleich sein wird. Um die dabei anzuwendende Methode zuerst am Dreieck darzulegen, so ist in der rationalisirten Gleichung III. der erste Factor des $= 0$ gesetzten Products: $\sin(\alpha+\beta+\gamma)$, den man jetzt unter folgender Form darstelle:

$$\frac{1}{2i}[\cos(\alpha+\beta+\gamma)+i\sin(\alpha+\beta+\gamma)]-\frac{1}{2i}[\cos(\alpha+\beta+\gamma)-i\sin(\alpha+\beta+\gamma)]$$

$$=\frac{1}{2i}(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta)(\cos\gamma+i\sin\gamma)$$

$$-\frac{1}{2i}(\cos\alpha-i\sin\alpha)(\cos\beta-i\sin\beta)(\cos\gamma-i\sin\gamma) = a,$$

wo $i = \sqrt{-1}$ ist; und auf gleiche Weise

$$\sin(-\alpha+\beta+\gamma) = b = \frac{1}{2i}(\cos\alpha-i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta)(\cos\gamma+i\sin\gamma)$$

$$-\frac{1}{2i}(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta-i\sin\beta)(\cos\gamma-i\sin\gamma) \text{ u. s. w.}$$

Es ist aber, wenn man einstweilen $r = 1$ nimmt:

$$\cos\alpha \pm i\sin\alpha = \sqrt{(1-a^2)} \pm ia,$$
$$\cos\beta \pm i\sin\beta = \sqrt{(1-b^2)} \pm ib \text{ etc.}$$

Substituirt man diese Ausdrücke in a, b...., so werden sich in dem Producte $abcd$ die Wurzelzeichen gegenseitig vernichten, und dieses Product $= 0$ gesetzt, und mit Hinzufügung der Potenzen von r die Dimensionen überall gleich gemacht, wird die gesuchte Gleichung für das Dreieck erhalten werden.

Zu demselben Resultate wird man nothwendig auch gelangen, wenn man statt der Wurzelgröfsen $\sqrt{(1-a^2)}$ etc., ihre Entwickelungen in unendliche Reihen: $1-\frac{1}{2}a^2-\ldots.$ etc. substituirt. Zugleich aber bieten diese, nach aufsteigenden Potenzen von a, ... geordneten Entwickelungen ein einfaches Mittel dar, um von der Gleichung $abcd = 0$ das Glied von der niedrigsten Dimension separat darzustellen, dadurch nemlich,

dafs man von jeder Reihe ebenfalls nur das niedrigste Glied, welches überall $= 1$ ist, beibehält. Hierdurch wird

$$\cos\alpha \pm i\sin\alpha = 1 \pm i\alpha, \text{ etc. und}$$

$$\mathfrak{a} = \frac{1}{2i}(1+i\alpha)(1+ib)(1+ic) - \frac{1}{2i}(1-i\alpha)(1-ib)(1-ic),$$

und wenn man diese Producte entwickelt, und dabei gleichfalls nur die niedrigste Dimension von a, b, c stehen läfst:

$$\mathfrak{a} = a+b+c, \text{ und eben so } \mathfrak{b} = -a+b+c \text{ u. s. w.,}$$

folglich das niedrigste Glied in $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$, $=$

$$(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c).$$

So wie das niedrigste Glied durch Auflösung der Wurzelgröfsen $\sqrt{(1-a^2)}$ etc. in Reihen, nach aufsteigenden Potenzen von a, ... erhalten wurde, eben so wird sich das Glied ergeben, welches die höchsten Dimensionen von a, b, c in sich fafst, wenn man die Wurzelgröfsen nach absteigenden Potenzen entwickelt, und von diesen Reihen gleichfalls nur den Anfang beibehält. Alsdann ist

$$\sqrt{(1-a^2)} = i\sqrt{(a^2-1)} = ia - \frac{i}{2a} - \ldots,$$

folglich

$$\sqrt{(1-a^2)} + ia = 2ia,$$

$$\sqrt{(1-a^2)} - ia = -\frac{i}{2a} = \frac{1}{2ia} \text{ u. s. w., und}$$

$$\mathfrak{a} = \frac{1}{2i}\cdot 2ia\,.\,2ib\,.\,2ic - \frac{1}{2i}\cdot\frac{1}{2ia}\cdot\frac{1}{2ib}\cdot\frac{1}{2ic} = -4abc,$$

weil das zweite Glied, wo a, b, c im Nenner vorkommen, gegen das erste wegzulassen ist. Aus eben dem Grunde hat man

$$\mathfrak{b} = \frac{1}{2i}\cdot\frac{1}{2ia}\,.\,2ib\,.\,2ic - \frac{1}{2i}\,.\,2ia\,.\,\frac{1}{2ib}\cdot\frac{1}{2ic} = \frac{bc}{a},$$

$$\mathfrak{c} = \frac{ac}{b}, \quad \mathfrak{d} = \frac{ab}{c},$$

folglich das höchste Glied in $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d} = -4abc\,.\,\frac{bc}{a}\,.\,\frac{ac}{b}\,.\,\frac{ab}{c} = -4a^2b^2c^2$.

Da dieses nur um zwei Dimensionen höher als das niedrigste ist, so ist die Gleichung selbst nur vom zweiten Grade, hat folglich keine Mittelglieder, und ist nach Hinzufügung von r^2:

$$(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)r^2 - 4a^2b^2c^2 = 0,$$

wie schon oben gefunden wurde.

Auf ähnliche Art lassen sich auch die Gleichungen für das Fünfeck und die ungeraden Vielecke mit noch mehreren Seiten behandeln. Ueber-

haupt nemlich wird von

$$\sin(\pm\alpha\pm\beta\pm\gamma\ldots.),$$

nach aufsteigenden Potenzen von a, b, c entwickelt, das erste oder niedrigste Glied $=\pm a\pm b\pm c\ldots.$ sein. Entwickelt man aber denselben Sinus nach absteigenden Potenzen, so ist das erste und also höchste Glied

$$=-\tfrac{1}{2}i(2ia)^{\pm 1}(2ib)^{\pm 1}(2ic)^{\pm 1}\ldots. \text{ oder}$$
$$\tfrac{1}{2}i(2ia)^{\mp 1}(2ib)^{\mp 1}(2ic)^{\mp 1}\ldots.$$

nachdem die Dimension des einen oder des anderen Ausdrucks positiv ist; wobei sich, weil die Anzahl von a, b, $c\ldots.$ ungerade ist, die i immer gegenseitig aufheben werden.

Bei dem Fünfeck ist demnach von

$$\sin(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)\,\Sigma\sin(-\alpha+\beta+\ldots.)\,\Sigma\sin(-\alpha-\beta+\gamma+\ldots.)$$

das niedrigste Glied P in der Gleichung (Θ), $=$

$$(a+b+c+d+e)\,\Sigma(-a+b+c+d+e)\,\Sigma(-a-b+c+d+e),$$

und dessen Dimension $=1+5+\frac{5.4}{1.2}=16$; für das höchste Glied A hat man

$$\sin(\alpha+\beta+\ldots\ldots.)=-\tfrac{1}{2}i\,.\,2ia\,.\,2ib\,.\,2ic.2id.2ie=16abcde,$$

$$\sin(-\alpha+\beta+\ldots..)=-\tfrac{1}{2}i(2ia)^{-1}.\,2ib\,.2ic.2id.2ie=\frac{4bcde}{a},$$

$$\sin(-\alpha-\beta+\gamma+\ldots.)=-\tfrac{1}{2}i(2ia)^{-1}.(2ib)^{-1}.2ic.2id.2ie=\frac{cde}{ab};$$

folglich A selbst

$$=16abcde\,\Sigma\left(-\frac{4bcde}{a}\right)\Sigma\left(\frac{cde}{ab}\right),$$

und dessen Dimension $=5.1+3.5+1.\frac{5.4}{1.2}$, weil jeder der 5 unter dem ersten Σ begriffenen Factoren von der dritten, und jeder der 10 Factoren unter dem zweiten Σ von der ersten Dimension ist; folglich der Unterschied der Dimensionen zwischen A und P, oder $2p=5-1+(3-1)5$ $=4+2.5$ und $p=2+1.5=7$; d. h. die Gleichung für das Fünfeck ist nach r^2 vom siebenten Grade. Sind daher alle 7 Wurzeln dieser Gleichung möglich, so giebt es sieben (im Allgemeinen) verschiedene Kreise, in welche sich mit den gegebenen fünf Seiten ein Fünfeck zeichnen läfst.

Weil

$$\Sigma\left(-4\frac{bcde}{a}\right)=\left(-4\frac{bcde}{a}\right)\left(-4\frac{acde}{b}\right)\ldots.=-4^5a^3b^3c^3d^3e^3$$

und

$$\Sigma\left(\frac{cde}{ab}\right) = \frac{cde}{ab}\cdot\frac{bde}{ac}\ldots\ldots\frac{abc}{de} = a^2b^2\ldots\ldots e^2,$$

so ist das höchste Glied, entwickelt $= -4^7 a^6 b^6 c^6 d^6 e^6$; mithin das Product aus den Quadraten aller 7 Halbmesser

$$r'^2 r''^2 \ldots\ldots r^{\text{VII}\,2} = \frac{2^{14} a^6 b^6 \ldots\ldots e^6}{(a+\ldots\ldots e)\,\Sigma(-a+b+\ldots\ldots)\,\Sigma(-a-b+\ldots\ldots)};$$

folglich, wenn a, b, ... nicht die halben, sondern die ganzen Seiten selbst bedeuten:

$$r' r'' \ldots\ldots r^{\text{VII}} = \frac{a^3 b^3 \ldots\ldots e^3}{\sqrt{[(a+b+\ldots\ldots+e)\,\Sigma(-a+b+\ldots\ldots+e)\,\Sigma(-a-b+c+d+e)]}}.$$

Um ein einfaches Beispiel zu geben, wie sich mit denselben fünf Seiten in sieben verschiedene Kreise Fünfecke beschreiben lassen, so wollen wir zuerst alle fünf Seiten einander gleich annehmen. Alsdann reduciren sich die sieben verschiedenen Kreise auf drei, indem fünf derselben einander gleich werden. Das in den gröfsten derselben (Fig. 6.) einzuschreibende Fünfeck ist das gewöhnliche regulaire, das Fünfeck in dem kleinsten derselben (Fig. 8.) ist das unter dem Namen des Pentalpha bekannte. Das Fünfeck in dem mittleren Kreise (Fig. 7.) hat die Gestalt eines regulairen Dreiecks, indem hier drei auf einander folgende Seiten, z. B. *BC, CD, DE,* in einander fallen. Lassen wir nun jede der fünf Seiten um beliebige kleine Gröfsen verkleinert oder vergröfsert werden, so werden (Fig. 6. und 8.) ihre Gestalt nicht wesentlich ändern; in (Fig. 7.) aber werden die drei zusammenfallenden Seiten etwas aus einander gehen, und dadurch Figuren, wie (9., 10. und 11.) bilden. Da nun die mittelste der drei vorher in einander fallenden Seiten, jede der fünf Seiten sein kann, so entstehen aus (Fig. 7.) fünf verschiedene Fünfecke und eben so viel, wenn auch nur wenig, von einander verschiedene Kreise.

Man siehet aus dieser für das Fünfeck angestellten Untersuchung, dafs überhaupt aus jedem, in der rationalisirten trigonometrischen Gleichung als Factor vorkommenden Sinus, $\sin(\pm\alpha\pm\beta\pm\gamma\ldots.)$ für das Glied P in der nach Potenzen von r^2 geordneten Gleichung Θ ein Factor von der ersten Dimension $(\pm a\pm b\pm\ldots..)$, für das Glied A aber ein Factor von der Dimension $f-g$ erwächst, wenn von allen den in $\sin(\pm\alpha\pm\beta\ldots.)$ vorkommenden Bogen, f derselben einerlei Zeichen, die g übrigen das entgegengesetzte haben, und f die gröfsere Zahl ist; dafs mithin die Differenz der Dimensionen von A und P, $= 2p$, wegen jedes $\sin(\pm\alpha\pm\ldots.)$

einen Zuwachs von $f-g-1$, und also wegen jedes $\Sigma\sin(\pm\alpha\pm.....)$ einen Zuwachs von $n(f-g-1)$ Einheiten erhält, wenn die Anzahl der unter Σ enthaltenen, in einander zu multiplicirenden Sinusse $=n$ ist.

Wenden wir dieses auf das Siebeneck an, dessen rationalisirte Gleichung

$$\sin(\alpha+....+\eta)\Sigma\sin(-\alpha+....)\Sigma\sin(-\alpha-\beta+....)\Sigma\sin(-\alpha-\beta-\gamma+....)=0$$

ist, so haben wir für $\sin(\alpha+....+\eta)$, $f=7$, $g=0$; für das 1ste Σ, $f-g=5$, $n=7$; für das zweite Σ, $f-g=3$, $n=\frac{7.6}{1.2}$; für das 3te Σ, $f-g=1$, $n=\frac{7.6.5}{1.2.3}$, also $f-g-1$ der Reihe nach $=6, 4, 2, 0$, und daher

$$2p = 6.1+4.7+2.\frac{7.6}{1.2},$$

$$p = 3.1+2.7+1.\frac{7.6}{1.2}=38,$$

und es kann folglich acht und dreifsig verschiedene Kreise geben, in welchen sich mit denselben gegebenen sieben Seiten Siebenecke beschreiben lassen.

Eben so ist nun auch im Allgemeinen bei dem $(2m+1)$ Eck

für $\sin(\alpha+\beta+....)....f-g-1=2m$, $n=1$,

für das 1ste Σ . . . . . $=2m-2$, $....=2m+1$,

- - 2te Σ . . . . . $=2m-4$, $....=\frac{2m+1.2m}{1.2}$,

- - vorletzte Σ . . . . . $=2$, $....=\frac{2m+1.2m....m+3}{1.2.....m-1}$,

- - letzte Σ . . . . . $=0$,

und hiermit, wenn man von $f-g-1$ die halben Werthe nimmt:

$$p=m.1+(m-1)(2m+1)+(m-2)\frac{2m+1.2m}{1.2}+(m-3)\frac{2m+1.2m.2m-1}{1.2.3}$$

$$.....+1.\frac{2m+1.2m....m+3}{1.2.....m-1}.$$

Dieser Reihen-Ausdruck für p läfst sich aber leicht in einen geschlossenen verwandeln. Man hat:

$$p=m\left[1+(2m+1)+\frac{(2m+1)2m}{1.2}+....+\frac{(2m+1).2m....(m+3)}{1.2....m-1}\right]$$

$$-(2m+1)\left[1+2m+\frac{2m(2m-1)}{1.2}+....+\frac{2m(2m-1)....m+3}{1.....m-2}\right].$$

Weil

Weil nun

$$1+(2m+1)+\ldots\ldots\ldots+\frac{(2m+1)\ldots.(m+3)}{1\ldots\ldots m-1}+\frac{(2m+1)\ldots.(m+2)}{1\ldots\ldots m}=2^{2m}$$

und

$$1+2m+\frac{2m.2m-1}{1\ .\ 2}+\ldots.+\frac{2m\ldots.m+3}{1\ldots.m-2}+\frac{2m\ldots.m+2}{1\ldots.m-1}+\tfrac{1}{2}.\frac{2m\ldots.m+1}{1\ldots.m}=2^{2m-1},$$

so wird

$$p=m\left[2^{2m}-\frac{2m+1\ldots.m+2}{1\ldots.m}\right]-(2m+1)\left[2^{2m-1}-\frac{2m\ldots.m+2}{1\ldots.m-1}-\tfrac{1}{2}.\frac{2m\ldots.m+1}{1\ldots.m}\right],$$

welches sich ohne Weiteres auf

$$p=\frac{2m+1}{2}.\frac{2m.2m-1\ldots.m+2.m+1}{1\ .\ 2\ldots\ldots.m-1.m}-2^{2m-1}$$

reducirt. Hiernach ist also der Grad der nach r^2 geordneten Gleichung

für das Dreieck . . . $=\frac{3}{2}.\frac{2}{1}-2^1=1,$

- - Fünfeck . . . $=\frac{5}{2}.\frac{4.3}{1.2}-2^3=7,$

- - Siebeneck . . $=\frac{7}{2}.\frac{6.5.4}{1.2.3}-2^5=38,$

- - Neuneck . . $=\frac{9}{2}.\frac{8.7.6.5}{1.2.3.4}-2^7=187,$

- - Eilfeck . . . $=\frac{11}{2}.\frac{10.9.8.7.6}{1.2.3.4.5}-2^9=874,$

- - Dreizehneck $=\frac{13}{2}.\frac{12.11.10.9.8.7}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .4.5.6}-2^{11}=3958,$

u. s. w., welche Zahlen, wie man sieht, so schnell wachsen, dafs mit der Formel für das Dreizehneck ein schon ziemlich starkes Buch ausgefüllt werden könnte. Es lassen sich diese Zahlen auch noch sehr einfach auf recurrirende Weise darstellen. Es besteht nemlich der Ausdruck für p aus zwei Theilen: einem Binomial-Coefficienten und einer Potenz von 2. Ebenso ist für das $(2m-1)$ Eck:

$$p_1=\frac{2m-1}{2}.\frac{2m-2.2m-3\ldots.m+1.\ m}{1\ .\ 2\ldots\ldots m-2.m-1}-2^{2m-3}.$$

Eliminirt man nun aus den Ausdrücken für p und p_1 das eine Mal die Binomial-Coefficienten und das andere Mal die Potenzen der 2, so erhält man folgende zwei recurrirende Bestimmungen:

$$mp-2(2m+1)p_1=2^{2m-2},\quad p-4p_1=\frac{2m-1.2m-2\ldots.m+1}{1\ .\ 2\ \ldots\ldots m-1},$$

wonach

$$7 = \tfrac{1}{2}(10.1 + 4) = 4.1 + 3,$$
$$38 = \tfrac{1}{3}(14.7 + 4^2) = 4.7 + \frac{5.4}{1.2},$$
$$187 = \tfrac{1}{4}(18.38 + 4^3) = 4.38 + \frac{7.6.5}{1.2.3},$$
$$874 = \tfrac{1}{5}(22.187 + 4^4) = 4.187 + \frac{9.8.7.6}{1.2.3.4}, \text{ u. s. w.}$$

Noch fliefst hieraus, dafs $p:p_1 > 4:1$, d. h. dafs jede folgende Zahl gröfser als das Vierfache der vorhergehenden ist. In der That sind die Exponenten des Verhältnisses $p:p_1$, der Reihe nach:

$$\tfrac{7}{1} = 7,\ \tfrac{38}{7} = 5\tfrac{3}{7},\ \tfrac{187}{38} = 4.\tfrac{35}{38},\ \tfrac{874}{187} = 4.\tfrac{126}{187},\ \tfrac{3958}{874} = 4\tfrac{231}{437} \text{ etc.}$$

Auch läfst sich zeigen, dafs diese Ueberschüsse der Exponenten über 4 immer kleiner und über jede angebbare Grenze kleiner werden, je weiter man in der Reihe fortgehet.

Was nunmehr den Grad der Gleichung für ein gerades Vieleck betrifft, so ist zuerst einleuchtend, dafs die Gleichungen für das $2m$ Eck der einen und anderen Klasse von gleichem Grade sein müssen, indem jede dieser zwei Gleichungen in die andere durch blofse Veränderung des Vorzeichens irgend eines der Elemente übergehet. Sodann läfst sich zeigen, dafs diese zwei Gleichungen für das $2m$ Eck von demselben Grade, als die Gleichung für das nächst niedrigere ungerade $(2m-1)$ Eck, sind.

Um diesen Satz zuerst an der Gleichung für das Viereck zu erläutern, so ist die Gleichung IV., wenn man darin den Sinus des letzten Bogens δ schon rational darstellt:

$$0 = [\sin(\alpha+\beta+\gamma) - \sin\delta][\sin(-\alpha+\beta+\gamma) + \sin\delta]$$
$$\times [\sin(\alpha-\beta+\gamma) + \sin\delta][\sin(\alpha+\beta-\gamma) + \sin\delta].$$

Von der hieraus abzuleitenden rationalen Gleichung zwischen a, b, c, d wollen wir nun, eben so wie vorhin, das Glied von der niedrigsten und das von der höchsten Dimension zu bestimmen suchen. Zu diesem Zweck wird in beiden Fällen für $\sin\delta$ nur d zu substituiren sein. Dagegen wird man die übrigen Sinus $\sin(\pm\alpha\pm\ldots.)$, wie oben beim Dreieck, das eine Mal nach aufsteigenden, das andere Mal nach absteigenden Potenzen von a, b, c zu entwickeln, und von beiden Entwickelungen nur die Anfangsglieder beizubehalten haben. Substituirt man daher die beim Dreieck für diese Glieder gefundenen Werthe, so ergiebt sich in der Gleichung des Vierecks das Glied von der niedrigsten Dimension

$$= (a+b+c-d)(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d),$$

und das Glied von der höchsten:

$$= (-4abc-d)\left(\frac{bc}{a}+d\right)\left(\frac{ac}{b}+d\right)\left(\frac{ab}{c}+d\right),$$

welches sich, wenn man im ersten Factor das einfache d gegen das Product abc, wie erforderlich, wegläfst, auf

$$-4(bc+ad)(ac+bd)(ab+cd)$$

reducirt. Da nun letzteres Glied nur um zwei Dimensionen höher als das erstere ist, und die Gleichungen für die geraden sowohl als ungeraden Vielecke nur gerade Potenzen von r enthalten können, so wird letzteres Glied, mit Hinzufügung des ersteren, durch r^2 noch multiplicirten Gliedes, $= 0$ gesetzt, die Gleichung für das Viereck sein; vollkommen so, wie sie bereits oben auf anderem Wege gefunden wurde.

Wenden wir dieselbe Verfahrungs-Art auf die Gleichung VI. für das Sechseck der ersten Klasse an, so verwandelt sich das darin $= 0$ gesetzte Product von 32 Factoren, wenn man dasselbe nach dem Sinus des letzten Bogens ζ rational darstellt, und deshalb je einen Sinus mit einem Cosinus multiplicirt, in ein Product aus 16 Factoren von der Form $\sin(\pm\alpha\pm\beta\pm\ldots.\pm\varepsilon)\pm\sin\zeta$, wobei $\sin\zeta$ des Vorzeichen $+$ oder $-$ erhält, nachdem in $\sin(\pm\alpha\pm\ldots.)$ die Anzahl der positiven Bogen, die ich immer gröfser annehme als die Anzahl der negativen, gerade oder ungerade ist. Zu demselben Producte wird man daher auch gelangen, wenn man in der rational gemachten Gleichung V. für das Fünfeck, zu jedem der 16 Sinusfactoren noch $\sin\zeta$ mit $+$ oder $-$ nach der eben gegebenen Vorschrift hinzufügt, so dafs sich die Gleichung VI. auch unter folgender Form darstellen läfst:

$$[\sin(\alpha+\beta+\ldots.+\varepsilon)-\sin\zeta]\,\Sigma[\sin(-\alpha+\beta+\ldots.)+\sin\zeta]$$
$$\Sigma[\sin(-\alpha-\beta+\gamma+\ldots.)-\sin\zeta] = 0.$$

Denn man sieht leicht, dafs die zwei Factoren von der Form:

$$\cos\tfrac{1}{2}(\pm\alpha\ldots.\pm\zeta) \text{ und}$$
$$\sin\tfrac{1}{2}(\pm\alpha\ldots.\pm\zeta),$$

in welche jeder dieser 16 Factoren aufgelöst werden kann, unter den 32 Factoren von VI. vorkommen müssen, so wie auch, dafs man unter den 32 aus dieser Auflösung entstehenden Factoren keine zwei einander gleich bekommt.

Indem man nun die Gleichung VI. in ihrer gegenwärtigen Form, eben so wie im Vorigen die Gleichung V. zur Erforschung des Grades der Gleichung für das Sechseck anwendet, so wird offenbar durch das Hinzutreten von $\sin\zeta$, wofür man jetzt f zu setzen hat, die Dimension des ersten Gliedes in der Entwicklung von $\sin(\pm\alpha\pm\ldots.)$, sei es nach aufsteigenden oder absteigenden Potenzen von a, b, c . . . ., nicht geändert. Ist nemlich in dem einen, wie in dem anderen Falle dieses erste Glied von $\sin(\pm\alpha\pm\ldots.)$ nur von der ersten Dimension, so wird man $\pm f$, weil es dieselbe Dimension hat, hinzusetzen müssen. Gehört aber das Glied einer höheren Dimension an, so fällt f gegen dasselbe weg. Es mufs folglich auch in der Entwicklung des ganzen Products für das Sechseck die niedrigste und höchste Dimension mit der niedrigsten und höchsten Dimension des Ausdrucks, welcher aus der Entwicklung des Products für das Fünfeck entspringt, einerlei sein, und es wird folglich auch in der Gleichung für das Sechseck r^2 zu demselben Grad, als in der Gleichung für das Fünfeck, steigen.

Von den beiden äufsersten Gliedern in der Gleichung für das Sechseck der ersten Klasse findet sich auf diese Weise das eine:

$$\Sigma(-a+b+c+d+e+f)\,\Sigma(-a-b+c+d+e-f)\,r^{14},$$

wo das erste Σ sechs Factoren in sich fafst, die Anzahl der Factoren beim zweiten Σ, wo drei Elemente, und darunter, immer ein und dasselbe, hier f, negativ zu nehmen sind, ist $=\frac{5.4}{1.2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{6.5.4}{1.2.3}=10$. Das andere äufserste Glied ist:

$$16abcde\,\Sigma\left(-\frac{4bcde}{a}\right)\Sigma\left(\frac{cde}{ab}-f\right)=16abcde(-4^5a^3b^3\ldots e^3)\,\Sigma\left(\frac{cde-abf}{ab}\right)$$
$$=-2^{14}(cde-abf)(bde-acf)(bce-adf)(bcd-aef)(ade-bcf)$$
$$\times(ace-bdf)(acd-bef)(abe-cdf)(abd-cef)(abc-def),$$

wo f immer in dem negativen Theile jedes Factors vorkommt, so wie in dem zweiten Σ des ersteren Gliedes f immer negativ zu nehmen war. Man sieht aber bald, dafs sich weder das eine noch das andere Glied ändert, wenn man statt f irgend ein anderes der 6 Elemente dieser Bedingung unterwirft, dafs mithin beide Glieder nach allen 6 Elementen, wie gehörig, symmetrisch sind.

Die Gleichung für das Sechseck der ersten und folglich auch der zweiten Klasse ist daher nach r^2, eben so wie die Gleichung für das

Fünfeck, vom 7ten Grade; und es können mithin unter der Voraussetzung, dafs alle Wurzeln möglich und verschieden von einander sind, mit den sechs gegebenen Seiten in 14 verschiedene Kreise Sechsecke gezeichnet werden, von denen die eine Hälfte der einen, die andere der anderen Klasse angehöret.

Auf eben die Art wird nun auch jede der beiden Gleichungen für das Achteck mit der Gleichung für das Siebeneck von einerlei Grade, vom 38sten, sein, u. s. w. bei noch mehrseitigeren geraden Vielecken. Denn eben so, wie vorhin aus der trigonometrischen Gleichung für das Fünfeck die trigonometrische Gleichung des Sechseks durch blofses Anfügen von $\pm \sin\zeta$ zu den einzelnen Factoren der ersteren Gleichung abgeleitet wurde, und durch dieses Anfügen die Dimensionen der beiden aufsersten Glieder in der Gleichung des Fünfecks nicht verändert wurden, so wird man denselben Schlufs auch von jedem anderen ungeraden Vieleck auf das nächstfolgende gerade machen können.

Wir kommen nunmehr zu dem letzten Theile unserer Untersuchung, zu der Bestimmung der Fläche eines in einen Kreis beschriebenen Vielecks aus den gegebenen Seiten. Man denke sich aus dem Mittelpuncte des Kreises nach allen Spitzen des Vielecks-Radien gezogen, so wird dadurch die Fläche des Vielecks in eben so viele gleichschenklige Dreiecke zerlegt, welche den Mittelpunct des Kreises zur gemeinschaftlichen Spitze und die Seiten des Vielecks zu Grundlinien haben. Da jeder der Schenkel dieser Dreiecke $= r$ und die Winkel an den Spitzen derselben, in ihrer Folge $= 2\alpha, 2\beta, \ldots$ sind, so sind die Flächen der Dreiecke $= \frac{1}{2} r^2 \sin 2\alpha$, $\frac{1}{2} r^2 \sin 2\beta$, etc.; mithin, wenn man durch F die Fläche des Vielecks bezeichnet:

$$2F = r^2(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma + \ldots\ldots),$$

und es kommt nun darauf an, aus dieser Gleichung für das Vieleck zwischen $r, a, b, c \ldots$ und aus den Gleichungen: $r \sin\alpha = a$, $r \sin\beta = b$, etc. die Gröfsen $r, \alpha, \beta, \ldots$ zu eliminiren, um somit eine Gleichung zwischen $F, a, b, c, \ldots$ zu erhalten.

Bevor wir aber diese Operationen selbst vornehmen, wird es nöthig sein, uns über die Bedeutung der Vielecksfläche vollkommen zu verständigen. Da nemlich die meisten der hier vorkommenden Vielecke von solcher Beschaffenheit sind, dafs zwei oder mehrere oder auch alle Seiten sich innerhalb ihrer Endpuncte schneiden, so fragt es sich, was dann

unter dem Werthe der Vielecksfläche zu verstehen sei, und ob auch in diesen Fällen die oben gegebene Formel, wobei wir uns stillschweigend ein gewöhnliches Vieleck ohne dergleichen Durchschnittspuncte dachten, angewendet werden könne.

Eine gerade Linie von veränderlicher Länge sei mit dem einen ihrer Endpuncte im Mittelpuncte des Kreises fest, während der andere Endpunct den Perimeter des Vielecks durchlaufe. Die hiermit von der Linie überstrichene Fläche, indem man die mit entgegengesetzter Bewegung beschriebenen Theile mit entgegengesetzten Zeichen nimmt, ist der Flächeninhalt des Vielecks. Sind daher A, B, C drei aufeinander folgende Spitzen im Perimeter und Z der Mittelpunct des Kreises, so werden, indem der bewegliche Endpunct der Linie von A bis B und von B bis C geradlinig fortgehet, von der Linie selbst die Dreiecke ZAB und ZBC beschrieben, und diese sind, jener Erklärung zufolge, mit einerlei oder verschiedenen Zeichen zu verbinden, nachdem der Mittelpunct Z innerhalb oder aufserhalb des Winkels ABC liegt. Geht die eine Seite BC durch Z selbst, so ist das ihr zugehörige Dreieck $ZBC = 0$.

Hiermit ist nun auch die obige Formel für F im Einklange. Denn die Zeichen der Dreiecksflächen $\frac{1}{2}r^2\sin 2\alpha$ und $\frac{1}{2}r^2\sin 2\beta$ richten sich nach den Zeichen von $\sin 2\alpha$ und $\sin 2\beta$. Diese sind aber einerlei, wenn $2\alpha =$ Bogen AB und $2\beta =$ Bogen BC zugleich gröfser oder zugleich kleiner als 180° sind; sie sind verschieden, wenn von den Bogen AB und BC der eine gröfser, der andere kleiner als 180° ist; womit, wie man leicht sieht, die vorhin bemerkte Lage von Z gegen den Winkel ABC ganz übereinstimmt.

Um jetzt zur Entwicklung der Gleichung zwischen F, a, b, c, ... überzugehen, so übersieht man leicht, dafs diese Gleichung, wenn die Gleichung zwischen r^2, a, b, ... nach r^2 vom $p$ten Grade ist, ebenfalls p verschiedene Werthe für F angeben mufs, indem jedes in einen anderen Kreis beschriebene Vieleck auch eine andere Fläche haben wird, dafs ferner, weil die Fläche eben so gut negativ als positiv genommen werden kann, die Gleichung nach Potenzen von F^2 fortgehen, und mithin nach F^2 vom $p$ten Grade sein wird.

Ich will nun wenigstens die Möglichkeit darthun, zu dieser Gleichung zu gelangen, und deshalb zuvörderst zeigen, dafs F^2 immer als rationale Function von r^2, a, b, c . . . . dargestellt werden kann.

Zu dem Ende lasse man a um da wachsen, während b, c, ... unverändert bleiben, und suche die daraus für r entstehende Zunahme dr. Weil immer $\alpha+\beta+\gamma+\ldots.$ einem Vielfachen von 180° gleich ist, so hat man:

$$d\alpha + d\beta + d\gamma + \ldots. = 0.$$

Sodann folgt aus den Gleichungen $r\sin\alpha = a$, $r\sin\beta = b$, u. s. w.,

$$r\cos\alpha\, d\alpha + \sin\alpha\, dr = da,$$

$$r\cos\beta\, d\beta + \sin\beta\, dr = 0, \quad r\cos\gamma\, d\gamma + \sin\gamma\, dr = 0, \text{ etc.}$$

Dividirt man diese Gleichungen resp. durch $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, ... und addirt sie hierauf, so kommt, wegen $d\alpha + d\beta \ldots. = 0$:

$$(\text{tang}\,\alpha + \text{tang}\,\beta + \text{tang}\,\gamma + \ldots.)\, dr = \frac{da}{\cos\alpha}.$$

Es ist folglich, weil $\text{tang}\,\alpha + \text{tang}\,\beta + \ldots.$ eine symmetrische Function von α, β, ... ist, $\frac{dr}{da}$ umgekehrt mit $\cos\alpha$, und eben so $\frac{dr}{db}$, $\frac{dr}{dc}$, ... umgekehrt mit $\cos\beta$, $\cos\gamma$, ... proportional.

Diesen Satz, dafs die partiellen Differential-Quotienten des Halbmessers eines Kreises nach den Seiten eines eingeschriebenen Vielecks im umgekehrten Verhältnisse der Abstände der Seiten vom Mittelpuncte ($= r\cos\alpha$, $r\cos\beta$, ...) sind, wollen wir nun benutzen, um aus dem Ausdrucke für F die Cosinus von α, β, ... wegzuschaffen. Weil $\frac{1}{2}r^2\sin 2\alpha = ra\cos\alpha$ etc., so hat man:

$$F^2 = r^2(a\cos\alpha + b\cos\beta + \ldots.)^2$$

$$= \left(\frac{a}{\cos\alpha}r^2\cos\alpha^2 + \frac{b}{\cos\beta}r^2\cos\beta^2 + \ldots.\right)(a\cos\alpha + b\cos\beta + \ldots.),$$

mithin, weil $r^2\cos\alpha^2 = r^2 - a^2$ etc., und wenn man $\frac{dr}{da} = a'$, $\frac{dr}{db} = b'$ etc. setzt, wo daher

$$\frac{1}{a'} : \frac{1}{b'} : \ldots. = \cos\alpha : \cos\beta : \ldots.:$$

$$F^2 = [aa'(r^2 - a^2) + bb'(r^2 - b^2) + \ldots.]\left[\frac{a}{a'} + \frac{b}{b'} + \ldots.\right].$$

Sei jetzt die aus dem Vorigen als bekannt anzunehmende Gleichung zwischen r^2, a, b, c ....:

$$0 = A + Br^2 + Cr^4 + \ldots.,$$

wo A, B, C .... bekannte rationale Functionen von a, b, c .... sind. Differentiirt man diese Gleichung nach a und r, so erhält man:

$$0 = \frac{dA}{da} + r^2\frac{dB}{da} + r^4\frac{dC}{da} + \ldots. + 2Bra' + 4Cr^3a' + \ldots.,$$

und hieraus

$$a' = -\frac{\frac{dA}{da} + r^2\frac{dB}{da} + r^4\frac{dC}{da} + \ldots}{2Br + 4Cr^3 + \ldots},$$

und eben so b', c', ... gleich bekannten rationalen Functionen von r^2, a, b, c, ... Substituirt man nun diese Functionen in dem zuletzt erhaltenen Ausdrucke für F^2, so bekommt man auch F^2 durch eine rationale Function von r^2, a, b, c, ... ausgedrückt, wie zu erweisen war.

Werde diese letztere Gleichung für F^2 durch

$$F^2 = \varphi[r^2, a, b, \ldots.]$$

bezeichnet, so ist jetzt noch übrig, aus ihr und der Gleichung

$$0 = A + Br^2 + \ldots.,$$

r^2 zu eliminiren, ein Geschäft, welches aufserdem, dafs es überaus weitläufig ist, keine weitere Schwierigkeit hat. Heifsen nemlich die p Werthe, welche in der Gleichung

$$0 = A + Br^2 + \ldots. + Pr^{2p},$$

für r^2 substituirt, ihr Genüge leisten: $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, ... $\mathfrak{p}$, so sind $\frac{A}{P}$, $\frac{B}{P}$, ... bekannte rationale symmetrische Functionen von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, ... $\mathfrak{p}$, und jede andere rationale symmetrische Function von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, ... $\mathfrak{p}$ läfst sich auf bekannte Weise durch $\frac{A}{P}$, $\frac{B}{P}$.... rational ausdrücken. Die Quadrate der Vielecksflächen aber, die diesen p verschiedenen Werthen von r^2 angehören, sind: $\varphi(\mathfrak{a}, a, b, \ldots.)$, $\varphi(\mathfrak{b}, a, b, \ldots.)$, $\varphi(\mathfrak{c}, a, b, \ldots.)$, ..., und mithin die Gleichung, welche sie alle umfafst:

$$\{F^2 - \varphi(\mathfrak{a}, a, b, \ldots.)\}\{F^2 - \varphi(\mathfrak{b}, a, b, \ldots.)\}\ldots. = 0.$$

Entwickelt man diese Gleichung, so steigt sie nach F^2 bis zum $p$ten Grade, und kann von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, ... offenbar nur symmetrische Functionen enthalten, die man, wie oben bemerkt, auch durch $\frac{A}{P}$, $\frac{B}{P}$.... ausdrücken kann. Thut man dieses, und setzt endlich statt A, B, ... P ihre Werthe durch a, b, c, ... ausgedrückt, so erhält man die gesuchte rationale Gleichung für den Flächeninhalt, die nach F^2 vom $p$ten Grade ist, und in deren Coefficienten nur a, b, c, ... noch vorkommen.

Um diese Methode schliefslich auf das Dreieck anzuwenden, obwohl sich bei diesem und bei dem Viereck im Kreise die Gleichung zwischen den Seiten und der Fläche auf weit kürzeren Wegen finden läfst, so hat man beim Dreieck:

$0 = A + Br^2$, wo $A = -4a^2b^2c^2$, $B = 2(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2) - a^4 - b^4 - c^4$
$= 4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)$,

folglich

$$\frac{dA}{da} = -8ab^2c^2, \quad \frac{dB}{da} = 4a(b^2 + c^2 - a^2)$$

und

$$2Bra' = -\frac{dA}{da} - r^2\frac{dB}{da} = \frac{1}{B}\left(A\frac{dB}{da} - B\frac{dA}{da}\right)$$
$$= \frac{8ab^2c^2}{B}(c^2 + a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2),$$

wofür man auch setzen kann:

$$\frac{a}{a'} = Qa^2(b^2 + c^2 - a^2),$$

wo Q eine symmetrische Function von a, b, c ist. Auf gleiche Art wird sein:

$$\frac{b}{b'} = Qb^2(c^2 + a^2 - b^2), \quad \frac{c}{c'} = Qc^2(a^2 + b^2 - c^2),$$

folglich:

$$\frac{a}{a'} + \frac{b}{b'} + \frac{c}{c'} = QB.$$

Sodann ist $r^2 - a^2 = -\frac{A + a^2B}{B} = \frac{a^2(b^2 + c^2 - a^2)^2}{B}$, folglich

$$(r^2 - a^2)aa' = \frac{a^2(b^2 + c^2 - a^2)}{BQ},$$

und eben so

$$(r^2 - b^2)bb' = \frac{b^2(c^2 + a^2 - b^2)}{BQ} \text{ etc.},$$

mithin

$$(r^2 - a^2)aa' + (r^2 - b^2)bb' + (r^2 - c^2)cc' = \frac{B}{BQ} = \frac{1}{Q},$$

und endlich

$$F^2 = [(r^2 - a^2)aa' + \ldots.]\left[\frac{a}{a'} + \ldots.\right] = \frac{1}{Q} \cdot QB = B,$$

d. i.

$$F = \sqrt{[(a + b + c)(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)]},$$

von welcher Wurzelgröfse der vierte Theil zu nehmen ist, wenn a, b, c die ganzen Seiten bedeuten. Noch kann man bemerken, dafs der Ausdruck für F^2 durch r^2, a, b, c, ... a', b', ..., mit Verzichtung auf dessen symmetrische Form, sich etwas einfacher darstellen läfst. Es ist nemlich:

$$\frac{F}{r\cos\alpha} = a + \frac{b\cos\beta}{\cos\alpha} + c \cdot \frac{\cos\gamma}{\cos\alpha} + \ldots. = a + b\frac{a'}{b'} + c\frac{a'}{c'} + \ldots.,$$

folglich

$$F^2 = (r^2 - a^2)\,a'^2\left(\frac{a}{a'} + \frac{b}{b'} + \frac{c}{c'} + \ldots\right)^2.$$

Einige andere Formeln, die bei weiterer Fortsetzung dieser Untersuchungen von Nutzen sein können, sind:

$$\frac{dF}{da} = 2r\cos\alpha,\quad \frac{dF}{db} = 2r\cos\beta,\quad \text{etc.},$$

folglich

$$\frac{dF}{da}\cdot\frac{dr}{da} = \frac{dF}{db}\cdot\frac{dr}{db} = \text{etc.} = \frac{2r}{\operatorname{tang}\alpha + \operatorname{tang}\beta + \ldots.}.$$

Da endlich r und F durch a, b, c, ... ausgedrückt, homogene Functionen dieser Gröfsen sind, r von der ersten, F von der zweiten Dimension, so hat man:

$$r = a\frac{dr}{da} + b\frac{dr}{db} + c\frac{dr}{dc} + \ldots.$$

$$2F - a\frac{dF}{da} + b\frac{dF}{db} + c\frac{dF}{dc} + \ldots.$$

wie dies auch schon aus dem Vorigen sich leicht ergiebt.

3.
Recherches sur les diviseurs premiers d'une classe de formules du quatrième degré.

(Par M. *G. Lejeune-Dirichlet*, prof. d. math. à Breslau.)

1er Mémoire.

On trouve, dans les annonces littéraires de Gottingue (11. avril 1825), l'extrait d'un mémoire d'analyse indéterminée que M. Gaufs a présenté à la société royale des sciences de cette ville, mais qui n'a pas encore été imprimé. Ce mémoire est le premier d'une suite de mémoires que l'illustre auteur des *disquisitiones arithmeticae* se propose de donner sur la théorie des résidus biquadratiques et a pour objet de déterminer les caractères distinctifs des nombres premiers diviseurs de la formule x^4-2. L'auteur y établit deux théorèmes extrêmement élégans qui peuvent servir à décider, si un nombre premier, diviseur de x^2-2, divise ou ne divise pas la formule précédente. Ayant eu connaissance, dans le courant de l'année qui vient de finir, de l'extrait cité qui ne contient que les énoncés des deux theorèmes dont il vient d'être question et de quelques propositions auxiliaires, j'eus le désir de démontrer de mon coté les beaux théorèmes découverts par M. Gaufs. Les recherches que je fis dans cette vue me firent trouver une démonstration fondée sur des considérations extrêmement simples et probablement tout-à-fait différente de celle de M. Gaufs, qui parait exiger des recherches préliminaires très délicates et assez étendues. J'appliquai ensuite des considérations analogues à d'autres questions et particulièrement à la recherche des propriétés qui distingnent les diviseurs premiers de la formule $\alpha x^4+\beta x^2+\gamma$; et je parvins ainsi à un grand nombre de théorèmes intéressans. L'exposition rapide d'une partie des résultats auxquels ces recherches m'ont conduit est l'objet du présent mémoire. Je commence par poser quelques définitions et par énoncer quelques théorèmes très faciles à établir et sur lesquels nous aurons à nous appuyer dans la suite.

1.

„Si l'on peut attribuer à l'indeterminée x une valeur telle que „$x^4 - A$ devienne divisible par B, A sera dit résidu biquadratique par „rapport à B."

Il est facile de voir que, si un nombre A est résidu biquadratique par rapport à un nombre B, ou, en d'autres termes, si B est diviseur de $x^4 - A$, chaque facteur premier de B sera pareillement diviseur de $x^4 - A$, et réciproquement que, si cette condition a lieu par rapport à tout facteur premier du nombre B, B sera lui-même diviseur de $x^4 - A$. On peut donc se borner, lorsqu'il s'agit d'assigner tous les nombres qui divisent la formule $x^4 - A$, à ne considérer que les nombres premiers.

Il n'est pas moins évident que, pour qu'un nombre divise la formule $x^4 - A$, il est nécessaire que ce nombre soit diviseur de $x^2 - A$. Il n'y a donc à examiner que les nombres premiers diviseurs de cette dernière formule, c'est à dire les nombres premiers par rapport auxquels A est résidu quadratique. On peut ajouter que, relativement à ceux de ces derniers qui sont de la forme $4n+3$, la question ne présente aucune difficulté; car on s'assure par un raisonnement très simple que tout nombre premier $4n+3$, diviseur de $x^2 - A$, divise aussi la formule $x^4 - A$.

Soit p un nombre premier $4n+1$, diviseur de $x^2 - A$, A désignant un nombre positif ou négatif, non-divisible par p, on a, comme l'on sait, $A^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$. On conclut de là, $A^{\frac{p-1}{4}} \equiv \pm 1 \pmod{p}$ et l'on prouve facilement que le signe supérieur ou inférieur aura lieu, selon que p divise ou ne divise pas la formule $x^4 - A$. On peut donc énoncer ce théorème:

„A designant un nombre résidu quadratique par rapport au nom„bre premier $p = 4n+1$, on aura $A^{\frac{p-1}{4}} \equiv 1$ ou $A^{\frac{p-1}{4}} \equiv -1 \pmod{p}$. „Dans le premier cas, A sera résidu biquadratique par rapport à p, dans „le second, A sera non-résidu biquadratique par rapport à p."

Si l'on applique ce théorème au cas où $A = -1$, on trouvera que -1 est résidu biquadratique par rapport aux nombres premiers $8n+1$, et au contraire non-résidu relativement à ceux de la forme $8n+5$. Du théorème précédent on déduit facilement cet autre, dans l'énoncé duquel

on suppose, comme dans tout ce qui suivra, que p est un nombre premier $4n+1$, et que A et A' désignent des nombres non-divisibles par p et qui sont l'un et l'autre des résidus quadratiques par rapport à p.

„Si les nombres A et A' sont tous les deux des résidus biquadra-„tiques ou tous les deux des non-résidus biquadratiques par rapport à p: „le produit AA' sera résidu biquadratique par rapport à p; si, au con-„traire, l'un des nombres A et A' est résidu, l'autre non-résidu biqua-„dratique relativement à p: AA' sera non-résidu biquadratique par rap-„port à p."

En faisant $A' = -1$, et en ayant égard à ce qui précède, on verra que, si p est de la forme $8n+1$, A sera en même temps résidu ou non-résidu biquadratique que $-A$, et qu'au contraire, si p est de la forme $8n+5$, l'un des nombres A et $-A$ sera résidu, l'autre non-résidu biquadratique par rapport à p.

2.

Après avoir établi ces préliminaires, nous allons nous occuper de la recherche des caractères qui distinguent les diviseurs premiers de la formule x^4-2. On sait que les diviseurs premiers de x^2-2 sont de l'une de ces deux formes $8n+1$, $8n+7$, et que reciproquement tout nombre premier de l'une de ces formes divise la formule x^2-2. D'après ce que nous avons dit dans le paragraphe précédent, nous n'avons pas besoin d'avoir égard à la dernière de ces deux formes et il suffira de considérer les nombres premiers $8n+1$. Soit p un nombre premier de cette espèce, et posons, comme il est permis de le faire, $p = t^2+2u^2$, où u sera pair, t impair. Faisons $u = 2^\nu k k' k'' \ldots$, 2^ν étant la puissance la plus elevée de 2 qui divise u, et k, k', k'', ... désignant des nombres premiers impairs, dont plusieurs peuvent être égaux entre eux. L'équation $t^2+2u^2 = p$, donne immédiatement $t^2 \equiv p \pmod{k}$. Le nombre p est donc résidu quadratique par rapport à k, ce que nous écrirons ainsi $\left(\frac{p}{k}\right) = 1$, en adoptant la notation employée par M. Legendre. On se rappelle que, si c désigne un nombre premier et M un nombre quelconque, non divisible par c, cet illustre géomètre se sert du signe $\left(\frac{M}{c}\right)$, pour désigner le reste que l'on obtient, en divisant par c la puissance $M^{\frac{c-1}{2}}$, reste que l'on sait être égal à 1 ou -1, selon que M est

ou n'est pas résidu quadratique par rapport à c. En appliquant à l'expression $\left(\frac{p}{k}\right) = 1$, le théorème connu sous le nom de loi de reciprocité (*theorema fundamentale* de M. Gaufs), on aura, p étant de la forme $4n+1$, $\left(\frac{k}{p}\right) = 1$. On trouve de la même manière

$$\left(\frac{k'}{p}\right) = 1, \quad \left(\frac{k''}{p}\right) = 1, \quad \text{etc.}$$

D'un autre coté, comme p est de la forme $8n+1$, on a aussi $\left(\frac{2}{p}\right) = 1$, et parconséquent $\left(\frac{2^\nu}{p}\right) = 1$. Multipliant cette dernière expression par toutes les précédentes, il viendra

$$\left(\frac{2^\nu k k' k'' \ldots}{p}\right) = \left(\frac{u}{p}\right) = 1.$$

Considérons maintenant les facteurs simples du nombre impair C, que nous partagerons en deux classes. La première classe comprendera les diviseurs premiers de l'une de ces deux formes $8n+1$, $8n+7$ et les nombres qui en font partie seront désignés par g, g', g'', ...; la seconde classe se composera de nombres h, h', h'', ... contenus dans ces deux formes $8n+3$, $8n+5$. On a d'abord

$$t = gg'g'' \ldots \times hh'h'' \ldots$$

et l'on conclura ensuite de l'équation $p = t^2 + 2u^2$:

$$\left(\frac{2p}{g}\right) = 1, \quad \left(\frac{2p}{g'}\right) = 1, \quad \left(\frac{2p}{g''}\right) = 1, \quad \text{etc.}$$

$$\left(\frac{2p}{h}\right) = 1, \quad \left(\frac{2p}{h'}\right) = 1, \quad \left(\frac{2p}{h''}\right) = 1, \quad \text{etc.}$$

D'un autre coté, on a en vertu de théorèmes connus:

$$\left(\frac{2}{g}\right) = 1, \quad \left(\frac{2}{g'}\right) = 1, \quad \left(\frac{2}{g''}\right) = 1, \quad \text{etc.}$$

$$\left(\frac{2}{h}\right) = -1, \quad \left(\frac{2}{h'}\right) = -1, \quad \left(\frac{2}{h''}\right) = -1, \quad \text{etc.}$$

Si l'on compare maintenant ces expressions aux précédentes, on trouvera

$$\left(\frac{p}{g}\right) = 1, \quad \left(\frac{p}{g'}\right) = 1, \quad \left(\frac{p}{g''}\right) = 1, \quad \text{etc.}$$

$$\left(\frac{p}{h}\right) = -1, \quad \left(\frac{p}{h'}\right) = -1, \quad \left(\frac{p}{h''}\right) = -1, \quad \text{etc.}$$

L'application de la loi de réciprocité à ces dernières expressions donnera celles-ci:

$$\left(\frac{g}{p}\right)=1, \quad \left(\frac{g'}{p}\right)=1, \quad \left(\frac{g''}{p}\right)=1, \text{ etc.}$$
$$\left(\frac{h}{p}\right)=-1, \quad \left(\frac{h'}{p}\right)=-1, \quad \left(\frac{h''}{p}\right)=-1, \text{ etc.}$$

d'où il suit, en multipliant,

$$\left(\frac{g\,g'\,g''\ldots.\times h\,h'\,h''\ldots.}{p}\right)=\left(\frac{t}{p}\right)=\pm 1,$$

où il faudra prendre le signe supérieur ou inférieur, selon que les nombres h, h', h'', ... sont en nombre pair ou impair. Or, il est facile de voir, par l'équation $t=g\,g'\,g''\ldots.\times h\,h'\,h''\ldots.$, que le premier cas aura lieu, lorsque t est de l'une de ces formes $8n+1$, $8n+7$, le second, lorsque t est contenu dans l'une de celles-ci $8n+3$, $8n+5$. On a donc

$$\left(\frac{t}{p}\right)=1, \quad \text{lorsque } t=8n+1 \text{ ou } 8n+7,$$
$$\left(\frac{t}{p}\right)=-1, \quad \text{lorsque } t=8n+3 \text{ ou } 8n+5.$$

Reprenons l'équation $t^2+2u^2=p$ et mettons la sous la forme d'une congruence

$$t^2\equiv -2u^2 \pmod{p}.$$

En élevant les deux nombres à la puissance $\frac{p-1}{4}$, on aura $\left(\frac{p-1}{4} \text{ étant pair}\right)$:

$$t^{\frac{p-1}{2}}\equiv 2^{\frac{p-1}{4}}u^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p},$$

ou ce qui revient au même, ayant prouvé que

$$\left(\frac{u}{p}\right)=1, \quad t^{\frac{p-1}{2}}\equiv 2^{\frac{p-1}{4}} \pmod{p}.$$

On voit donc que ± 2 (on peut mettre le double signe attendu que $p=8n+1$) est ou n'est pas résidu biquadratique par rapport à p, selon que l'on a $\left(\frac{t}{p}\right)=1$ ou $\left(\frac{t}{p}\right)=-1$. En comparant ce résultat à ce qui précède, on aura ce théorème:

„p désignant un nombre premier $8n+1$, si l'on fait $p=t^2+2u^2$, „je dis que ± 2 sera ou ne sera pas résidu biquadratique par rapport „à p, selon que t est de l'une de ces formes $8n+1$, $8n+7$ ou de l'une „de celles-ci $8n+3$, $8n+5$."

C'est le premier des deux théorèmes de M. Gauſs, dont il a été question dans le préambule de ce mémoire. Le second de ces théorèmes est relatif à la décomposition du nombre p en deux quarrés, et peut être facilement déduit de celui qui vient d'être établi.

Faisons $p = \varphi^2 + \psi^2$ (où ψ est supposé divisible par 4) et égalons cette valeur de p à celle que nous venons de considérer.

Nous aurons ainsi

$$p = t^2 + 2u^2 = \varphi^2 + \psi^2,$$

et en transposant:

$$t^2 - \psi^2 = (t+\psi)(t-\psi) = \varphi^2 - 2u^2.$$

Comme φ est impair, le plus grand diviseur commun de φ et u sera impair; désignons le par m et faisons $\varphi = m\varphi'$, $u = mu'$. La substitution de ces valeurs dans l'équation précédente la changera en celli-ci:

$$(t+\psi)(t-\psi) = m^2(\varphi'^2 - 2u'^2).$$

On voit que le nombre impair $t+\psi$ est composé de deux facteurs E et K, dont le premier divise m^2, le second $\varphi'^2 - 2u'^2$, et qu'il en est de même de $t-\psi$ dont nous désignerons les facteurs par F et L, L pouvant être negatif. Nous avons donc les équations

$$t+\psi = EK, \quad t-\psi = FL,$$
$$EF = m^2, \qquad KL = \varphi'^2 - 2u'^2.$$

Il est facile de s'assurer que les nombres E et F sont premiers entre eux. En effet, soit δ un diviseur premier de E, et supposons que δ divise en même temps F. Le nombre δ serait diviseur commun de $t+\psi$ et $t-\psi$ et diviserait par conséquent le nombre t, qui est la demisomme des précédens. D'un autre coté, de ce que δ est diviseur premier de E, il suit successivement, en ayant égard aux équations $EF = m^2$, $u = mu'$, que m^2, m et u sont multiples de δ. Les nombres t et u auraient donc le diviseur commun δ, et $p = t^2 + 2u^2$ ne serait pas un nombre premier.

Le produit des nombres E et F, qui sont premiers entre eux, étant un quarré, il faut que chacun d'eux en soit un. Faisons $E = e^2$, et nous aurons $t+\psi = e^2K$. Le quarré impair e^2 est de la forme $8n+1$, et K, comme diviseur impair de $\varphi'^2 + 2u'^2$ (où φ' et u' sont premiers entre eux), de l'une de celles-ci $8n+1$, $8n+7$. Le nombre $t+\psi$ sera donc lui même de l'une des formes $8n+1$, $8n+7$. Le nombre ψ que nous savons être divisible par 4, sera de la forme $8n$ ou de celle-ci $8n+4$. Il suit, de ce qui précède, que, dans le premier cas, t sera de l'une de ces deux formes $8n+1$, $8n+7$, dans le second de l'une de celles-ci $8n+3$, $8n+5$. En comparant ce résultat au théorème précédent, on aura cet autre théorème.

„p

„p désignant un nombre premier $8n+1$, et ayant fait $p=\varphi^2+\psi^2$ „(où ψ est supposé divisible par 4), ± 2 sera ou ne sera pas résidu bi-„quadratique par rapport à p, selon que ψ est de la forme $8n$ ou de „celle-ci $8n+4$."

Il y a un troisième théorème propre à décider si ± 2 est ou n'est pas résidu biquadratique relativement à un nombre premier $p=8n+1$, et qui peut s'énoncer comme il suit:

„Ayant fait d'une manière quelconque $p=t^2-2u^2$, ± 2 sera ou „ne sera pas résidu biquadratique par rapport à p, selon que t est de „l'une des formes $8n+1$, $8n+3$, ou de l'une de celles-ci $8n+5$, $8n+7$."

Nous ne nous arrêterons pas à démontrer ce théorème que l'on peut établir d'une manière directe et par des considérations analogues à celles sur lesquelles est fondée la démonstration du premier des deux théorèmes précédens. On peut aussi le déduire de chacun des précédens à peu près comme on vient de passer du premier au second.

§. 3.

Nous allons maintenant passer à des considerations plus générales. Soit b un nombre premier $4n+3$, p un nombre premier $4n+1$ susceptible d'être mis sous la forme t^2-bu^2, et proposons nous de décider si $-b$ est ou n'est pas résidu biquadratique par rapport à p. Il est facile de voir que, si p peut être mis sous la forme t^2-bu^2, on peut toujours le faire de manière que u soit pair, et parconséquent t impair *). Faisons donc $p=t^2-bu^2$, et posons $u=2^\nu kk'k''\ldots$, k, k', k'', ... étant les facteurs impairs simples de u. On conclut immédiatement de l'équation précédente,

$$\left(\frac{p}{k}\right)=1,\quad \left(\frac{p}{k'}\right)=1,\quad \left(\frac{p}{k''}\right)=1,\quad \text{etc.}$$

---

*) Pour prouver que cela est toujours possible, nous allons faire voir que, si l'on a $t^2-bu^2=p$, t étant pair, il est facile de déduire des valeurs de t et de u, d'autres nombres t' (impair) et u' qui satisfassent également à l'équation $t'^2-bu'^2=p$. Soient r et s les moindres nombres tels que $r^2-bs^2=1$, je dis que r sera pair. En effet, on sait que, si b désigne un nombre premier $4n+3$, l'équation $\varrho^2-b\sigma^2=\pm 2$ est toujours possible, et que, si l'on suppose que ϱ et σ sont les plus petits nombres qui y satisfassent, on a $r=b\sigma^2\pm 1$, $s=\varrho\sigma$ (*Théorie des Nombres*, no. 44. 45.). Il suit de là et de ce que les nombres ϱ et σ sont évidemment impairs l'un et l'autre, que r est un nombre pair. Cela posé, si l'on multiplie entre elles les équations $r^2-bs^2=1$, $t^2-bu^2=p$, il viendra $(rt\pm bsu)^2-b(ru\pm st)^2=p$, et l'on verra facilement que $rt\pm bsu$ est un nombre impair.

L'application de la loi de réciprocité donne ensuite, p étant de la forme $4n+1$,

$$\left(\frac{k}{p}\right) = 1, \quad \left(\frac{k'}{p}\right) = 1, \quad \left(\frac{k''}{p}\right) = 1, \text{ etc.}$$

Multipliant entre elles toutes ces expressions et l'expression identique $\left(\frac{2^\nu}{p}\right) = \left(\frac{2^\nu}{p}\right)$, on aura ce résultat

$$(\alpha) \quad \left(\frac{u}{p}\right) = \left(\frac{2^\nu}{p}\right).$$

Décomposons actuellement le nombre impair t en ses facteurs simples et partageons ces facteurs en deux classes. Ceux de la première classe seront désignés par $g, g', g'', \ldots$, et sont tels que

$$(\beta) \quad \left(\frac{-b}{g}\right) = 1, \quad \left(\frac{-b}{g'}\right) = 1, \quad \left(\frac{-b}{g''}\right) = 1, \text{ etc.}$$

Quant à ceux qui forment la seconde classe et que nous désignerons par $h, h', h'', \ldots$, ils sont tels que

$$(\beta') \quad \left(\frac{-b}{h}\right) = -1, \quad \left(\frac{-b}{h'}\right) = -1, \quad \left(\frac{-b}{h''}\right) = -1, \text{ etc.}$$

Le produit de tous ces nombres est égal à t, c'est à dire que

$$t = g g' g'' \ldots \times h h' h'' \ldots$$

L'inspection de l'équation $t^2 - bu^2 = p$ donne ces résultats:

$$\left(\frac{-bp}{g}\right) = 1, \quad \left(\frac{-bp}{g'}\right) = 1, \quad \left(\frac{-bp}{g''}\right) = 1, \text{ etc.}$$

$$\left(\frac{-bp}{h}\right) = 1, \quad \left(\frac{-bp}{h'}\right) = 1, \quad \left(\frac{-bp}{h''}\right) = 1, \text{ etc.}$$

La comparaison de ces expressions avec les précédentes donnera ensuite

$$\left(\frac{p}{g}\right) = 1, \quad \left(\frac{p}{g'}\right) = 1, \quad \left(\frac{p}{g''}\right) = 1, \text{ etc.}$$

$$\left(\frac{p}{h}\right) = -1, \quad \left(\frac{p}{h'}\right) = -1, \quad \left(\frac{p}{h''}\right) = -1, \text{ etc.}$$

Appliquant maintenant la loi de réciprocité, il viendra,

$$\left(\frac{g}{p}\right) = 1, \quad \left(\frac{g'}{p}\right) = 1, \quad \left(\frac{g''}{p}\right) = 1, \text{ etc.}$$

$$\left(\frac{h}{p}\right) = -1, \quad \left(\frac{h'}{p}\right) = -1, \quad \left(\frac{h''}{p}\right) = -1, \text{ etc.}$$

Multipliant ces expressions entre elles, on aura

$$\left(\frac{g g' g'' \ldots \times h h' h''}{p}\right) = \left(\frac{t}{p}\right) = \pm 1,$$

le signe supérieur ou inférieur ayant lieu, selon que les nombres $h, h', h'', \ldots$ sont en nombre pair ou impair. D'un autre coté, si l'on ap-

plique la loi de réciprocité aux expressions (β) et (β'), il viendra, b étant de la forme $4n+3$,

$$\left(\frac{g}{b}\right)=1, \quad \left(\frac{g'}{b}\right)=1, \quad \left(\frac{g''}{b}\right)=1, \text{ etc.}$$

$$\left(\frac{h}{b}\right)=-1, \quad \left(\frac{h'}{b}\right)=-1, \quad \left(\frac{h''}{b}\right)=-1, \text{ etc.}$$

expressions qui, étant multipliées entre elles, donneront ce resultat:

$$\left(\frac{g\,g'\,g''\ldots.\times h\,h'\,h''}{b}\right)=\left(\frac{t}{b}\right)=\pm 1,$$

où il faut prendre le signe supérieur ou inférieur, selon que les nombres h, h', h'', ... sont en nombre pair ou impair.

La comparaison de ce résultat avec celui que nous avons obtenu, il n'y a qu'un instant, fait voir qu'on a toujours

$$(\gamma) \quad \left(\frac{t}{p}\right)=\left(\frac{t}{b}\right).$$

Reprenons maintenant l'équation $p=t^2-bu^2$, et mettons la sous la forme d'une congruence

$$t^2 \equiv bu^2 \pmod{p}.$$

On tire de là, en élevant les deux nombres à la puissance $\frac{p-1}{4}$,

$$t^{\frac{p-1}{2}} \equiv b^{\frac{p-1}{4}} u^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}.$$

La formule (α), qui est celle-ci $\left(\frac{u}{p}\right)=\left(\frac{2^\nu}{p}\right)$, 2^ν désignant la puissance la plus elevée qui divise u, peut être présentée d'une autre manière. Il faut pour cela distinguer deux cas, selon que p est de la forme $8n+1$ ou de celle-ci $8n+5$. Si p est un nombre premier $8n+1$, on a, comme on soit, $\left(\frac{2}{p}\right)=1$, et parconséquent $\left(\frac{2^\nu}{p}\right)=1$; la formule dont il s'agit se change donc dans ce cas en celle-ci $\left(\frac{u}{p}\right)=1$. Si p est un nombre premier $8n+5$, le nombre ν est $=1$; car si ν etait plus grand que l'unité, u^2 serait divisible par 8, et $p=t^2-bu^2$ serait de la forme $8n+1$. Comme d'ailleurs dans ce cas $\left(\frac{2}{p}\right)=-1$, la formule ($\alpha$) se changera en celle-ci $\left(\frac{u}{p}\right)=-1$. Les deux cas que nous venons d'examiner sont compris dans la formule $\left(\frac{u}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{4}}$, qui équivaut à cette congruence $u^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{4}} \pmod{p}$. En substituant la valeur qu'elle

donne pour $u^{\frac{p-1}{2}}$ dans la congruence obtenue plus haut, on aura

$$t^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-b)^{\frac{p-1}{4}} \pmod{p},$$

résultat qui montre que $-b$ sera ou ne sera pas résidu biquadratique par rapport à p, selon que t est ou n'est pas résidu quadratique par rapport à p. Si l'on compare maintenant ce résultat avec celui qui est contenu dans la formule (γ), on arrivera au théorème que nous allons énoncer.

„Désignons par b un nombre premier $4n+3$, et par p un nombre „premier $4n+1$, susceptible d'être mis sous la forme $t^2 - bu^2$. Ayant „fait $p = t^2 - bu^2$ (où t est supposé impair), je dis que $-b$ sera ou ne „sera pas résidu biquadratique par rapport à p, selon que t est ou n'est „pas résidu quadratique par rapport à b."

4.

Nous allons maintenant déduire de ce théorème un autre théorème, au moyen duquel on peut décider plus promptement encore, si $-b$ est on n'est pas résidu biquadratique par rapport à p. Conservons les notations précédentes et faisons $p = \varphi^2 + \psi^2$ (où ψ est supposé pair). En égalant cette valeur de p à celle que nous avons considérée précédemment, on aura:

$$p = t^2 - bu^2 = \varphi^2 + \psi^2,$$

et en transposant

$$t^2 - \psi^2 = (t+\psi)(t-\psi) = \varphi^2 + bu^2.$$

Il y a maintenant deux cas à distinguer, selon que φ est ou n'est pas divisible par b. Nous commençons par l'examen du dernier de ces deux cas. Soit m le plus grand diviseur commun de φ et u, qui sera impair (φ étant impair) et non-divisible par b, et posons $\varphi = m\varphi'$, $u = mu'$. La substitution de ces valeurs dans la dernière équation, la changera en celle-ci:

$$(t+\psi)(t-\psi) = m^2(\varphi'^2 + bu'^2).$$

Il est évident, par cette équation, que $t+\psi$ est composé de deux facteurs E et K dont le premier divise m^2, le second $\varphi'^2 + bu'^2$, et qu'il en est de même du nombre $t-\psi$. Désignant les facteurs de ce dernier par F et L, nous aurons ces équations:

$$t+\psi = EK, \quad t-\psi = FL,$$
$$m^2 = EF, \qquad \varphi'^2 + bu'^2 = KL.$$

Il est très facile de s'assurer que les nombres E et F sont premiers entre eux. En effet, soit δ un facteur simple quelconque de E (qui sera nécessairement impair, E étant lui même impair) et supposons que δ divise aussi F. L'inspection des équations précédentes fait voir que δ serait, dans cette supposition, diviseur commun de $t+\psi$ et $t-\psi$ et diviserait parconséquent le nombre t, qui est la demi-somme des précédens. Mais on voit d'un autre coté que δ, comme diviseur premier de E, divise m^2, et parconséquent m et u (u étant $= mu'$). Les nombres t et u auroient donc, dans cette supposition, le facteur commun δ, ce qui est absurde, $p = t^2 - bu^2$ étant un nombre premier. Il est donc prouvé que E et F ne sauroient avoir de diviseur commun, et comme le produit de ces nombres est un quarré, il faut que chacun d'eux en soit pareillement un. On a donc

$$\left(\frac{E}{b}\right) = 1, \quad \left(\frac{F}{b}\right) = 1.$$

Quant aux nombres K et L, ils sont pareillement tels qu'on a

$$\left(\frac{K}{b}\right) = 1, \quad \left(\frac{L}{b}\right) = 1.$$

En effet, on voit par la dernière équation que ces nombres divisent l'un et l'autre la formule $\varphi'^2 + bu'^2$ (où φ' et bu' sont premiers entre eux) et l'on soit par un théorème connu qui se déduit facilement de la loi de réciprocité (*Théorie des nombres*, no. 197.) que tout diviseur impair R d'une pareille formule est tel que $\left(\frac{R}{b}\right) = 1$. Multipliant la première des dernières expressions par la troisième, la seconde par la quatrième, il viendra

$$\left(\frac{EK}{b}\right) = 1, \quad \left(\frac{FL}{b}\right) = 1,$$

ou ce qui est la mème chose,

$$(\delta) \quad \left(\frac{t+\psi}{b}\right) = 1, \quad \left(\frac{t-\psi}{b}\right) = 1.$$

En examinant d'une manière semblable le cas de φ divisible par b, on trouvera que, dans ce cas, l'un des nombres $t+\psi$ et $t-\psi$ est divisible par b, et que l'autre est, comme dans le cas dont nous venons de nous occuper, résidu quadratique par rapport à b, de sorte qu'en désignant par $t \pm \psi$ celui de ces nombres qui est divisible par b, on a

$$(\delta') \quad t \pm \psi \equiv 0 \pmod{b}, \quad \left(\frac{t \mp \psi}{b}\right) = 1.$$

Il résulte du théorème énoncé, à la fin du paragraphe précédent, que, pour décider si $-b$ est ou n'est pas résidu biquadratique par rapport à p, tout se réduit à la question de savoir si t est ou n'est pas résidu quadratique par rapport à b. Nous pouvons maintenant faire voir, au moyen des résultats que nous venons d'obtenir, que cette dernière question peut être décidée sans connoitre t, c'est à dire sans qu'il soit nécessaire de mettre p sous la forme $t^2 - bu^2$. Supposons d'abord φ non-divisible par b. Les expressions (δ), qui ont lieu dans ce cas, peuvent être présentées de cette manière, en observant que b est un nombre premier $4n+3$:

$$\left(\frac{\psi+t}{b}\right) = 1, \quad \left(\frac{\psi-t}{b}\right) = -1.$$

On tire immédiatement de l'équation $p = t^2 - bu^2$, $t^2 \equiv p \pmod{b}$, résultat qui fait voir qu'en résolvant la congruence $\chi^2 \equiv p \pmod{b}$, et désignant par χ l'une de ces racines prise au hasard, on aura $t \equiv \chi$, ou $t \equiv -\chi \pmod{b}$. Dans le premier cas, on a

$$\left(\frac{t}{b}\right) = \left(\frac{\chi}{b}\right), \quad \left(\frac{\chi+\psi}{b}\right) = 1,$$

car il est évident que les expressions $\left(\frac{t}{b}\right)$ et $\left(\frac{t+\psi}{b}\right)$ ne changent pas en mettant à la place de t un autre nombre χ qui ne diffère de t que par un multiple de b. En multipliant les dernières expressions entre elles, il viendra

$$\left(\frac{t}{b}\right) = \left(\frac{\chi\cdot\chi+\psi}{b}\right).$$

Considérons maintenant l'autre cas dans lequel $t \equiv -\chi \pmod{b}$. On aura dans ce cas

$$\left(\frac{t}{b}\right) = -\left(\frac{\chi}{b}\right), \quad \left(\frac{\psi+\chi}{b}\right) = -1,$$

la dernière de ces expressions résultant de la formule $\left(\frac{\psi-t}{b}\right) = -1$, en mettant à la place de $-t$ le nombre χ qui n'en diffère que par un multiple de b. En multipliant les expressions précédentes entre elles, on trouvera, comme dans l'autre cas,

$$\left(\frac{t}{b}\right) = \left(\frac{\chi\cdot\chi+\psi}{b}\right).$$

Nous sommes donc arrivés à ce résultat remarquable. Si φ n'est pas divisible par b, on pourra décider très simplement si l'on a

$$\left(\frac{t}{b}\right) = 1 \text{ ou } \left(\frac{t}{b}\right) = -1.$$

Il suffira de chercher un nombre qui satisfasse à la congruence $\chi^2 \equiv p \pmod{b}$; ayant trouvé un pareil nombre χ, on aura toujours

$$\left(\frac{t}{b}\right) = \left(\frac{\chi \cdot \chi + \psi}{b}\right).$$

Venons maintenant au cas où φ est divisible par b. Les expressions (δ') qui ont lieu dans ce cas sont

$$t \pm \psi \equiv 0 \pmod{b}, \quad \left(\frac{t \mp \psi}{b}\right) = 1.$$

On peut dans la dernière de ces expressions ajouter à $t \mp \psi$ un multiple quelconque de b. Si l'on y ajoute le nombre $t \pm \psi$ qui en vertu de la première est divisible par b, il viendra $\left(\frac{2t}{b}\right) = 1$, résultat qui entraine cet autre $\left(\frac{t}{b}\right) = \left(\frac{2}{b}\right)$.

En combinant ce résultat avec un théorème connu, on verra que dans le cas de φ divisible par b, on a $\left(\frac{t}{b}\right) = 1$ ou $\left(\frac{t}{b}\right) = -1$, selon que t est de la forme $8n+7$ ou de celle-ci $8n+3$.

En comparant ce qui vient d'être prouvé au théorème établi à la fin du dernier paragraphe, on verra qu'on peut décider, independamment de la connaissance du nombre t, si $-b$ est ou n'est pas résidu biquadratique par rapport à p. Le résultat auquel on parvient ainsi ne contenant plus aucune trace du nombre t, on est porté à croire qu'il ne suppose pas la possibilité de l'équation $t^2 - bu^2 = p$, d'où le nombre t tire son origine, et qu'il est géneralement vrai pour toutes les valeurs de b et p, telles que $\left(\frac{b}{p}\right) = 1$. C'est en effet ce qui a lieu, comme on peut le prouver, en examinant, au lieu de l'équation $t^2 - bu^2 = p$, l'équation plus générale $t^2 \pm Mu^2 = p$, où M désigne le produit d'un nombre quelconque de nombres premiers différens, et en combinant ensuite les résultats de cet examen avec le théorème suivant, de la verité duquel on ne saurait douter, mais dont la démonstration rigoureuse ne laisse pas que de présenter des difficultés:

„c désignant un nombre premier quelconque et p un nombre pre-
„mier $4n+1$, tel que $\left(\frac{c}{p}\right) = 1$, on pourra toujours déterminer un nom-
„bre δ, composé de facteurs simples tous moindres que c et tel que l'é-
„quation $t^2 \pm c\delta u^2 = p$, soit résoluble."

Quoi qu'il en soit, on peut remarquer que le théorème que nous allons énoncer est rigoureusement prouvé, par ce qui précède, pour toutes les valeurs de b, telles que la formule $t^2 - bu^2$ n'a que le seul diviseur quadratique $\pm(t^2 - bu^2)$. En jettant les yeux sur la première des tables ajoutées à la *Théorie des Nombres*, on voit que tous les nombres premiers $4n+3$, moindres que 136 (limite de la table) se trouvent dans ce cas, en exceptant le seul nombre 79. Il seroit facile en suivant la marche que nous venons d'indiquer, de prouver la verité du théorème pour cette valeur ou pour toute autre valeur particulière de b, quelque soit p; mais pour l'établir dans toute sa généralité, il faut d'abord prouver, comme nous l'avons déjà dit, qu'on peut toujours satisfaire à la condition que nous avons enoncée, il n'y a qu'un instant.

Théorème I.

„b désignant un nombre premier $4n+3$, et p un nombre pre„mier $4n+1$ tel que $\left(\frac{b}{p}\right) = 1$, si l'on fait $p = \varphi^2 + \psi^2$ (où ψ est sup„posé pair) on aura cette règle, pour décider si $-b$ est ou n'est pas „résidu biquadratique par rapport à p. Si φ est divisible par b, $-b$ „sera ou ne sera pas résidu biquadratique, selon que b est de la forme „$8n+7$ ou de celle-ci $8n+3$. Si φ n'est pas divisible par b, on cher„chera un nombre χ tel qu'on ait $\chi^2 \equiv p \pmod{b}$. Cela posé, $-b$ sera „ou ne sera pas résidu biquadratique par rapport à p, selon que l'on a „$\left(\frac{\chi\cdot\chi+\psi}{b}\right) = 1$ ou $\left(\frac{\chi\cdot\chi+\psi}{b}\right) = -1$."

En faisant successivement $b=3$, $b=7$ etc., on obtiendra les théorèmes particuliers suivans qui sont analogues au second des theorèmes de M. Gaufs et que l'on doit regarder comme rigoureusement prouvés par les considérations que nous avons exposées dans ce paragraphe et dans le précédent.

„p désignant un nombre premier $12n+1$, si l'on fait $p = \varphi^2 + \psi^2$ „(où ψ est supposé pair) l'un des nombres φ et ψ sera nécessairement „divisible par 3. Cela posé, je dis que -3 sera ou ne sera pas résidu „biquadratique par rapport à p, selon que c'est ψ ou φ qui est divisible „par 3."

„p désignant un nombre premier de l'une de ces formes $28n+1$, „$28n+9$, $28n+25$, si l'on fait $p = \varphi^2 + \psi^2$, je dis que -7 sera résidu „bi-

„biquadratique par rapport à p, si l'un des nombres φ et ψ est divisible „par 7, et que -7 sera non-résidu biquadratique par rapport à p, si „ni l'un ni l'autre de ces nombres n'est divisible par 7."

etc.

5.

Désignons par a un nombre premier $4n+1$, et par p un nombre premier également $4n+1$, et de plus susceptible d'être mis sous la forme $t^2 - au^2$. Nous pouvons donc faire $p = t^2 - au^2$ où le nombre t, comme il est facile de le voir, est nécessairement impair. On trouvera, comme dans le paragraphe 3., que, si l'on désigne par 2^ν la puissance la plus élevée de 2, on a $\left(\frac{u}{p}\right) = \left(\frac{2^\nu}{p}\right)$, expression que l'on changera ensuite, comme à l'endroit cité, en celle-ci: $\left(\frac{u}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{4}}$.

Décomposons actuellement le nombre impair t en ses facteurs simples, en posant $t = g g' g'' \ldots \times h h' h'' \ldots$, où les nombres premiers g, g', g'', etc., h, h', h'', etc. sont tels que

$$(\varepsilon) \quad \begin{cases} \left(\frac{-a}{g}\right) = 1, & \left(\frac{-a}{g'}\right) = 1, & \left(\frac{-a}{g''}\right) = 1, \text{ etc.} \\ \left(\frac{-a}{h}\right) = -1, & \left(\frac{-a}{h'}\right) = -1, & \left(\frac{-a}{h''}\right) = -1, \text{ etc.} \end{cases}$$

L'équation $t^2 - au^2 = p$ donne immédiatement

$$\left(\frac{-ap}{g}\right) = 1, \quad \left(\frac{-ap}{g'}\right) = 1, \quad \left(\frac{-ap}{g''}\right) = 1, \text{ etc.}$$

$$\left(\frac{-ap}{h}\right) = 1, \quad \left(\frac{-ap}{h'}\right) = 1, \quad \left(\frac{-ap}{h''}\right) = 1, \text{ etc.}$$

Comparant ces expressions aux précedentes il viendra:

$$\left(\frac{p}{g}\right) = 1, \quad \left(\frac{p}{g'}\right) = 1, \quad \left(\frac{p}{g''}\right) = 1, \text{ etc.}$$

$$\left(\frac{p}{h}\right) = -1, \quad \left(\frac{p}{h'}\right) = -1, \quad \left(\frac{p}{h''}\right) = -1, \text{ etc.}$$

L'application de la loi de réciprocité donnera ensuite, p étant de la forme $4n+1$:

$$\left(\frac{g}{p}\right) = 1, \quad \left(\frac{g'}{p}\right) = 1, \quad \left(\frac{g''}{p}\right) = 1, \text{ etc.}$$

$$\left(\frac{h}{p}\right) = -1, \quad \left(\frac{h'}{p}\right) = -1, \quad \left(\frac{h''}{p}\right) = -1, \text{ etc.}$$

d'où l'on conclut en multipliant:

$$\left(\frac{g g' g'' \ldots \times h h' h'' \ldots}{p}\right) = \left(\frac{t}{p}\right) = \pm 1,$$

le signe supérieur ou inférieur ayant lieu selon que les nombres premiers $h, h', h'', \ldots$ sont en nombre pair ou impair. On peut énoncer ce résultat d'une manière un peu différente, en disant que $\left(\frac{t}{p}\right)$ est égal au produit des seconds membres des expressions (ε).

On peut, dans les expressions (ε), changer partout $-a$ en a, pourvu qu'en même temps on change le signe des seconds membres de celles de ces expressions où il se trouve un nombre premier $(g, g', g'', \ldots \times h, h' h'', \ldots)$ de la forme $4n+3$. On aura ainsi

$$(\zeta)\quad \begin{cases} \left(\frac{a}{g}\right) = \pm 1, \quad \left(\frac{a}{g'}\right) = \pm 1, \quad \left(\frac{a}{g''}\right) = \pm 1, \quad \text{etc.} \\ \left(\frac{a}{h}\right) = \pm 1, \quad \left(\frac{a}{h'}\right) = \pm 1, \quad \left(\frac{a}{h''}\right) = \pm 1, \quad \text{etc.} \end{cases}$$

En comparant le second membre de chacune de ces expressions avec le second membre de l'expression correspondante du tableau (ε), on trouvera autant de changemens de signe qu'il y a de nombres premiers $4n+3$ parmi les nombres $g, g', g'', \ldots, h, h', h'', \ldots$

Le nombre des changemens sera donc pair, lorsque parmi les nombres $g, g', g'', \ldots, h, h', h'', \ldots$ il s'en trouve un nombre pair de la forme $4n+3$. Dans ce cas qui aura lieu toutes les fois que $t = g g' g'' \ldots \times h h' h'' \ldots$ est de la forme $4n+1$, le produit des seconds nombres des expression (ζ) sera donc le même que le produit des seconds nombres des expressions (ε).

D'un autre coté, on peut, en vertu de la loi de reciprocité, renverser les premiers nombres des expressions (ζ), sans qu'il soit nécessaire de changer le signe d'aucun des seconds nombres de ces expressions. Le produit de toutes ces expressions renversées, c'est à dire $\left(\frac{g g' g'' \ldots \times h h' h'' \ldots}{a}\right)$ ou $\left(\frac{t}{a}\right)$, est donc égal au produit des seconds membres des expressions (ζ) et par conséquent aussi, d'après ce qu'on a vu précédemment, égal au produit des seconds membres des expressions (ε). Or, ayant prouvé plus haut que ce dernier produit est égal à $\left(\frac{t}{p}\right)$, on a $\left(\frac{t}{p}\right) = \left(\frac{t}{a}\right)$.

Ce résultat est rélatif au cas où t est de la forme $4n+1$; si l'on examine d'une manière semblable le cas de $t = 4n+3$, on trouvera qu'on a, dans ce cas, $\left(\frac{t}{p}\right) = -\left(\frac{t}{a}\right)$.

Ces deux cas sont compris dans la formule suivante à laquelle nous réunissons un résultat obtenu plus haut:

$$(\eta)\quad \left(\frac{t}{p}\right) = (-1)^{\frac{t-1}{2}}\left(\frac{t}{a}\right),\ \left(\frac{u}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{4}}.$$

L'équation $t^2 - au^2 = p$, donne successivement

$$t^2 \equiv au^2,\quad t^{\frac{p-1}{2}} \equiv a^{\frac{p-1}{4}} u^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p},$$

d'où l'on voit que a sera ou ne sera pas résidu biquadratique relativement à p, selon que l'on a $\left(\frac{t}{p}\right) = \left(\frac{u}{p}\right)$ ou $\left(\frac{t}{p}\right) = -\left(\frac{u}{p}\right)$. En mettant à la place de $\left(\frac{t}{p}\right)$ et $\left(\frac{u}{p}\right)$ les valeurs données par les expressions (η), on pourra remplacer les conditions précédentes par celles qui suivent:

„a sera ou ne sera pas résidu biquadratique par rapport à p, se-
„lon que l'on a

$$(\theta)\quad \text{„}\left(\frac{t}{a}\right) = (-1)^{\frac{t-1}{2}+\frac{p-1}{4}} \text{ ou } \left(\frac{t}{a}\right) = -(-1)^{\frac{t-1}{2}+\frac{p-1}{4}}\text{„}$$

résultat que nous ne nous arrêterons pas à énoncer.

Posons maintenant $p = \varphi^2 + \psi^2$ (où ψ est supposé pair) et égalons cette veleur de p à celle que nous avons considerée précédemment. Nous aurons ainsi $p = t^2 - au^2 = \varphi^2 + \psi^2$ d'où l'on conclut en transposant,

$$t^2 - \psi^2 = (t+\psi)(t-\psi) = \varphi^2 + au^2.$$

Il y a maintenant deux cas à distinguer, selon que φ est ou n'est pas divisible par a. Commençons par celui où φ n'est pas divisible par a. Soit m le plus grand diviseur commun de φ et de u, qui sera nécessairement impair et non divisible par a, et faisons $\varphi = m\varphi'$, $u = mu'$, valeurs dont la substitution dans l'équation obtenue plus haut la change en celle-ci

$$(t+\psi)(t-\psi) = m^2(\varphi'^2 + au'^2).$$

Cette équation fait voir que $t+\psi$ est composé de deux facteurs dont l'un divise m^2, l'autre $\varphi'^2 + au'^2$, et qu'il en est de même $t-\psi$. Si nous désignons les facteurs de $t+\psi$ par E et K et ceux de $t-\psi$ par F et L, nous aurons

$$t+\psi = EK,\quad t-\psi = FL,$$
$$m^2 = EF,\qquad \varphi'^2 + au'^2 = KL.$$

On s'assurera, comme dans le paragraphe 4., que les nombres E et F sont premiers entre eux. Il suit de là et de l'équation $m^2 = EF$ que cha-

cun de ces nombres est un quarré, de sorte que

$$\left(\frac{E}{a}\right) = 1, \quad \left(\frac{F}{a}\right) = 1.$$

La différence des nombres impairs $t+\psi$ et $t-\psi$ étant 2ψ et parconséquent divisible par 4, on voit que ces deux nombres sont ou l'un et l'autre de la forme $4n+1$, ou l'un et l'autre de la forme $4n+3$. Comme, d'un autre coté, les nombres E et F sont l'un et l'autre de la forme $4n+1$ (ces nombres étant des quarrés impairs), il suit des équations $t+\psi = EK$, $t-\psi = FL$, que les nombres K et L sont ou l'un et l'autre de la forme $4n+1$ ou l'un et l'autre de la forme $4n+3$ et que le premier ou le second de ces cas a lieu, selon que les nombres $t+\psi$ et $t-\psi$ sont l'un et l'autre de la forme $4n+1$, ou l'un et l'autre de la forme $4n+3$. Distinguons maintenant deux cas, selon que p est de la forme $8n+1$ ou de celle-ci $8n+5$. On voit, par l'équation $p^2 = \varphi^2 + \psi^2$, que, dans le premier cas, ψ est divisible par 4, d'où il suit que $t+\psi$ et $t-\psi$ sont, dans ce cas, l'un et l'autre de la forme $4n+1$ ou l'un et l'autre de la forme $4n+3$, selon que t est de la forme $4n+1$, ou de celle-ci $4n+3$. Le contraire a lieu dans le cas de $p = 8n+5$ et les résultats relatifs à ces deux cas peuvent être compris dans cet énoncé.

Les nombres $t+\psi$ et $t-\psi$, et parconséquent aussi les nombres K et L, sont l'un et l'autre de la forme $4n+1$ ou de celle-ci $4n+3$, selon que $(-1)^{\frac{p-1}{4}+\frac{t-1}{2}}$ est égal à 1 ou à -1.

Il résulte de l'équation $\varphi'^2 + au'^2 = KL$ que les nombres K et L sont diviseurs de la formule $\varphi'^2 + au'^2$ (où φ' et au' sont premiers entre eux et où a désigne un nombre premier $4n+1$). Or, on sait que, si R désigne un diviseur impair d'une telle formule, on a

$$\left(\frac{R}{a}\right) = 1, \text{ ou } \left(\frac{R}{a}\right) = -1,$$

selon que R est de la forme $4n+1$ ou de la forme $4n+3$. (*Théorie des Nombres*, no. 196.)

Appliquant ce théorème aux nombres K et L, il viendra,

$$\left(\frac{K}{a}\right) = \left(\frac{L}{a}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{4}+\frac{t-1}{2}},$$

d'où l'on conclura ensuite, en multipliant par les expressions $\left(\frac{E}{a}\right) = 1$, $\left(\frac{F}{a}\right) = 1$, trouvées plus haut:

$$\left(\frac{t+\psi}{a}\right) = \left(\frac{t-\psi}{a}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{4}+\frac{t-1}{2}},$$

ou ce qui revient au même, a étant un nombre premier $4n+1$:

$$\left(\frac{\psi+t}{a}\right) = \left(\frac{\psi-t}{a}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{4}+\frac{t-1}{2}}.$$

Si l'on compare ce qui vient d'être prouvé au résultat (θ), obtenu plus haut, on verra que a est ou n'est pas résidu biquadratique relativement à p, selon que l'on a

$$\left(\frac{\psi+t}{a}\right) = \left(\frac{\psi-t}{a}\right) = \left(\frac{t}{a}\right),$$

ou

$$\left(\frac{\psi+t}{a}\right) = \left(\frac{\psi-t}{a}\right) = -\left(\frac{t}{a}\right).$$

L'équation $p = t^2 - au^2$ fait voir que, si l'on désigne par χ l'une quelconque des deux racines de la congruence $\chi^2 \equiv p \pmod{a}$, on a $t \equiv \chi$ ou $t \equiv -\chi \pmod{a}$. Il suit de là, a étant de la forme $4n+1$, $\left(\frac{t}{a}\right) = \left(\frac{\chi}{a}\right)$. D'un autre coté, comme en vertu de ce qui précède $\left(\frac{\psi+t}{a}\right) = \left(\frac{\psi-t}{a}\right)$ on voit qu'on a toujours

$$\left(\frac{\psi+\chi}{a}\right) = \left(\frac{\psi+t}{a}\right) = \left(\frac{\psi-t}{a}\right).$$

On conclut de là, en ayant égard à ce qui a été dit, il n'y a qu'un instant, que le nombre a sera résidu biquadratique par rapport à p, lorsqu'on a $\left(\frac{\chi+\psi}{a}\right) = \left(\frac{\chi}{a}\right)$ où ce qui est la même chose, lorsque $\left(\frac{\chi\cdot\chi+\psi}{a}\right) = 1$, et que a sera non-résidu biquadratique relativement à p, lorsqu'on a $\left(\frac{\chi+\psi}{a}\right) = -\left(\frac{\chi}{a}\right)$, ou ce qui revient au même, lorsque $\left(\frac{\chi\cdot\chi+\psi}{a}\right) = -1$.

Ce résultat est relatif au cas où φ n'est pas divisible par a. Reste à examiner le cas de φ divisible par a. En traitant ce cas d'une manière semblable, on trouve que, lorsqu'il a lieu, l'un des nombres $t+\psi$, $t-\psi$ (nous le désignerons par $t \pm \psi$) est divisible par a et que l'autre $t \mp \psi$ est, comme dans le premier cas, tel que

$$\left(\frac{t \mp \psi}{a}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{4}+\frac{t-1}{2}},$$

ou ce qui revient au même, en ajoutant à $t \mp \psi$ le nombre $t \pm \psi$, multiple de a,

$$\left(\frac{2t}{a}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{4}+\frac{t-1}{2}}.$$

En comparant ceci à ce qui a été prouvé plus haut (θ), on trouvera que, dans le cas de φ divisible par a, a est ou n'est pas résidu biquadratique relativement à p, selon que l'on a $\left(\frac{2}{a}\right) = 1$, ou $\left(\frac{2}{a}\right) = -1$, ou ce qui est la même chose, d'après un théorème connu, selon que a est de la forme $8n+1$ ou de la forme $8n+5$.

Il en est des résultats que nous venons d'obtenir comme de ceux que nous avons établis dans le paragraphe 4.; ils ont encore lieu quand même p ne pourrait être mis sous la forme $t^2 - au^2$, et supposent uniquement que les nombres premiers $a = 4n+1$, et $p = 4n+1$, soient tels que $\left(\frac{a}{p}\right) = 1$. Pour les démontrer dans cette extension, il suffira de suivre la marche qui a été indiquée vers la fin du paragraphe 4., et de s'appuyer sur la proposition auxiliaire, dont il y est question et à l'enoncé de laquelle on a donné la généralité nécessaire pour qu'elle puisse servir en même temps de base à la démonstration du théorème général à la fin du paragraphe 4. et à celle du théorème que nous allons énoncer. Ces deux théorèmes n'en forment proprement qu'un, et en procédant, comme on l'a dit à l'endroit cité, c'est à dire en appliquant à l'équation $t^2 \pm Mu^2 = p$, où M désigne le produit d'un nombre quelconque de nombres premiers différens, des considérations analogues à celles qu'on a employées dans ce paragraphe et dans les précédens, on démontrera simultanément ces deux théorèmes, ou plutôt on arrivera à un théorème dans l'enoncé duquel ils se trouvent réunis.

Théorème II.

„a désignant un nombre premier $4n+1$, et p un autre nombre „premier $4n+1$, tel que $\left(\frac{a}{p}\right) = 1$, si l'on fait $p = \varphi^2 + \psi^2$ (où ψ est „supposé pair), on pourra décider de la manière suivante, si a est ou „n'est pas résidu biquadratique par rapport à p. Si φ est divisible par „a, a sera ou ne sera pas résidu biquadratique relativement à p, selon „que a est de la forme $8n+1$ ou de celle-ci $8n+5$. Si φ n'est pas „divisible par a, on cherchera un nombre χ tel qu'on ait $\chi^2 \equiv p \pmod{a}$. „Cela posé, a sera ou ne sera pas résidu biquadratique par rapport à p, „selon que l'on a $\left(\frac{\chi \cdot \chi + \psi}{a}\right) = 1$ ou $\left(\frac{\chi \cdot \chi + \psi}{a}\right) = -1$."

En faisant successivement $a=5$, $a=13$, on aura les théorèmes particuliers suivans qu'on doit regarder comme rigoureusement prouvés par ce qui précède, la formule t^2-au^2 n'ayant, pour ces valeurs de a, d'autre diviseur quadratique que celui-ci t^2-au^2, ou en d'autres termes, tout diviseur de t^2-au^2 étant lui même de la forme t^2-au^2.

„p désignant un nombre premier de l'une des formes $20n+1$, „$20n+9$, si l'on fait $p=\varphi^2+\psi^2$ (où ψ est supposé pair) on s'assure „facilement que l'un des nombres φ, ψ est multiple de 5. Cela posé, „je dis que 5 sera ou ne sera pas résidu biquadratique relativement à p, „selon que c'est ψ ou φ qui est divisible par 5."

etc.

En indiquant plus haut une methode qui pourroit servir à établir dans toute leur généralité les théorèmes I. et II., nous avons dit qu'en suivant cette methode on se trouvait dans la nécessité de s'appuyer sur une proposition subsidiaire qu'il paroit assez difficile de démontrer en toute rigueur. En réfléchissant à cet inconvénient, j'ai reconnu qu'il était très facile d'y remédier en modifiant un peu la marche tracée plus haut. Cette modification est extrêmement légère et consiste en ce qu'au lieu de considérer les équations $t^2-bu^2=p$, $t^2-au^2=p$, qui peuvent n'être pas possibles quoiqu'on ait $\left(\frac{b}{p}\right)=1$, $\left(\frac{a}{p}\right)=1$, il faut appliquer des considérations du genre des précédentes aux équations plus générales $t^2-bu^2=ps^2$, $t^2-au^2=ps^2$, (on remplace avec avantage la dernière par celle-ci $t^2+au^2=ps^2$, qui peut être traitée plus simplement), auxquelles on peut toujours satisfaire, lorsque les conditions $\left(\frac{b}{p}\right)=1$, $\left(\frac{a}{p}\right)=1$ ont lieu, comme il résulte du beau théorème que M. Legendre a donné pour juger de la possibilité ou de l'impossibilité de l'équation $\alpha x^2+\beta y^2=\gamma z^2$ (*Théorie des Nombres*, no. 27.).

La démonstration ainsi modifiée, outre qu'elle est entièrement rigoureuse, a encore l'avantage d'une plus grande simplicité, comme tout lecteur qui a bien saisi l'esprit des considérations précédentes pourra en juger, en developpant cette démonstration d'après l'indication qu'on vient d'en donner,

Addition au mémoire précédent.

Quoique l'indication que nous avons donnée à la fin du mémoire précédent sur la marche à suivre pour établir d'une manière entièrement rigoureuse les théorèmes I. et II. de notre mémoire, puisse suffire à tout lecteur familiarisé avec l'analyse indéterminée, nous croyons ne pas faire une chose inutile, en développant, avec détail, dans cette addition, les démonstrations des théorèmes dont il s'agit, ces démonstrations étant susceptibles dêtre beaucoup simplifiées au moyen de quelques considérations qui peuvent ne pas se présenter de suite à l'ésprit. Nous commençons par la démonstration du premier des théorèmes cités.

Désignons par p un nombre premier $4n+1$, par b un nombre premier $4n+3$, tel que $\left(\frac{b}{p}\right)=1$, et considérons l'équation

$$(\alpha') \quad t^2 - bu^2 = ps^2.$$

D'après le théorème déjà cité (*Théorie des Nombres*, no. 27.), les conditions nécessaires pour que cette équation soit possible sont celles-ci: $\left(\frac{b}{p}\right)=1$ et $\left(\frac{p}{b}\right)=1$. Or, de ces conditions la première a lieu par hypothese et quant à la seconde, il suit du théorème connu sous le nom de loi de réciprocité, qu'elle a toujours lieu lorsque la première est satisfaite. L'équation est donc résoluble. Il est évident qu'on peut supposer que les nombres t, u, s, qui lui satisfont, sont premiers entre eux, comparés deux a deux. L'équation étant dans cet état, ces trois nombres seront l'un pair, les deux autres impairs, et on s'assure facilement que s ne saurait être pair. Le nombre s étant impair, les nombres t, u seront l'un pair, l'autre impair et il y aurait deux cas à examiner selon que t est pair ou impair. Mais quoique ces deux cas soient susceptibles d'être traités par la même analyse, il est plus simple de n'en considérer qu'un seul, celui de t impair par exemple, et de montrer que l'autre peut y être facilement ramené. Faisons donc voir qu'il est toujours permis de supposer t impair dans l'équation $t^2 - bu^2 = ps^2$. Si t était pair dans l'équation (α'), on deduirait des nombres t, u, par le moyen indiqué dans la note relative au commencement du paragraphe 3. du mémoire précédent, d'autres nombres t' (impair), u' (pair) tels que, $t'^2 - bu'^2 = ps^2$. Nous pourrons donc considérer t comme impair dans tout ce qui va suivre.

De

Décomposons les nombres t et u en leurs facteurs simples, en faisant

$$t = l\,l'\,l''\ldots., \quad u = 2^{\nu}\,k\,k'\,k''\ldots.$$

l, l', l'', ... et h, h', h'', ... désignant des nombres premiers impairs. La seule inspection de l'équation (α') donne

$$\left(\frac{p}{k}\right) = 1, \quad \left(\frac{p}{k'}\right) = 1, \quad \left(\frac{p}{k''}\right) = 1, \quad \ldots.$$

On aura ensuite, en appliquant la lui de réciprocité, p étant un nombre premier $4n+1$,

$$\left(\frac{k}{p}\right) = 1, \quad \left(\frac{k'}{p}\right) = 1, \quad \left(\frac{k''}{p}\right) = 1, \quad \ldots.$$

Faisant le produit de toutes ces expressions et de la formule identique $\left(\frac{2^{\nu}}{p}\right) = \left(\frac{2^{\nu}}{p}\right)$, il viendra

$$\left(\frac{2^{\nu}\,k\,k'\,k''\ldots.}{p}\right) = \left(\frac{t}{p}\right) = \left(\frac{2^{\nu}}{p}\right).$$

Le nombre p est de l'une des deux formes $8n+1$, $8n+5$. Si p est de la première forme, on a en vertu d'un théorème connu, $\left(\frac{2}{p}\right) = 1$, et parconséquent aussi $\left(\frac{2^{\nu}}{p}\right) = 1$. Donc $\left(\frac{t}{p}\right) = 1$. Si p est de la forme $8n+5$, le nombre u sera impairement pair, de sorte que $\nu = 1$, et comme on a d'un autre coté pour les nombres premiers $p = 8n+5$, $\left(\frac{2}{p}\right) = -1$, il viendra $\left(\frac{u}{p}\right) = -1$. Les deux cas dont il vient d'être question sont compris dans la formule

$$(\beta') \qquad \left(\frac{u}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{4}}.$$

Reprenons l'équation (α') de laquelle nous tirons immédiatement

$$\left(\frac{-b}{l}\right) = \left(\frac{p}{l}\right), \quad \left(\frac{-b}{l'}\right) = \left(\frac{p}{l'}\right), \quad \left(\frac{-b}{l''}\right) = \left(\frac{p}{l''}\right), \quad \ldots.$$

Comme p est un nombre premier $4n+1$, et b un nombre premier $4n+3$, on trouvera en appliquant la loi de réciprocité:

$$\left(\frac{l}{b}\right) = \left(\frac{l}{p}\right), \quad \left(\frac{l'}{b}\right) = \left(\frac{l'}{p}\right), \quad \left(\frac{l''}{b}\right) = \left(\frac{l''}{p}\right), \quad \ldots.$$

La multiplication donnera ensuite

$\left(\frac{l\,l'\,l''\ldots.}{b}\right) = \left(\frac{l\,l'\,l''\ldots.}{p}\right)$, ou ce qui revient au même,

$$(\gamma') \qquad \left(\frac{t}{p}\right) = \left(\frac{t}{b}\right).$$

En mettant l'équation (α') sous la forme d'une congruence, on aura

$$t^2 \equiv b u^2 \pmod{p}.$$

On conclut de là en élevant les deux membres à la puissance $\frac{p-1}{4}$:

$$t^{\frac{p-1}{2}} \equiv b^{\frac{p-1}{4}} u^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p},$$

ou ce qui revient au même, en remplaçant $u^{\frac{p-1}{2}}$ par sa valeur $(-1)^{\frac{p-1}{4}}$, donnée par la formule (β'):

$$t^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-b)^{\frac{p-1}{4}} \pmod{p}.$$

Cette dernière congruence fait voir que $-b$ est ou n'est pas résidu biquadratique relativement à p, selon que l'on a $\left(\frac{t}{p}\right) = 1$, ou $\left(\frac{t}{p}\right) = -1$. Si l'on compare ce résultat à la formule (γ'), on obtiendra cet énoncé

(δ') „$-b$ est ou n'est pas résidu biquadratique par rapport à p, selon que l'on a $\left(\frac{t}{b}\right) = 1$ ou $\left(\frac{t}{b}\right) = -1$."

Décomposons actuellement le nombre premier p en deux quarrés, en posant $p = \varphi^2 + \psi^2$ (où ψ est supposé pair) et mettons cette valeur de p dans l'équation (α'). Il viendra ainsi

$$t^2 - b u^2 = s^2 \varphi^2 + s^2 \psi^2,$$

et l'on aura ensuite en transposant:

$$t^2 - \psi^2 s^2 = (t + \psi s)(t - \psi s) = s^2 \varphi^2 + b u^2.$$

Les nombres s, t, u étant premiers entre eux comparés deux à deux, on voit par l'équation (α') que s ne saurait être divisible par b. Nous distinguerons maintenant deux cas selon que φ est ou n'est pas divisible par b, et nous examinerons d'abord le dernier de ces deux cas. Si nous désignons par m le plus grand diviseur commun de φ et u, m sera impair et non-divisible par b comme φ. Posons $\varphi = m\varphi'$, $u = mu'$ et substituons ces valeurs dans la dernière équation. Il viendra ainsi

$$(t + \psi s)(t - \psi s) = m^2(s^2 \varphi'^2 + b u'^2).$$

Comme $s\varphi'$ et bu' sont premiers entre eux, d'après ce qui précède, il suit d'un théorème connu qui est une conséquence très simple de la loi de réciprocité (*Théorie des Nombres* no. 197), que tout diviseur R du facteur binome du second membre qui est évidemment impair est tel que $\left(\frac{R}{b}\right) = 1$.

La dernière équation fait voir que chacun des nombres $t+\psi s$, $t-\psi s$ est composé de deux facteurs, l'un diviseur de m^2, l'autre diviseur de $s^2\varphi'^2+bu'^2$. Si nous désignons ces 4 facteurs par E, F, K et L, nous aurons ces équations

$$t+\psi s = EK, \quad m^2 = EF,$$
$$t-\psi s = FL, \quad \varphi^2 s'^2 + bu'^2 = KL.$$

Il est facile de s'assurer que les nombres E et F, qui sont impairs l'un et l'autre, comme diviseurs de m^2, sont premiers entre eux. En effet, si ces nombres étaient divisibles l'un et l'autre par un même nombre premier δ, δ diviserait chacun des nombres $t+\psi s$, $t-\psi s$ et par conséquent aussi leur demi-somme et leur demi-différence, c'est à dire, les nombres t et ψs. D'un autre coté, comme δ divise m^2, il divisera aussi le nombre φ, φ étant égal à $m\varphi'$; il suit de là et de ce que $\varphi^2+\psi^2$ est égal au nombre premier p, que ψ n'est pas divisible par b. Il faudrait donc, d'après ce qui précède, que δ fût diviseur commun de t et s, ce qui est impossible, ces nombres étant premiers entre eux. Donc les nombres E et F sont premiers entre eux, et comme leur produit est un quarré, chacun d'eux en sera pareillement un. On a donc

$$\left(\frac{E}{b}\right) = 1, \quad \left(\frac{F}{b}\right) = 1.$$

On a aussi

$$\left(\frac{K}{b}\right) = 1, \quad \left(\frac{L}{b}\right) = 1,$$

K et L étant des diviseurs de $s^2\varphi'^2+bu'^2$. On conclut de là, en multipliant:

$$\left(\frac{EK}{b}\right) = 1, \quad \left(\frac{FL}{b}\right) = 1,$$

ou ce qui est la même chose:

$$\left(\frac{t+\psi s}{b}\right) = 1, \quad \left(\frac{t-\psi s}{b}\right) = 1.$$

Si l'on fait attention que b est un nombre premier $4n+3$, on pourra présenter de cette autre manière la dernière de ces expressions,

$$\left(\frac{\psi s - t}{b}\right) = -1.$$

La dernière étant mise sous cette forme, on voit qu'on peut les comprendre l'une et l'autre dans cette formule

$$(\varepsilon') \qquad \left(\frac{\psi s \pm t}{b}\right) = \pm 1,$$

dans laquelle les signes sont à volonté, mais les mêmes dans les deux membres.

Comme on a $\left(\frac{p}{b}\right) = 1$, la congruence $\chi^2 \equiv p \pmod{b}$ est possible et a, comme l'on sait, deux racines entre les limites $-\frac{1}{2}b$ et $\frac{1}{2}b$. Désignons par χ l'une de ces racines prise au hasard. L'équation (α') donne cette congruence $t^2 \equiv ps^2 \pmod{b}$. Si l'on compare celle-ci à la précédente, on aura $t^2 \equiv \chi^2 s^2 \pmod{b}$. On conclut de là, $\pm t \equiv \chi s \pmod{b}$, le signe étant tantôt positif, tantôt negatif et dépendant du choix que l'on aura fait entre les deux racines de la congruence $\chi^2 \equiv p \pmod{b}$. Les signes étant à volonté dans la formule (ε') on peut supposer qu'ils y sont les mèmes que dans celle-ci $\pm t \equiv \chi s \pmod{b}$. Remplaçant $\pm t$ par le nombre χs qui ne diffère de $\pm t$ que par un multiple de b, il viendra

$$\left(\frac{\psi s + \chi s}{b}\right) = \pm 1.$$

D'un autre coté, si l'on se rappelle que b est de la forme $4n+3$, on tirera de la formule $\pm t \equiv \chi s \pmod{b}$, $\pm\left(\frac{t}{b}\right) = \left(\frac{\chi s}{b}\right)$. Si l'on multiplie cette expression par la précédente, on aura, les signes étant les mêmes dans ces deux formules,

$$\left(\frac{\chi \cdot \chi + \psi}{b}\right)\left(\frac{s^2}{b}\right) = \frac{t}{b}$$

ou ce qui revient au mème:

$$\left(\frac{\chi \cdot \chi + \psi}{b}\right) = \left(\frac{t}{b}\right).$$

Si l'on compare cette formule avec ce qui a été prouvé plus haut (δ'), on obtiendra ce résultat:

(ζ') „$-b$ est ou n'est pas résidu biquadratique par rapport à p, selon que l'on a

$$\text{„}\left(\frac{\chi \cdot \chi + \psi}{b}\right) = 1 \text{ ou } \left(\frac{\chi \cdot \chi + \psi}{b}\right) = -1.\text{“}$$

Ce résultat est relatif au cas où φ n'est pas divisible par b. Examinons maintenant le cas de φ divisible par b. Soient $b^{1+\varkappa}$ et b^h respectivement les puissances les plus elevées de b qui divisent φ et u ($\varkappa$ et h pouvant être nuls), soit de plus m le plus grand diviseur commun de $\frac{\varphi}{b^{1+\varkappa}}$ et $\frac{u}{b^h}$. Si nous faisons $\varphi = b^{1+\varkappa} m \varphi'$, $u = b^h m u'$, les nombres φ' et u', dont le premier est impair, le second pair, seront premiers entre eux, et non-

divisibles par b, et m sera impair et non divisible par b. La substitution des valeurs précédentes donne cette équation

$$(t+\psi s)(t-\psi s) = m^2[b^{2z+2}(s\varphi')^2 + b^{2h+1}u'^2].$$

Il faut maintenant distinguer deux cas selon que l'on a $z \geqq h$ ou $z < h$. Dans ce premier cas, le facteur binome du second membre peut être mis sous cette forme:

$$b^{2h+1}[u'^2 + b(b^{z-h}s\varphi')^2],$$

où il faut remarquer que les nombres u' et $b^{z-h}s\varphi'$ sont premiers entre eux. Dans le cas de $z < h$, on mettra le facteur binome sous la forme suivante:

$$b^{2z+2}[(s\varphi')^2 + b(b^{h-z-1}u')^2],$$

où les nombres $s\varphi'$ et $b^{h-z-1}u'$ sont premiers entre eux. On voit donc que le facteur binome est toujours le produit d'une puissance de b et d'une formule impaire telle que $g^2 + bh^2$, dans laquelle g et bh sont premiers entre eux. Désignant par b^γ la puissance de b dont il s'agit, on pourra donc écrire la dernière équation de cette manière:

$$(t+\psi s)(t-\psi s) = m^2 b^\gamma (g^2 + bh^2).$$

Les nombres $t+\psi s$, $t-\psi s$ ne sauroient être divisibles l'un et l'autre par b, puisqu'alors leur demi-somme qui est t, le seroit aussi, ce qu'on a vu plus haut être impossible. Si l'on désigne par $t \pm \psi s$ celui de ces deux nombres qui est divisible par b, on aura $t \pm \psi s \equiv 0 \pmod{b}$ et je dis que l'autre $t \mp \psi s$ est tel que $\left(\frac{t \mp \psi s}{b}\right) = 1$. En effet $t \mp \psi s$ est composé de deux facteurs E et K dont le premier E divise m^2, le second $g^2 + bh^2$.

Or, on s'assure comme dans le cas de φ non-divisible par b, que E est un quarré, de sorte qu'on a $\left(\frac{E}{b}\right) = 1$. On a aussi $\left(\frac{K}{b}\right) = 1$, K étant diviseur de $g^2 + bh^2$. On conclut de là en multipliant:

$$\left(\frac{EK}{b}\right) = \left(\frac{t \mp \psi}{b}\right) = 1.$$

Il est permis d'augmenter $t \mp \psi$ dans cette formule d'un multiple quelconque de b. Ajoutant le nombre $t \pm \psi$ qu'on a vu être un tel multiple, il viendra $\left(\frac{2t}{b}\right) = 1$, ou ce qui revient au même: $\left(\frac{t}{b}\right) = \left(\frac{2}{b}\right)$, résultat dont la comparaison avec un théorème connu fait voir que dans le cas de φ divisible par b, on a $\left(\frac{t}{b}\right) = 1$ ou $\left(\frac{t}{b}\right) = -1$, selon que b

est de la forme $8n+7$ ou de celle-ci $8n+3$. Si l'on combine ceci avec le résultat obtenu plus haut (δ'), on trouve que, lorsque Φ est multiple de b:

„$-b$ est ou n'est pas résidu biquadratique par rapport à p, selon „que b est de la forme $8n+7$ ou de celle-ci $8n+3$."

En réunissant ce dernier résultat à celui auquel nous sommes parvenus plus haut (ζ'), on aura le théorème I. énoncé à la fin du paragraphe 4. du mémoire précédent, théorème qui se trouve ainsi établi d'une manière très simple et entièrement rigoureuse.

Occupons nous maintenant de la démonstration du théorème II. Désignons, comme dans tout ce qui précède, par a un nombre premier $4n+1$ et par p un autre nombre premier également de la forme $4n+1$ et tel que $\left(\frac{a}{p}\right)=1$. On conclut de là, en appliquant la loi de réciprocité, qu'on a aussi $\left(\frac{p}{a}\right)=1$. Ces conditions ayant lieu, il suit du théorème déjà cité plusieurs fois, que l'équation

$$(\eta') \qquad t^2 + au^2 = ps^2,$$

peut être résolue. Si l'on supposé que les nombres t, u, s, comparés deux à deux, n'ont pas de diviseur commun, s sera pair et les deux autres seront l'un pair, l'autre impair, comme il est très facile de le voir. Il est évident en outre que, si l'équation est dans cet état, u n'est pas divisible par p, s ne l'est pas par a, et t n'est divisible ni par a ni par p.

Décomposons les nombres t et u en leur facteurs simples, en faisant $u=2^\nu k k' k'' \ldots$, $t=2^\mu l l' l'' \ldots$, k, k', $k''\ldots$ et l, l', $l''\ldots$ désignant des nombres premiers impairs, et l'un des nombres μ, ν étant égal a zéro.

L'équation (η') donne d'abord

$$\left(\frac{p}{k}\right)=1,\ \left(\frac{p}{k'}\right)=1,\ \left(\frac{p}{k''}\right)=1,\ \ldots.$$

d'où l'on conclut ensuite en appliquant la loi de réciprocité:

$$\left(\frac{k}{p}\right)=1,\ \left(\frac{k'}{p}\right)=1,\ \left(\frac{k''}{p}\right)=1,\ \ldots.$$

Faisant le produit des équations précédentes et de l'équation identique $\left(\frac{2^\nu}{p}\right)=\left(\frac{2^\nu}{p}\right)$, il viendra

$$\left(\frac{2^\nu k k' k'' \ldots}{p}\right)=\left(\frac{u}{p}\right)=\left(\frac{2^\nu}{p}\right).$$

Il résulte encore de l'équation (η'), qu'on a

$$\left(\frac{a}{l}\right) = \left(\frac{p}{l}\right),\ \left(\frac{a}{l'}\right) = \left(\frac{p}{l'}\right),\ \left(\frac{a}{l''}\right) = \left(\frac{p}{l''}\right), \ldots .$$

Comme les nombres premiers a et p sont l'un et l'autre de la forme $4n+1$, on conclut de là, en vertu de la loi de réciprocité:

$$\left(\frac{l}{a}\right) = \left(\frac{l}{p}\right),\ \left(\frac{l'}{a}\right) = \left(\frac{l'}{p}\right),\ \left(\frac{l''}{a}\right) = \left(\frac{l''}{p}\right), \ldots .$$

Multipliant entre elles toutes ces expressions, il viendra l'équation

$$\left(\frac{ll'l''\ldots}{a}\right) = \left(\frac{ll'l''\ldots}{p}\right),$$

qui se change en celle-ci, si l'on multiplie ses deux membres par $\left(\frac{2^\mu}{a}\right)\left(\frac{2^\mu}{p}\right)$:

$$\left(\frac{t}{a}\right)\left(\frac{2^\mu}{p}\right) = \left(\frac{t}{p}\right)\left(\frac{2^\mu}{p}\right).$$

Distinguons actuellement deux cas, selon que u est pair ou impair. Si u est pair, t est impair; on a donc alors $\mu = 0$, et la dernière expression se réduit à celle-ci:

$$\left(\frac{t}{a}\right) = \left(\frac{t}{p}\right).$$

Quant à la formule $\left(\frac{u}{p}\right) = \left(\frac{2^\nu}{p}\right)$, il est facile de voir qu'elle équivaut, dans ce cas, à celle-ci:

$$\left(\frac{u}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{4}}.$$

Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer, que, si p est de la forme $8n+1$, on a $\left(\frac{2}{p}\right) = 1$, et parconséquent aussi $\left(\frac{2^\nu}{p}\right) = 1$, et que, si p a la forme $8n+5$, ν est égal à l'unité et qu'on a pour tout nombre premier. $p = 8n+5$, $\left(\frac{2}{p}\right) = -1$.

Passons à l'autre cas qui est celui de t pair et u impair. On a, dans ce cas, $\nu = 0$, ce qui reduit la formule $\left(\frac{u}{p}\right) = \left(\frac{2^\nu}{p}\right)$, à $\left(\frac{u}{p}\right) = 1$.

Si les nombres p et a sont l'un et l'autre de la forme $8n+1$, ou l'un et l'autre de la forme $8n+5$, on a $\left(\frac{2}{a}\right) = \left(\frac{2}{p}\right)$ et parconséquent aussi $\left(\frac{2^\mu}{a}\right) = \left(\frac{2^\mu}{p}\right)$, et la formule $\left(\frac{t}{p}\right)\left(\frac{2^\mu}{a}\right) = \left(\frac{t}{a}\right)\left(\frac{2^\mu}{p}\right)$ se change en celle-ci $\left(\frac{t}{p}\right) = \left(\frac{t}{a}\right)$. Si, au contraire, les nombres a, p sont l'un de la forme

$8n+1$, l'autre de la forme $8n+5$, on a $\left(\frac{2}{a}\right) = -\left(\frac{2}{p}\right)$. D'un autre coté, l'inspection de l'équation fait voir que, dans ce cas, le nombre t est impairement pair, de sorte que $\mu = 1$. On a donc alors $\left(\frac{t}{p}\right) = -\left(\frac{t}{a}\right)$. Ces deux résultats sont compris dans la formule

$$\left(\frac{t}{p}\right) = \left(\frac{t}{a}\right)(-1)^{\frac{a-1}{4}+\frac{p-1}{4}}.$$

Si nous réunissons tout ce que nous venons de prouver, nous aurons cet énoncé:

„Si u est pair, l'on a $\left(\frac{t}{p}\right) = \left(\frac{t}{a}\right)$, $\left(\frac{u}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{4}}$; si u est im-
„pair, l'on a $\left(\frac{t}{p}\right) = \left(\frac{t}{a}\right)(-1)^{\frac{p-1}{4}+\frac{a-1}{4}}$, $\left(\frac{u}{p}\right) = 1$."

En comparant ce résultat avec la congruence $t^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-a)^{\frac{p-1}{4}} u^{\frac{p-1}{2}}$ (mod. p), qui se déduit immédiatement de l'équation (η'), on trouvera ce résultat:

(ϑ') „Si u est pair, a est ou n'est pas résidu biquadratique par rapport „à p, selon que l'on a „$\left(\frac{t}{a}\right) = 1$ ou $\left(\frac{t}{a}\right) = -1$, „et si u est impair, a est ou n'est pas résidu biquadratique re- „lativement à p, selon que l'on a „$\left(\frac{t}{a}\right) = (-1)^{\frac{a-1}{4}}$ ou $\left(\frac{t}{a}\right) = -(-1)^{\frac{a-1}{4}}$."

Décomposons p en deux quarrés, en posant $p = \varphi^2 + \psi^2$ (ψ étant supposé pair). La substitution de cette valeur dans l'équation (η') donnera

$$(t+\psi s)(t-\psi s) = \varphi^2 s^2 - a u^2.$$

Nous distinguerons maintenant deux cas selon que φ est ou n'est pas divisible par a. Premier cas: φ n'est pas divisible par a. Comme φ est impair et non-divisible par a, le plus grand diviseur commun de φ et de u, que nous désignerons par m, sera aussi impair et non-divisible par a. Si nous faisons $\varphi = m\varphi'$, $u = mu'$, l'équation précédente se changera en celle-ci:

$$(t+\psi s)(t-\psi s) = m^2(\varphi'^2 s^2 - a u'^2);$$

s est premier à au et parconséquent aussi à au', φ' est également premier à au'; donc $\varphi' s$ et au' n'ont pas de diviseur commun. Cela étant ainsi, il suit d'un théorème connu (*Théorie des Nombres* no. 197.) que tout diviseur impair de $s^2\varphi'^2 + a u'^2$ est tel qu'on a $\left(\frac{R}{a}\right) = 1$.

Dé-

Désignant par E, K, F et L quatre indéterminées, nous pourrons remplacer la dernière équation par celles que je vais écrire

$$t + \psi s = EK, \quad m^2 = EF,$$
$$t - \psi s = FL, \quad KL = (s\varphi')^2 - a u'^2.$$

On s'assure facilement que les nombres impairs E et F sont premiers entre eux. Il suit de là que chacun d'eux est un quarré, de sorte qu'on a

$$\left(\frac{E}{a}\right) = 1, \quad \left(\frac{F}{a}\right) = 1.$$

Il faut maintenant considérer successivement le cas de u pair et celui de u impair. Si u est pair, $u' = \frac{u}{m}$ le sera pareillement, et comme $s\varphi'$ est toujours impair, $(s\varphi')^2 - a u'^2$ sera également impair. Les nombres K et L seront donc dans ce cas impairs l'un et l'autre et comme ils divisent le binome précédent, on aura

$$\left(\frac{K}{a}\right) = 1, \quad \left(\frac{L}{a}\right) = 1.$$

Multipliant ces expressions par celles que nous venons d'écrire, il viendra

$$\left(\frac{KE}{a}\right) = \left(\frac{t+\psi s}{a}\right) = 1, \quad \left(\frac{LF}{a}\right) = \left(\frac{t-\psi s}{a}\right) = 1.$$

Comme a est un nombre premier $4n+1$, il est permis d'écrire la formule $\left(\frac{t-\psi s}{a}\right) = 1$ de cette autre manière: $\left(\frac{\psi s - t}{a}\right) = 1$. On a donc, dans le cas de u pair, $\left(\frac{\psi s \pm t}{a}\right) = 1$, le double signe étant à volonté.

Passons au cas où u est impair. Le nombre $u' = \frac{u}{m}$ sera également impair dans ce cas, et comme les quarrés impairs $(s\varphi')^2$, u'^2, sont de la forme $8n+1$, on voit que le binome $(s\varphi')^2 - a u'^2$ sera de la forme $8n$ ou de la forme $8n+4$, selon que a est de la forme $8n+1$ ou de celle-ci $8n+5$. Il est facile de s'assurer que, si a est de la forme $8n+1$, on a $\left(\frac{K}{a}\right) = 1$, $\left(\frac{L}{a}\right) = 1$. En effet, si l'on fait $K = 2^\beta K'$, 2^β étant la puissance la plus élevée de 2 qui divise K, K' sera un diviseur impair de $(s\varphi')^2 - a u'^2$ et l'on aura $\left(\frac{K'}{a}\right) = 1$. D'un autre coté, on sait, par un théorème connu, que tout nombre premier $a = 8n+1$, est tel que $\left(\frac{2}{a}\right) = 1$. On conclut de là $\left(\frac{2^\beta}{a}\right) = 1$, et multipliant ensuite par $\left(\frac{K'}{a}\right) = 1$, il viendra $\left(\frac{K}{a}\right) = 1$. On prouve d'une manière toute semblable

qu'on a aussi $\left(\frac{L}{a}\right) = 1$. Multipliant ces formules par les expressions $\left(\frac{E}{a}\right) = 1$, $\left(\frac{F}{a}\right) = 1$, obtenues plus haut, il viendra

$$\left(\frac{EK}{a}\right) = \left(\frac{t+\psi s}{a}\right) = 1, \quad \left(\frac{FL}{a}\right) = \left(\frac{t-\psi s}{a}\right) = 1.$$

Il est facile de voir que ces résultats, qui ont lieu, lorsque u est impair et qu'en même temps a est de la forme $8n+1$, peuvent être réunis dans la formule $\left(\frac{\psi s \pm t}{a}\right) = 1$, dans laquelle le double signe est à volonté.

Le nombre u étant toujours impair, supposons a de la forme $8n+5$. Le produit KL, qui équivaut au binome $(s\varphi')^2 - a u'^2$, étant alors de la forme $8n+4$, et les nombres K et L étant évidemment pairs l'un et l'autre, chacun d'eux sera de la forme $4n+2$, de sorte qu'en faisant $K = 2K'$, $L = 2L'$, K' et L' seront impairs; et comme ces derniers nombres sont en outre diviseurs de $(s\varphi')^2 - a u'^2$, il suit de ce qui a été dit plus haut, qu'on a $\left(\frac{K'}{a}\right) = 1$, $\left(\frac{L'}{a}\right) = 1$. Mais on a, d'un autre coté, a étant de la forme $8n+5$, $\left(\frac{2}{a}\right) = -1$. Multipliant par les expressions précédentes il viendra d'abord $\left(\frac{K}{a}\right) = -1$, $\left(\frac{L}{a}\right) = -1$, et si l'on fait ensuite le produit de ces nouvelles expressions et des expressions $\left(\frac{E}{a}\right) = 1$, $\left(\frac{F}{a}\right) = 1$, trouvées plus haut, on aura

$$\left(\frac{EK}{a}\right) = \left(\frac{t+\psi s}{a}\right) = -1, \quad \left(\frac{FL}{a}\right) = \left(\frac{t-\psi s}{a}\right) = -1.$$

Ces résultats, qui sont relatifs au cas où u est impair et où le nombre a est de la forme $8n+5$, sont compris dans la double formule

$$\left(\frac{\psi s \pm t}{a}\right) = -1.$$

En résumant tout ce qui précède, on aura cet énoncé:

„Si u est pair, on a $\left(\frac{\psi s \pm t}{a}\right) = 1$; si, au contraire, u est impair, „on a $\left(\frac{\psi s \pm t}{a}\right) = (-1)^{\frac{a-1}{4}}$, le double signe étant à volonté dans l'un et „l'autre cas."

On a vu plus haut (ϑ') que, lorsque u est pair, a est ou n'est pas résidu biquadratique par rapport à p, selon que l'on a $\left(\frac{t}{a}\right) = 1$, ou

$\left(\frac{t}{a}\right) = -1$. D'un autre coté, il résulte de ce qui précède, qu'on a, dans ce même cas, $\left(\frac{\psi s \pm t}{a}\right) = 1$. On conclut de là que, si u est pair, a est ou n'est pas résidu biquadratique relativement à p, selon que l'on a

$$\left(\frac{t}{a}\right) = \left(\frac{\psi s \pm t}{a}\right) \text{ ou } \left(\frac{t}{a}\right) = -\left(\frac{\psi s \pm t}{a}\right).$$

On a également vu plus haut (ϑ') que, lorsque u est impair, a est ou n'est pas résidu biquadratique par rapport à p, selon que l'on a

$$\left(\frac{t}{a}\right) = (-1)^{\frac{a-1}{4}} \text{ ou } \left(\frac{t}{a}\right) = -(-1)^{\frac{a-1}{4}}.$$

D'un autre coté, l'énoncé précédent fait voir, qu'on a, dans le cas de u impair, $\left(\frac{\psi s \pm t}{a}\right) = (-1)^{\frac{a-1}{4}}$. En comparant ces deux résultats, on conclut, que, lorsque u est impair, a est ou n'est pas résidu biquadratique relativement à p, selon que l'on a

$$\left(\frac{t}{a}\right) = \left(\frac{\psi s \pm t}{a}\right) \text{ ou } \left(\frac{t}{a}\right) = -\left(\frac{\psi s \pm t}{a}\right).$$

La conclusion étant la même dans le cas de u pair et dans celui de u impair, on peut énoncer ce résultat:

„Si a est résidu biquadratique relativement à p, on a $\left(\frac{t}{a}\right) = \left(\frac{\psi s \pm t}{a}\right)$; „si, au contraire, a n'est pas résidu biquadratique par rapport à p, on „a $\left(\frac{t}{a}\right) = -\left(\frac{\psi s \pm t}{a}\right)$, le double signe étant à volonté dans l'un et l'au- „tre cas."

Comme on a $\left(\frac{p}{a}\right) = 1$, la congruence $\chi^2 \equiv p \pmod{a}$, sera possible et aura, comme l'on sait, deux racines entre les limites $-\frac{1}{2}a$ et $\frac{1}{2}a$. Supposons que χ désigne indistinctement l'une ou l'autre de ces racines. On tire immédiatement de l'équation (η'), $t^2 \equiv p s^2 \pmod{a}$, congruence dont la comparaison avec la précédente donne $t^2 \equiv \chi^2 s^2$, $\pm t \equiv \chi s \pmod{a}$, le signe supérieur ayant lieu pour l'une et le signe inférieur pour l'autre des deux racines de la congruence $\chi^2 \equiv p \pmod{a}$. Si a est résidu biquadratique relativement à p, on a, comme l'on a vu il n'y a qu'un instant, $\left(\frac{t}{a}\right) = \left(\frac{\psi s \pm t}{a}\right)$. Le double signe étant à volonté dans cette formule, nous pouvons le supposer égal à celui qui se trouve dans la congruence $\pm t \equiv \chi s \pmod{a}$. Si nous remplaçons $\pm t$ par χs, il viendra:

$$\left(\frac{t}{a}\right) = \left(\frac{\psi s + \chi s}{a}\right) = \left(\frac{\psi + \chi}{a}\right)\left(\frac{s}{a}\right).$$

D'un autre coté, on tire de la congruence $\pm t \equiv \chi s \pmod{a}$ en se rappelant que a est de la forme $4n+1$, $\left(\frac{t}{a}\right) = \left(\frac{\chi}{a}\right)\left(\frac{s}{a}\right)$. Si l'on multiplie maintenant membre par membre cette équation et la pécédente, on aura $\left(\frac{t^2}{a}\right) = \left(\frac{\chi}{a}\right)\left(\frac{\chi+\psi}{a}\right)\left(\frac{s^2}{a}\right)$ ou ce qui revient au même: $\left(\frac{\chi\cdot\chi+\psi}{a}\right) = 1$, résultat qui a lieu lorsque a est résidu biquadratique relativement à p. On trouverait de la même manière, que, si a n'est pas résidu biquadratique par rapport à p, on a $\left(\frac{\chi\cdot\chi+\psi}{a}\right) = -1$.

Ces résultats sont relatifs au cas où φ n'est pas divisible par a. Resterait à traiter le cas ou φ est divisible par a. L'analyse qu'il faut appliquer à ce second cas, étant entièrement semblable à celle que nous avons exposée avec détail dans ce qui précède, nous nous dispenserons de la développer ici, et nous nous bornerons à énoncer le résultat auquel elle conduit:

„Si φ est divisible par a, a est ou n'est pas résidu biquadratique „par rapport à p, selon que a est de la forme $8n+1$ ou de celle-ci „$8n+5$."

Ce résultat et celui qui précède constituent le théorème II. énoncé dans le dernier paragraphe du mémoire précédent.

On a sans doute remarqué que les énoncés des théorèmes I. et II. sont tels qu'ils n'y entre que la racine ψ du quarré pair ψ^2 que l'on obtient en décomposant p en deux quarrés. Il seroit facile de modifier ces énoncés de manière, à ce qu'ils ne renfermassent plus que la racine φ du quarré impair. On y parviendrait en suivant une marche entièrement semblable à celle que nous avons exposée dans ce qui précède.

Les résultats (δ') et (ϑ'), sur lesquels nous nous sommes appuyés pour établir les théorèmes I. et II., renferment eux mêmes une infinité de theorèmes intéressans analogues au premier des théorèmes de M. Gaufs. On déduit, par exemple, de l'énoncé (ϑ'), en y supposant $a = 5$:

„p désignant un nombre premier $20n+1$, si l'on fait $p = t^2 + 5u^2$, „5 sera ou ne sera résidu biquadratique relativement à p, selon que u

„est pair ou impair; au contraire, si p désigne un nombre premier „$20n+9$ et qu'on fasse de même $p = t^2+5u^2$, 5 sera ou ne sera pas „résidu biquadratique par rapport à p, selon que u est impair ou pair."

Les résultats (δ') et (ϑ') se rapportent aux équations

$$t^2-bu^2 = ps^2,\quad t^2+au^2 = ps^2.$$

On trouverait par des considérations du même genre des résultats analogues rélatifs aux équations $t^2+bu^2 = ps^2$, $t^2-au^2 = ps^2$.

En traitant la première de ces équations et faisant ensuite, pour donner un exemple, $b = 3$, on auroit ce théorème particulier:

„p désignant un nombre premier $12n+1$, si l'on fait $p = t^2+3u^2$, „t sera un nombre impair. Cela posé, je dis que 3 sera ou ne sera pas „résidu biquadratique par rapport à p, selon que t est de la forme „$12n \pm 1$ ou de celle-ci $12n \pm 5$."

4.
Ueber Reihen, durch welche höhere Potenzen des Bogens durch den Sinus ausgedrückt werden.

(Von Herrn Dr. *E. J. Scholtz* in Breslau.)

In den *Mélanges d'analyse*, herausgegeben im Jahre 1815 von Herrn v. Stainville, findet man für das Quadrat des Bogens eine nach den steigenden Potenzen des Sinus geordnete Reihe, die sich durch die Einfachheit ihrer Form empfiehlt. Die Methode, nach welcher man mit Hülfe der Differenzialrechnung diese Reihe ableiten kann, schien mir einer Anwendung auf höhere Potenzen des Bogens fähig zu sein, und der Versuch, den ich damit machte, bestätigte meine Vermuthung. Das Gesetz, nach welchem sich die Form der Coefficienten der Sinuspotenzen richtet, ist wenigstens noch für die 3te, 4te, 5te und 6te Potenz des Bogens sehr einfach. Für noch höhere Potenzen ist der Ausdruck allerdings verwickelter, kann jedoch nachweislich ohne Schwierigkeit aus den vorhergehenden Potenzen abgeleitet werden.

Die eben erwähnte Methode, das Quadrat des Bogens durch eine nach den Potenzen des Bogens fortlaufende Reihe auszudrücken, beruht auf Folgendem: Es sei φ der Bogen, $x = \sin\varphi$ und $y = \varphi^2$, so ist $\partial\varphi = \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)}}$. Die Reihe, durch welche y oder φ^2 dargestellt werden soll, mufs nothwendig nach den geraden Potenzen von x fortgehen, weil φ^2 einerlei Werth erhält, man mag x positiv oder negativ nehmen, und daher folgende Form haben:

$$y = a_2x^2 + a_4x^4 + x_6x^6 + \ldots\ldots + a_{2n-2}x^{2n-2} + a_{2n}x^{2n} + \text{etc.}$$

Aus $\varphi^2 = y$ folgt $\partial y = 2\varphi\partial\varphi$, $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{2\varphi}{\sqrt{(1-x^2)}}$, $\frac{\partial y}{\partial x}\sqrt{(1-x^2)} = 2\varphi$, und nach nochmaliger Differenziirung $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\sqrt{(1-x^2)} - \frac{x\partial y}{\partial x\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{2}{\sqrt{(1-x^2)}}$ und hieraus die Gleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(1-x^2) - x\frac{\partial y}{\partial x} = 2.$$

Aus der angenommenen Reihe erhält man aber

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 2a_2x + 4a_4x^3 + 6a_6x^5 + \ldots + (2n-2)a_{2n-2}x^{2n-3} + 2na_{2n}x^{2n-1} + \text{etc.}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 2a_2 + 3.4.a_4x^2 + 5.6.a_6x^4 + \ldots + (2n-3)(2n-2)a_{2n-2}x^{2n-4}(2n-1).2na_{2n}x^{2n-2} + \text{etc.}$$

Die Substitution dieser Werthe der Differentialquotienten in jene Gleichung giebt folgende:

$$2 = \begin{cases} 2a_2 + 3.4.a_4 \\ \quad - \quad 2.a_2 \\ \quad - \quad 2.a_2 \end{cases} \begin{vmatrix} x^2 + 5.6.a_6 \\ -3.4.a_4 \\ -\quad 4.a_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x^4 + \ldots\ldots + (2n-1)\ .\ 2n\ .\ a_{2n} \\ -(2n-3)(2n-2).a_{2n-2} \\ -\qquad (2n-2).a_{2n-2} \end{vmatrix} x^{2n-2} + \text{etc.}$$

wodurch die Coefficienten der Potenzen von x in der Reihe für φ^3 bestimmt sind:

$$2a_2 = 2,\ 3.4.a_4 = 2^2.a_2,\ 5.6.a_6 = 4^2.a_4,\ \ldots\ (2n-1)2n.a_{2n} = (2n-2)^2.a_{2n-2};$$

$$a_2 = 1,\ a_4 = \frac{2^2}{3.4},\ a_6 = \frac{2^2.4^2}{3.4.5.6};\ \text{u. s. w.}\ a_{2n} = \frac{(2n-2)^2.a_{2n-2}}{(2n-1).2n},$$

woraus von selbst folgt: $a_{2n} = \frac{2^2.4^2.6^2\ldots.(2n-2)^2}{3.4.5.6.7.8\ldots.(2n-1).2n}$, welcher Ausdruck sich auf folgenden reducirt: $a_{2n} = \frac{2.4.6\ldots.(2n-2)}{3.5.7\ldots.(2n-1).n}$. Die Reihe ist also folgende:

$$y = x^2 + \frac{2.x^4}{3.2} + \frac{2.4.x^6}{3.5.3} + \frac{2.4.6.x^8}{3.5.7.4} + \ldots + \frac{2.4.6\ldots.(2n-2).x^{2n}}{3.5.7\ldots.(2n-1).n} + \text{etc.}$$

Betrachten wir nun ganz allgemein irgend eine beliebige Potenz des Bogens φ^m, so haben wir zwei Fälle zu unterscheiden, wenn nemlich m eine ungerade, und wenn m eine gerade Zahl ist. Wie auch die Reihe für φ^m gestaltet sein mag, so erhellt wenigstens so viel, dafs in derselben die niedrigste Potenz von x die $m$te sein mufs, und zum Coefficienten 1 hat. Ist m eine ungerade Zahl, so sieht man sogleich, dafs in der Reihe für φ^m die Potenzen von x nur nach ungeraden Exponenten fortschreiten können, weil der Zahlenwerth von φ^m für positive und negative x gleich sein und nur entgegengesetzte Zeichen haben mufs. Ist aber m eine gerade Zahl, so können die wachsenden Exponenten von x nur gerade Zahlen sein, weil φ^m gleiche positive Werthe, sowohl für positive als negative x erhalten mufs. Aber im einen wie im andern Falle wird in der Reihe der Exponent einer jeden Potenz von x immer um 2 kleiner sein als der der nächst höheren Potenz, so dafs also, mag m gerade oder ungerade sein, die Reihe für φ^m immer folgende Form

haben wird, wenn man $\varphi^m = y$ setzt:

$$y = a_m x^m + a_{m+2} x^{m+2} + a_{m+4} x^{m+4} + \ldots + a_q x^q + \text{etc.} \ldots . \ (\mu.)$$

wo q von der Form $m + 2p$ sein, und zugleich mit m gerade oder ungerade sein mufs, und $a_m = 1$ ist.

Mit Hülfe der vorhin gebrauchten Methode zur Entwickelung des Quadrats des Bogens in eine Reihe, kann man nun die Coefficienten in der Reihe für φ^m durch die Coefficienten in der Reihe für φ^{m-2} bestimmen, so dafs man also immer, wenn die Reihe für irgend eine Potenz des Bogens bekannt ist, im Stande ist, die Reihe für die Potenz, deren Exponent um 2 gröfser ist, zu finden. Wir wollen uns nun, um φ^m durch eine Reihe darzustellen, die Reihe für φ^{m-2} gegeben denken, und indem wir $z = \varphi^{m-2}$ setzen, der Reihe diese Form geben:

$$z = b_{m-2} x^{m-2} + b_m x^m + b_{m+2} x^{m+2} + \ldots + b_q x^q + \text{etc.},$$

wo wieder $b_{m-2} = 1$ und $q = m + 2p$ ist.

Aus $y = \varphi^m$ erhalten wir $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{m \varphi^{m-1}}{\sqrt{(1-x^2)}}$, oder $\frac{\partial y}{\partial x}\sqrt{(1-x^2)} = m \varphi^{m-1}$, und letzteres noch einmal differentiirt, dann mit $\sqrt{(1-x^2)}$ multiplicirt und z statt φ^{m-2} gesetzt:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(1-x^2) - x\frac{\partial y}{\partial x} = (m-1).m.z \ldots . \ (M.).$$

Wenn man nun die aus (μ.) erhaltenen Ausdrücke für die Differentialquotienten:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = m a_m x^{m-1} + (m+2) a_{m+2} x^{m+2} + (m+4) a_{m+4} x^{m+3} + \ldots .$$
$$\ldots . + (q-2) a_{q-2} x^{q-3} + q . a_q x^{q-1} + \text{etc.},$$
$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = (m-1) m a_m x^{m-2} + (m+1)(m+2) a_{m+2} x^m + (m+3)(m+4) a_{m+4} x^{m+2} + \ldots$$
$$\ldots . + (q-3)(q-2) a_{q-2} x^{q-2} + (q-1) q . a_q x^{q-2} + \text{etc.}$$

in die Gleichung (M.) substituirt und statt z die demselben gleichgesetzte Reihe schreibt, so bekommt man, indem man gleiche Potenzen von x zusammen ordnet:

$$0 = \begin{cases} (m-1).m.a_m \\ \\ \\ -(m-1).m.b_{m-2} \end{cases} \left| \begin{array}{l} x^{m-2} + (m+1)(m+2).a_{m+2} \\ \quad -(m-1).m.a_m \\ \quad -m.a_m \\ \quad -(m-1).m.b_m \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} x^m + (m+3)(m+4).a_{m+4} \\ \quad -(m+1)(m+2).a_{m+2} \\ \quad -(m+2)a_{m+2} \\ \quad -(m-1).m.b_{m+2} \end{array} \right| x^{m+2}$$
$$+ \ldots + (q-1).q.a_q \left| \begin{array}{l} \\ \quad -(q-3)(q-2).a_{q-2} \\ \quad -(q-2).a_{q-2} \\ \quad -(m-1).m.b_{a-2} \end{array} \right| x^{q-2} + \text{etc.}$$

Hier-

Hieraus ergeben sich folgende Bestimmungen der mit a bezeichneten Coefficienten:

$$a_m = b_{m-2} = 1,$$

$$a_{m+2} = \frac{m^2 . a_m + (m-1)\, m . b_m}{(m+1)(m+2)},$$

$$a_{m+4} = \frac{(m+2)^2 . a_{m+2} + (m-1)\, m . b_{m+2}}{(m+3)(m+4)},$$

$$a_{m+6} = \frac{(m+4)^2 . a_{m+4} + (m-1)\, m . b_{m+4}}{(m+5)(m+6)},$$

$$a_{m+8} = \frac{(m+6)^2 . a_{m+6} + (m-1)\, m . b_{m+6}}{(m+7)(m+8)},$$

u. s. w.

und endlich

$$a_q = \frac{(q-2)^2 . a_{q-2} + (m-1)\, m . b_{q-2}}{(q-1) . q},$$

oder da $q = m + 2p$:

$$a_{m+2p} = \frac{(m+2p-2)^2 . a_{m+2p-2} + (m-1)\, m . b_{m+2p-2}}{(m+2p-1)(m+2p)},$$

und eben so a_{q+2} oder

$$a_{m+2p+2} = \frac{(m+2p)^2 . a_{m+2p} + (m-1)\, m . b_{m+2p}}{(m+2p+1)(m+2p+2)}.$$

Substituirt man nun in a_{m+2} den Werth von $a_m = b_{m-2}$, und den so bestimmten Werth von a_{m+2} in a_{m+4}, und a_{m+4} in a_{m+6} u. s. f., so findet man nach Ausführung der gehörigen Reductionen:

$$a_m = b_{m-2} = 1;$$

$$a_{m+2} = \frac{m . m}{(m+1)(m+2)} . b_{m-2} + \frac{(m-1) . m}{(m+1)(m+2)} . b_m = \frac{m . m}{(m+1)(m+2)} \left(b_{m-2} + \frac{m-1}{m} b_m \right),$$

$$a_{m+4} = \frac{m(m+2) . m}{(m+1)(m+3)(m+4)} \left(b_{m-2} + \frac{m-1}{m} . b_m \right) + \frac{(m-1) . m}{(m+3)(m+4)} . b_{m+2}$$

$$= \frac{m(m+2) . m}{(m+1)(m+3)(m+4)} \left(b_{m-2} + \frac{m-1}{m} b_m + \frac{(m-1)(m+1)}{m . (m+2)} b_{m+2} \right),$$

und auf dieselbe Weise:

$$a_{m+6} = \frac{m(m+2)(m+4) . m}{(m+1)(m+3)(m+5)(m+6)}$$

$$\times \left(b_{m-2} + \frac{m-1}{m} . b_m + \frac{(m-1)(m+1)}{m . (m+2)} . b_{m+2} + \frac{(m-1)(m+1)(m+3)}{m . (m+2)(m+4)} . b_{m+4} \right),$$

$$a_{m+8} = \frac{m(m+2)(m+4)(m+6) . m}{(m+1)(m+3)(m+5)(m+7)(m+8)} \left(b_{m-2} + \frac{m-1}{m} . b_m + \frac{(m-1)(m+1)}{m(m+2)} . b_{m+2} \right.$$

$$\left. + \frac{(m-1)(m+1)(m+3)}{m(m+2)(m+4)} . b_{m+4} + \frac{(m-1)(m+1)(m+3)(m+5)}{m(m+2)(m+4)(m+6)} . b_{m+6} \right),$$

woraus man sieht, dafs der allgemeine Coefficient, d. i. der zur $q$ten oder $(m+2p)$ten Potenz des Sinus gehörige, folgende Form haben wird:

$$a_{m+2p}=\frac{m(m+2)(m+4)\ldots(m+2p-2)}{(m+1)(m+3)(m+5)\ldots(m+2p-1)}\cdot\frac{m}{m+2p}\cdot\Big(b_{m-2}+\frac{m-1}{m}.b_m+\frac{(m-1)(m+1)}{m.(m+2)}.b_{m+2}$$
$$+\frac{(m-1)(m+1)(m+3)}{m(m+2)(m+4)}.b_{m+4}+\ldots.+\frac{(m-1)(m+1)(m+3)\ldots.(m+2p-3)}{m(m+2)(m+4)\ldots.(m+2p-2)}.b_{m+2p-2}\Big).$$

Von der Richtigkeit dieses Ausdrucks kann man sich leicht überzeugen, wenn man diesen Werth von a_{m+2p} in die Formel für den nächstfolgenden Coefficienten $a_{m+2p+2}=\frac{(m+2p)^2.a_{m+2p}+(m-1)m.b_{m+2p}}{(m+2p+1)(m+2p+2)}$ setzt, indem man dann diesen letzten Coefficienten gerade so gebildet findet, als wenn man in den Ausdruck von a_{m+2p} statt $2p$ gesetzt hätte $2p+2$. Denn daraus folgt, nach der bekannten Schlufsfolge, dafs das in a_{m+2p} ausgesprochene Gesetz der Bildung der Coefficienten allgemein richtig ist, da es für a_{m+2}, a_{m+4} u. s. w., oder für $p=1$, $=2$, u. s. w. gilt. Nur $a_m=b_{m-2}$, welches der allgemeine Coefficient für $p=0$ angeben müfste, scheint in demselben nicht mit eingeschlossen zu sein, doch kann man dem allgemeinen Coefficienten, ohne seinen Werth zu ändern, leicht eine solche Form geben, dafs man daraus auch den ersten Coefficienten ohne Anstofs wieder finden kann. Nach den so eben aufgestellten Bestimmungen der Coefficienten kann man nun die Reihe für eine jede Potenz $\varphi^m=y$ ableiten, wenn man die Reihe für die um 2 niedrigere Potenz $\varphi^{m-2}=z$ kennt. — Wenden wir dies nun zunächst an auf:

Die 2te Potenz. Für diese ist $m=2$, und also, wenn man $2n$ statt $q=m+2p$ schreibt,

$$\varphi^2=y=a_2x^2+a_4x^4+\ldots..+a_{2n}x^{2n}+\text{ etc.}$$

Die Reihe für die um zwei niedrigere Potenz $\varphi^{m-2}=\varphi^0=1$ beschränkt sich auf das erste Glied $x^0=1$, so dafs also $b_{m-2}=1$, aber alle übrigen mit b bezeichneten Coefficienten 0 sind. Setzt man nun in den für φ^m allgemein gefundenen Coefficienten $b_{m-2}=1$ und alle übrigen mit b bezeichneten Coefficienten $=0$, und $m=2$, $m+2p=2n$, so wird man sie genau so erhalten, wie vorhin aus der unmittelbaren Bestimmung der Reihe für φ^2.

Für die 3te Potenz ist $m=3$ und nunmehr $\varphi^m=\varphi^3=y$, und die um 2 niedrigere Potenz, nemlich $z=\varphi$, wird bekanntlich durch folgende Reihe der Sinuspotenzen ausgedrückt:

$$z=x+\frac{1}{1.2.3}x^3+\frac{1.3}{2.4.5}x^5+\ldots.+\frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots(2n-2)(2n-1)}x^{2n-1}+\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots2n.(2n+1)}x^{2n+1}+\text{etc.}$$

Da $m=3$, so hat man $b_{m-2}=b_1=1$, $b_m=b_3=\frac{1}{2.3}$, $b_{m+2}=b_5=\frac{1.3}{2.4.5}$, $b_{m+4}=b^7=\frac{1.3.5}{2.4.6.7}$ etc., und setzt man $m+2p=2n+1$,

$$b_{m+2p-2}=b_{2n-1}=\frac{1.3.5....(2n-3)}{2.4.6....(2n-2).(2n-1)} \text{ u. s. w.}$$

Die allgemeinen Formeln gehen nunmehr, wenn man $m=3$ setzt und jene Werthe von b darin substituirt, in folgende über:

$$a_3=b_1=1;\quad a_5=\frac{3.3}{4.5}\left(1+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1.2.3}\right)=\frac{3.3}{4.5}\left(1+\frac{1}{3^2}\right)=\frac{1}{2};$$

$$a_7=\frac{3\,5.3}{4.6.7}\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{2.4}{3.5}\cdot\frac{1.3}{2.4.5}\right)=\frac{3.5.3}{4.6.7}\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}\right)=\frac{3.7}{4.5.6}, \text{ und ebenso}$$

$$a_9=\frac{3.5.7.3}{4.6.8.9}\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}\right) \text{ u. s. w.}$$

$$a_{m+2p}=a_{2n+1}=\frac{3.5\,7....(2n-1).3}{4.6.8.....2n.(2n+1)}$$

$$\times\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+....+\frac{2.4.6....(2n-4)(2n-2)\times 1.3.5....(2n-3)}{3.5.7....(2n-3)(2n-1)\times 2.4.6....(2n-2)(2n-1)}\right);$$

$$a_{2n+1}=\frac{3.5.7....(2n-1).3}{4.6.8....2n.(2n+1)}\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+....+\frac{1}{(2n-1)^2}\right).$$

Wir haben also nunmehr für φ^3 folgende Reihe:

$$\varphi^3=x^3+\frac{3.3}{4.5}\left(1+\frac{1}{3^2}\right)x^5+\frac{3.5.3}{4.6.7}\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}\right)x^7+....$$

$$....+\frac{3.5.7....(2n-1).3}{4.6.8....2n.(2n+1)}\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+....+\frac{1}{(2n-1)^2}\right)x^{2n+1}+\text{ etc.}$$

Die 4te Potenz wird nach den allgemeinen Formeln durch die Coefficienten der zweiten bestimmt. Da $m=4$, so hat man $b_{m-2}=b_2=1$, $b_m=b_4=\frac{2}{3.2}$, $b_{m+2}=b_6=\frac{2.4}{3.5.3}$, $b_{m+4}=b_8=\frac{2.4.6}{3.5.7.4}$, u. s. w., und allgemein, wenn man $2n=m+2p$ setzt, $b_{m+2p-2}=b_{2n-2}=\frac{2.4.6....(2n-4)}{3.5.7....(2n-3).(n-1)}$, und da $a_m=a_4$; $a_{m+2}=a_6$ u. s. w., und $a_{m+2p}=a_{2n}$, so ist

$$a_4=b_2=1;\quad a_6=\frac{4.4}{5.6}\left(1+\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3.2}\right)=\frac{4.2}{3.5}\left(1+\frac{1}{2^2}\right)=\frac{2}{3},$$

$$a_8=\frac{4.6\,4}{5.7.8}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{3.5}{4.6}\cdot\frac{2.4}{3.5.3}\right)=\frac{4.6.2}{5.7.4}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)=\frac{7}{15},$$

$$a_{10}=\frac{4.6.8.2}{5.7.9.5}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{3.5.7}{4.6.8}\cdot\frac{2.4.6}{3.5.7.4}\right)=\frac{4.6.8.2}{5\,7.9.5}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}\right) \text{ etc.}$$

$$a_{2n}=\frac{4.6.8....(2n-2).2}{5.7.9....(2n-1).n}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+...+\frac{3.5.7...(2n-3)}{4.6.8...(2n-2)}\cdot\frac{2.4.6...(2n-4)}{3.5.7...(2n-3)(n-1)}\right),$$

$$a_{2n}=\frac{4.6\,8....(2n-2).2}{5.7.9....(2n-1).n}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+....+\frac{1}{(n-1)^2}\right).$$

Die Reihe ist also

$$\varphi^4 = x^4 + \frac{4.2}{3.5}\left(1+\frac{1}{2^2}\right)x^6 + \frac{4.6.2}{5.7.4}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)x^8 + \frac{4.6.8.2}{5.7.9.5}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}\right)x^{10} + \ldots$$
$$+ \frac{4.6.8.\ldots.(2n-2).2}{5.7.9.\ldots.(2n-1).n}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots.+\frac{1}{(n-1)^2}\right)x^{2n} + \text{ etc.}$$

Die 5te Potenz wird aus der dritten abgeleitet. Da $m=5$, so ist $a_m = a_5$, $a_{m+2} = a_7$ u. s. f. und $a_{m+2p} = a_{5+2p} = a_{2n+1}$, wenn man $m+2p = 2n+1$ setzt; und eben so $b_{m-2} = b_3$, $b_m = b_5$, $b_{m+2} = b_7$ u. s. f., und $b_{m+2p-2} = b_{2n-1}$. Der Kürze wegen wollen wir mit $\Sigma\frac{1}{(2n-1)^2}$ die Summe der reciproken Quadrate aller ungeraden Zahlen von 1 bis $(2n-1)$ einschliefslich bezeichnen, so dafs z. B. $\Sigma\frac{1}{7^2} = 1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}$. Wenn man nun in die allgemeinen Formeln $m=5$ setzt, und jene Werthe von b aus der Reihe für die dritte Potenz substituirt, so erhält man:

$a_5 = b_3 = 1$;

$$a_7 = \frac{5.5}{6.7}\left[1+\frac{4}{5}\cdot\frac{9}{4.5}\left(1+\frac{1}{3^2}\right)\right] = \frac{5.5.9}{6.7}\left[\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}\left(1+\frac{1}{3^2}\right)\right] = \frac{5}{6};$$

$$a_9 = \frac{5.7.5}{6.8.9}\left[1+\frac{9}{5^2}\left(1+\frac{1}{3^2}\right)+\frac{4.6}{5.7}\cdot\frac{3.5.3}{4.6.7}\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}\right)\right]$$
$$= \frac{5.7.5.9}{6.8.9}\left[\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}\left(1+\frac{1}{3^2}\right)+\frac{1}{7^2}\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}\right)\right] = \frac{4.7}{8.9}, \text{ und eben so}$$

$$a_{11} = \frac{5.7.9.5.9}{6.8.10.11}\left[\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}\left(1+\frac{1}{3^2}\right)+\frac{1}{7^2}\Sigma\frac{1}{5^2}+\frac{1}{9^2}\Sigma\frac{1}{7^2}\right] \text{ u. s. w., und da}$$

$$b_{2n-1} = \frac{3.5.7.\ldots.(2n-3).\ 3}{4.6.8.\ldots.(2n-2).(2n-1)}\Sigma\frac{1}{(2n-3)^2},$$

so findet man den allgemeinen Coefficienten nach Ausführung aller Reductionen:

$$a_{2n+1} = \frac{5.7.\ 9.\ldots.(2n-1).5.9}{6.8.10.\ldots.2n.(2n+1)}$$
$$\times\left\{\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}\left(1+\frac{1}{3^2}\right)+\frac{1}{7^2}\Sigma\frac{1}{5^2}+\Sigma\frac{1}{9^2}\Sigma\frac{1}{7^2}+\ldots.+\frac{1}{(2n-1)^2}\Sigma\frac{1}{(2n-3)^2}\right\}.$$

Die etwas unbehülfliche Form dieses Coefficienten läfst sich indefs weit einfacher darstellen. Wir wollen hierbei nur bei dem allgemeinen Coefficienten stehen bleiben, der ja die übrigen mit einschliefst. Man kann sich nemlich leicht überzeugen, dafs die in den Klammern $\{\}$ eingeschlossene endliche Reihe in dem allgemeinen Coefficienten, deren Summe wir mit Q_n bezeichnen wollen, ist: $Q_n = \frac{1}{2}\Sigma^2\frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{2}\Sigma\frac{1}{(2n-1)^4}$, wo

$\Sigma^2\frac{1}{(2n-1)^2}$ das Quadrat der Reihe $1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots.+\frac{1}{(2n-1)^2}$, und $\Sigma\frac{1}{(2n-1)^4}$ die Summe der reciproken 4ten Potenzen aller ungeraden Zahlen von 1 inclus. bis $(2n-1)$ inclus. bedeutet. Denn wenn wir einstweilen $\frac{1}{2}\Sigma^2\frac{1}{(2n-1)^2}-\frac{1}{2}\Sigma\frac{1}{(2n-1)^4}=P_n$ setzen, so ist, wenn man in Q_n und P_n, $n+1$ statt n substituirt, $Q_{n+1}=Q_n+\frac{1}{(2n+1)^2}\Sigma\frac{1}{(2n-1)^2}$ und

$$P_{n+1}=\tfrac{1}{2}\Big(\Sigma\frac{1}{(2n-1)^2}+\frac{1}{(2n+1)^2}\Big)^2-\tfrac{1}{2}\Sigma\frac{1}{(2n-1)^4}-\frac{1}{2(2n+1)^4}$$

$$=\tfrac{1}{2}\Sigma^2\frac{1}{(2n-1)^2}-\tfrac{1}{2}\Sigma\frac{1}{(2n-1)^4}+\frac{1}{(2n+1)^2}\Sigma\frac{1}{(2n-1)^2}=P_n+\frac{1}{(2n+1)^2}\Sigma\frac{1}{(2n-1)^2},$$

so also, dafs wenn $Q_n=P_n$, auch $Q_{n+1}=P_{n+1}$ ist. Nun ist aber wirklich $Q_n=P_n$ für $n=2$, $n=3$, u. s. w., also ist auch ganz allgemein $Q_n=P_n$, und man kann daher a_{2n+1} unter folgender einfacheren Form darstellen:

$$a_{2n+1}=\frac{5.7.9\ldots.(2n-1).5.9}{2.6.8.10\ldots.2n.(2n+1)}\Big\{\Sigma^2\frac{1}{(2n-1)^2}-\Sigma\frac{1}{(2n-1)^4}\Big\},\text{ oder auch}$$

$$a_{2n+1}=\frac{1.2.5.7\ldots.(2n-1).3.4.5}{2.4.6.8\ldots.2n.(2n+1)}\Big\{\Sigma^2\frac{1}{(2n-1)^2}-\Sigma\frac{1}{(2n-1)^4}\Big\}.$$

Für die 6te Potenz ist $m=6$ und $m-2=4$. Die mit b bezeichneten Coefficienten $b_{m-2}=b_4$, $b_m=b_6$, $b_{m+2}=b_8$ u. s. w., $b_{m+2p-2}=b_{2n-2}$ (wenn man $m+2p=2n$ setzt) müssen aus der Reihe für die 4te Potenz genommen werden, und verfährt man auf eine ähnliche Weise wie bei der 5ten Potenz, so erhält man folgende Werthe der Coefficienten:

$a_6=1$;

$$a_8=\frac{6^2}{7.8}\Big[1+\frac{4.2}{3.5}\Big(1+\frac{1}{2^2}\Big).\tfrac{5}{6}\Big]=\frac{2.6^2}{7.8}.\Big[\Big(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\Big)^2-1-\frac{1}{2^4}-\frac{1}{3^4}\Big]=1$$

$$a_{10}=\frac{6^2.8}{7.9.10}\Big[\frac{4}{2^2}+\frac{4}{3^2}\Big(1+\frac{1}{2^2}\Big)+\frac{4}{4^2}\Big(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\Big)\Big]=\frac{6.8.2.6}{7.9.10}\Big(\Sigma^2\frac{1}{4^2}-\Sigma\frac{1}{4^4}\Big),$$

wenn wir auf eine ähnliche Weise wie oben,

$$\Sigma^2\frac{1}{9^2}=\Big(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots.+\frac{1}{9^2}\Big)^2\text{ und}$$

$$\Sigma\frac{1}{9^4}=1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\ldots.+\frac{1}{9^4}\text{ setzen;}$$

$$a_{12}=\frac{6.8.10.6}{7.9.11.12}.\Big[\frac{4}{2^2}+\frac{4}{3^2}\Big(1+\frac{1}{2^2}\Big)+\frac{4}{4^2}\Big(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\Big)+\frac{4}{5^2}\Big(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}\Big)\Big]$$

$$=\frac{6.8.10.6.2}{7.9.11.12}.\Big(\Sigma^2\frac{1}{5^2}-\Sigma\frac{1}{5^4}\Big),\text{ und endlich}$$

$$a_{2n} = \frac{6.8.10....(2n-2).6}{7.9.11....(2n-1).2n}$$
$$\times \left[\frac{4}{2^2} + \frac{4}{3^2}\left(1+\frac{1}{2^2}\right) + \frac{4}{4^2}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right) + \frac{4}{5^2}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}\right) + \ldots.\right.$$
$$\left. + \frac{5.7.9....(2n-3).4.6.8.10....(2n-4)\ .\ 2}{6.8.10...(2n-2).5.7.9.11...(2n-3).(n-1)} \cdot \Sigma \frac{1}{(n-2)^2}\right]$$
$$= \frac{6.8.10....(2n-2).6}{7.9.11....(2n-1).2n}\left[\frac{4}{2^2} + \frac{4}{3^2}\left(1+\frac{1}{2^2}\right) + \frac{4}{4^2}\Sigma\frac{1}{3^2} + \frac{4}{5^2}\Sigma\frac{1}{4^2} + \ldots.\right.$$
$$\left. \ldots. + \frac{4}{(n-1)^2}\Sigma\frac{1}{(n-2)^2}\right],$$
$$a_{2n} = \frac{6.8.10....(2n-2).6.2}{7.9.11....(2n-1).2n}\left(\Sigma^2\frac{1}{(n-1)^2} - \Sigma\frac{1}{(n-1)^4}\right),$$

wo $\Sigma^2\frac{1}{(n-1)^2}$ das Quadrat der Summe der reciproken Quadrate aller natürlichen Zahlen, von 1 bis $(n-1)$ einschliefslich, und $\Sigma\frac{1}{(n-1)^4}$ die Summe der reciproken Biquadrate derselben natürlichen Zahlen bezeichnet. Von der Richtigkeit der Ableitung des letzten Ausdrucks von a_{2n} aus dem vorhergehenden kann man sich auf einem ähnlichen Wege, wie bei der fünften Potenz überzeugen. Auch kann man den Ausdruck für a_{2n} so schreiben:

$$a_{2n} = \frac{4.6.8....(2n-2).5.6}{5.7.9....(2n-1).4n}\left(\Sigma^2\frac{1}{(n-1)^2} - \Sigma\frac{1}{(n-1)^4}\right),$$

in welcher Form auch der erste Coefficient a_6 richtig angegeben wird.

Für noch höhere Potenzen scheint sich das Gesetz für die Bildung der Coefficienten nicht mehr in einer hinreichend einfachen Form darstellen zu lassen, weshalb ich auch diese Untersuchungen hier nicht weiter fortführen will.

5.

Note sur le mémoire de Mr. L. Olivier No. 4. du second tome de ce journal, ayant pour titre „remarques sur les séries infinies et leur convergence."

(Par Mr. *N. H. Abel.*)

Suivie d'une remarque de Mr. L. Olivier sur le même objet.

---

1. Note de Mr. Abel.

On trouve pag. 34. dans ce mémoire le théorème suivant pour reconnoître si une série est convergente ou divergente:

„Si l'on trouve que dans une série infinie le produit du n^{me} terme ou „du n^{me} des groupes de termes qui conservent le même signe, par n, est „zéro pour $n = \infty$, on peut regarder cette seule circonstance comme „une marque, que la série est convergente; et réciproquement, la série ne „peut pas être convergente si le produit $n.a_n$ n'est pas nul pour $n = \infty$."

La dernière partie de ce théorème est très juste, mais la première ne semble pas l'être. Par exemple la série

$$\frac{1}{2\log 2} + \frac{1}{3\log 3} + \frac{1}{4\log 4} \cdots \cdots \frac{1}{n\log n}$$

est divergente quoique $na_n = \frac{1}{\log n}$ soit zéro pour $n = \infty$. En effet les logarithmes hyperboliques dont il est question sont toujours moindre que leurs nombres moins 1, c'est à dire, on a toujours $\log(1+x) < x$. Si $x > 1$ cela est évident. Si $x < 1$ on a

$$\log(1+x) = x - x^2(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}x) - x^4(\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{5}x) \cdots \cdots$$

donc aussi dans ce dernier cas $\log(1+x) < x$, puisque $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}x$, $\frac{1}{4} - \frac{1}{5}x$ sont tous positifs. En faisant $x = \frac{1}{n}$, cela donne

$$\log\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} \text{ ou bien } \log\frac{1+n}{n} < \frac{1}{n},$$

ou

$$\log(1+n) < \frac{1}{n} - \log n < \left(1+\frac{1}{n\log n}\right)\log n:$$

donc

$$\log\log(1+n) < \log\log n + \log\left(1+\frac{1}{n\log n}\right).$$

Mais puisque $\log(1+x) < x$, on a $\log\left(1+\frac{1}{n\log n}\right) < \frac{1}{n\log n}$, donc en vertu de l'expression précédente,

$$\log\log(1+n) < \log\log n + \frac{1}{n\log n}.$$

En faisant successivement $n = 2, 3, 4, \ldots$ on trouve

$$\log\log 3 < \log\log 2 + \frac{1}{2\log 2},$$

$$\log\log 4 < \log\log 3 + \frac{1}{3\log 3},$$

$$\log\log 5 < \log\log 4 + \frac{1}{4\log 4},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\log\log(1+n) < \log\log n + \frac{1}{n\log n},$$

donc, en prenant la somme,

$$\log\log(1+n) < \log\log 2 + \frac{1}{2\log 2} + \frac{1}{3\log 3} + \frac{1}{4\log 4} \ldots + \frac{1}{n\log n}.$$

Mais $\log\log(1+n) = \infty$ pour $n = \infty$, donc la somme de la série proposée $\frac{1}{2\log 2} + \frac{1}{3\log 3} + \frac{1}{4\log 4} \ldots + \frac{1}{n\log n}$ est infiniment grande et par conséquent cette série est divergente. Le théorème enoncé dans l'endroit cité est donc en défaut dans ce cas.

En général on peut démontrer qu'il est impossible de trouver une fonction φn telle, qu'une série quelconque $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \ldots + a_n$, dont nous supposons tous les termes positifs, soit convergente, si $\varphi n . a_n$ est zéro pour $n = \infty$ et divergente dans le cas contraire. C'est ce qu'on peut faire voir à l'aide du théorème suivant.

Si la série $a_0 + a_1 + a_2 \ldots + a_n \ldots$ est divergente, la suivante

$$\frac{a_1}{a_0} + \frac{a_2}{a_0 + a_1} + \frac{a_3}{a_0 + a_1 + a_2} \ldots + \frac{a_n}{a_0 + a_1 \ldots + a_{n-1}} \ldots$$

le sera aussi. En effet, en remarquant que les quantités a_0, a_1, a_2, $\ldots$ sont positifs, on a en vertu du théorème $\log(1+x) < x$, demontré ci dessus,

$$\log(a_0 + a_1 + a_2 \ldots + a_n) - \log(a_0 + a_1 + a_2 \ldots a_{n-1})$$

c'est à dire

$$\log\left(1 + \frac{a_n}{a_0 + a_1 + a_2 \ldots + a_{n-1}}\right) < \frac{a_n}{a_0 + a_1 + a_2 \ldots + a_{n-1}},$$

donc, en faisant successivement $n = 1, 2, 3, \ldots$:

log

$$\log(a_0+a_1)-\log a_0<\frac{a_1}{a_0},$$
$$\log(a_0+a_1+a_2)-\log(a_0+a_1)<\frac{a_2}{a_0+a_1},$$
$$\log(a_0+a_1+a_2+a_3)-\log(a_0+a_1+a_2)<\frac{a_3}{a_0+a_1+a_2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\log(a_0+a_1\ldots\ldots+a_n)-\log(a_0+a_1\ldots\ldots+a_{n-1})<\frac{a_n}{a_0+a_1\ldots\ldots+a_{n-1}},$$

et en prenant la somme,

$$\log(a_0+a_1\ldots\ldots+a_n)-\log a_0<\frac{a_1}{a_0}+\frac{a_2}{a_0+a_1}\ldots\ldots+\frac{a_n}{a_0+a_1\ldots\ldots+a_{n-1}}.$$

Mais si la série $a_0+a_1+a_2\ldots\ldots+a_n$ est divergente, sa somme est infinie et le logarithme de cette somme l'est également; donc la somme de la série $\frac{a_1}{a_0}+\frac{a_2}{a_0+a_1}\ldots\ldots+\frac{a_n}{a_0+a_1\ldots\ldots+a_{n-1}}$ est aussi infiniment grande, et cette série est par consequent divergente, si la série $a_0+a_1+a_2\ldots\ldots a_{n-1}$ l'est. Cela posé, supposons que φn soit une fonction de n telle, que la série $a_0+a_1+a_2\ldots\ldots+a_n\ldots\ldots$ soit convergente ou divergente selon que $\varphi n.a_n$ est zéro ou non pour $n=\infty$. Alors la série

$$\frac{1}{\varphi 1}+\frac{1}{\varphi 2}+\frac{1}{\varphi 3}+\frac{1}{\varphi 4}\ldots\ldots+\frac{1}{\varphi n}\ldots\ldots$$

sera divergente et la serie

$$\frac{1}{\varphi 2.\frac{1}{\varphi 1}}+\frac{1}{\varphi 3\left(\frac{1}{\varphi 1}+\frac{1}{\varphi 2}\right)}+\frac{1}{\varphi 4\left(\frac{1}{\varphi 1}+\frac{1}{\varphi 2}+\frac{1}{\varphi 3}\right)}\ldots\ldots$$
$$+\frac{1}{\varphi n\left(\frac{1}{\varphi 1}+\frac{1}{\varphi 2}+\frac{1}{\varphi 3}\ldots\ldots\frac{1}{\varphi(n-1)}\right)}\ldots\ldots$$

convergente; car dans la premiere on a $a_n\varphi n=1$ et dans la seconde $a_n\varphi n=0$ pour $n=\infty$. Or selon le théorème établi plus haut, la seconde série est nécessairement divergente, en même tems que la première; donc une fonction φn telle qu'on l'a supposée n'existe pas. En faisant $\varphi n=n$, les deux séries en question deviendront

$$1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}\ldots\ldots+\frac{1}{n}\ldots\ldots$$

et

$$\frac{1}{2.1}+\frac{1}{3(1+\frac{1}{2})}+\frac{1}{4(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})}\ldots\ldots+\frac{1}{n\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\ldots\ldots\frac{1}{n-1}\right)}\ldots\ldots$$

qui par conséquent sont divergentes toutes deux.

2. Remarque de Mr. L. Olivier.

Soit

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \ldots\ldots + a_n \ldots\ldots$$

une série donnée, dont p. e. tous les termes sont positifs et vont toujours en décroissant et dont il s'agit de juger la convergence. Représentons les termes de cette série par les ordonnées orthogonales d'une courbe XY (Fig. 12.) dont les abscisses sont les nombres entiers 1, 2, 3, 4, ... Soit Bb égal au terme a_n, le reste de la série à partir de ce terme sera représenté par la somme des aires des parallelogrammes Bc, Cd, De etc. à l'infini. En second lieu le produit $n.a_n$ sera représenté par l'aire du parallelogramme $Bbvu$. Mais puisque les ordonnées de la courbe diminuent toujours de manière que l'axe des abscisses est une asymptote de la courbe, le parallelogramme $Bbvu$ sera évidemment plus grand que la somme des parallelogrammes Bc, Cd, De, ... Donc si $n.a_n$ est zéro pour $p = \infty$, la somme des termes de la série donnée à partir du n^{me} terme, c'est à dire le reste de la série le sera à plus forte raison, et par conséquent la série sera convergente si $n.a_n = 0$ pour $n = \infty$.

De cette manière le théorème que j'ai présenté à l'endroit cité semble être très bien fondé et les exemples que j'ai donnés semblent le vérifier. Néanmoins, d'après ce que Mr. Abel vient de remarquer ci haut, le théorème n'est pas généralement applicable. C'est un nouveau cas très remarquable qui fait voir combien il faut avoir de précaution partout où il s'agit des quantités infinies. La cause de la contradiction apparente entre le résultat des conclusions apparemment évidentes et le résultat effectif, est, qu'il n'est pas permis d'appliquer indifféremment à l'infini ce qui est bien sûr pour des quantités finies. En effet la somme des aires des parallélogrammes représentés par les produits $n.a_n$, $n.a_{2n}$, $n.a_{3n}$, ... est également plus grande que celle des parallelogrammes Bc, Cd, De, ... et même plus petit que l'aire du parallelogramme $Bbvu$. Donc, on pourroit dire avec le même droit que le reste de la série donnée à partir du n^{me} terme est nul si la somme

$$n(a_n + a_{2n} + a_{3n} \ldots\ldots)$$

l'est, et la somme de cette série pourra effectivement être encore un quantité finie ou même infinie si $n.a_n$ est nul.

6.
Annäherungs-Construction des Kreis-Umfangs und Flächen-Inhalts.

(Vom Herrn Cand. phil. *Specht* zu Berlin.)

Ist BC der Radius eines Kreises, so findet man den Umfang und Flächen-Inhalt dieses Kreises näherungsweise vermittelst folgender einfachen geometrischen Construction. Wenn man nemlich den Durchmesser BD (Fig. 13.) senkrecht auf BC stellt, und über D hinaus verlängert; alsdann auf dieser Verlängerung, $Da = ab = bc$, gleich dem fünften Theile des Radius nimmt; ferner die BC über C hinaus bis A verlängert, so dafs $BA = Ca$; endlich aus dem Puncte A mit der Cc die Parallele AE zieht, welche die Verlängerung von BD in E trifft: so wird die BE dem Umfange, und das Dreieck BCE dem Flächen-Inhalte des gegebenen Kreises sehr nahe kommen.

Für $BC = 1$ ist $Ba = 2\frac{1}{5}$, $Bc = 2\frac{3}{5}$,

$$Ca^2 = BC^2 + Ba^2 = \frac{146}{25}, \quad Ca = \frac{\sqrt{146}}{5},$$

$$BC : Bc = BA : BE,$$

$$1 : \frac{13}{5} = \frac{\sqrt{146}}{5} : BE \text{ und } BE = \frac{13\sqrt{146}}{25}$$

$$= \sqrt{39{,}7484} = 3{,}141591953\ldots.$$

Nun ist $\pi = 3{,}141592653\ldots.$ woraus zu ersehen, dafs die Construction den Umfang und Flächen-Inhalt des Kreises bis zur sechsten Decimal-Stelle genau giebt.

7.

Beweis zweier Lehrsätze

im zweiten Bande dieses Journals, Heft I. S. 97. No. 7. und Heft III. S. 292. No. 64.

(Von Herrn *Remy*, Stud. phil. zu Berlin.)

1.

Lehrsatz. Halbirt man in einem Viereck im Kreise sowohl die Winkel zwischen den Diagonalen, als auch die Winkel, welche die gegenüberliegenden Seiten einschliefsen, so sind von den 6 Geraden, welche diese Winkel halbiren, 3 und 3 parallel.

Wenn nemlich *ABCD* (Fig. 14.) das gegebene Viereck im Kreise ist, und *RQ* und *HI*, *ST* und *UV* halbiren die Winkel, welche die gegenüberliegenden Seiten des Vierecks einschliefsen, *NM* und *OP* hingegen die Winkel zwischen den Diagonalen des Vierecks, so ist zu beweisen, dafs:

1) *RQ*, *OP*, *UV* und
2) *ST*, *NM*, *HI*

parallel sind.

Beweis. Zuerst ist klar, dafs *RQ* und *HI*, *ST* und *UV*, *NM* und *OP* auf einander senkrecht stehen. Denn es ist z. B. $AGQ = \frac{1}{2}AGD$, $AGH = \frac{1}{2}AGK$, also $AGQ + AGH = \frac{1}{2}(AGD + AGK)$, oder $HGQ = \frac{1}{2}.2R = R$, wo R einen rechten Winkel bezeichnet. Dasselbe gilt von den Halbirungs-Linien *ST*, *UV* und *OP*, *NM*.

Verlängert man nun die Halbirungs-Linie *RQ* bis *F*, so läfst sich zeigen, dafs *RF* auf *NM* senkrecht steht. Denn in den Dreiecken *NBE* und *ECM* sind die Winkel z und u einander gleich, weil sie auf gleichen Bogen stehen, desgleichen sind die Winkel v und t, als Hälften der Scheitel-Winkel *AEB* und *DEC*, gleich, folglich ist auch $\angle x = \angle y$, und mithin ist das Dreieck *NGM* über *NM* gleichschenklig. Also steht die Halbirungs-Linie *GF* des Winkels an der Spitze dieses Dreiecks senkrecht auf der Grundlinie *NM*. Da nun auch *OP* senkrecht auf *NM* stehet, so folgt, dafs die Halbirungs-Linien *RQ* und *OP* parallel sind. Ferner sind die Linien *HI* und *NM* parallel, wegen der rechten

Winkel *EFG* und *HGF*. Auf dieselbe Weise folgt, dafs *ST* und *NM*, und wegen der rechten Winkel *HWE* und *WHV*, auch *UV* und *PO* parallel sind. Es ist also *QR* mit *PO*, *UV* mit *PO*, und folglich *QR* mit *UV*, desgleichen *HI* mit *NM* und *ST* mit *NM*, folglich *HI* mit *ST* parallel, so dafs also von den 6 Halbirungs-Linien 3 und 3 parallel sind.

2.

Lehrsatz. Sind a, b, c, d die Seiten, e, f die Diagonalen eines sphärischen Vierecks, und ist g derjenige Hauptkreisbogen, welcher die Mitten der beiden Diagonalen verbindet, so ist allemal

$$\cos a + \cos b + \cos c + \cos d = 4\cos\tfrac{1}{2}e\cos\tfrac{1}{2}f\cos g.$$

(Am bezeichneten Orte steht durch einen Druckfehler $2\cos\frac{1}{2}e\cos\frac{1}{2}f\cos g$ statt $4\cos\frac{1}{2}e\cos\frac{1}{2}f\cos g$.)

Beweis. Es sei *ABCD* (Fig. 15.) das sphärische Viereck, und $CF = FB$, $AG = GD$. Bezeichnet man nun in dem sphärischen Dreieck *ACF* die Seite *AF* durch r und den Winkel *AFC* durch α, so ist bekanntlich:

$$\cos a = \cos r\cos\tfrac{1}{2}e + \cos\alpha\sin\tfrac{1}{2}e\sin r,$$

und in dem sphärischen Dreieck *ABF*

$$\cos b = \cos r\cos\tfrac{1}{2}e - \cos\alpha\sin\tfrac{1}{2}e\sin r,$$

folglich 1) $\cos a + \cos b = 2\cos r\cos\frac{1}{2}e.$

Eben so erhält man für die sphärischen Dreiecke *BFD* und *CFD*, wenn man die Seite *FD* durch ϱ und den Winkel *BFD* durch β bezeichnet:

$$\cos c = \cos\varrho\cos\tfrac{1}{2}e + \cos\beta\sin\varrho\sin\tfrac{1}{2}e \text{ und}$$
$$\cos d = \cos\varrho\cos\tfrac{1}{2}e - \cos\beta\sin\varrho\sin\tfrac{1}{2}e,$$

folglich 2) $\cos c + \cos d = 2\cos\varrho\cos\frac{1}{2}e.$

Addirt man nun die Gleichungen (1. und 2.), so ist:

3) $\cos a + \cos b + \cos c + \cos d = 2\cos\frac{1}{2}e(\cos r + \cos\varrho).$

Auf dieselbe Weise, wie oben, erhält man aber auch, wenn man den Winkel *AGF* durch γ bezeichnet:

$$\cos r = \cos\tfrac{1}{2}f\cos g + \cos\gamma\sin\tfrac{1}{2}f\sin\gamma \text{ und}$$
$$\cos\varrho = \cos\tfrac{1}{2}f\cos g - \cos\gamma\sin\tfrac{1}{2}f\sin\gamma,$$

folglich 4) $\cos r + \cos\varrho = 2\cos\frac{1}{2}f\cos g,$

und substituirt man diesen Werth für $\cos r + \cos\varrho$ in die Gleichung (3.), so erhält man:

$$\cos a + \cos b + \cos c + \cos d = 4\cos\tfrac{1}{2}e\cos\tfrac{1}{2}f\cos g.$$

8.

Addition au Mémoire de M. Abel sur les fonctions elliptiques, inseré dans le vol. II. de ce journal, cah. 2. pag. 101.

(Par Mr. *C. G. J. Jacobi* à Königsberg.)

M. Abel dans son excellent Mémoire sur les fonctions elliptiques a prouvé le premier, que les équations du degré nn, desquelles depend la division d'une fonction elliptique de première espèce en n parties, peuvent être resolues algébriquement. Cependant la méthode de cet auteur est susceptible d'une grande simplification. Je veux la proposer ici en deux mots, en me servant de la notation de M. Abel.

Si l'on désigne par p, q deux racines quelconques de l'équation $x^{2n+1} - 1 = 0$, on aura l'expression

$$\sum_{-n}^{+n}{}_m \sum_{-n}^{+n}{}_\mu \left\{\varphi\left(\beta + \frac{2m\omega + 2\mu\varpi i}{2n+1}\right) p^m q^n\right\}$$

égale à une expression de la forme

$$\sqrt[2n+1]{\left(A + Bf((2n+1)\beta)\, F(2(n+1)\beta)\right)},$$

A et B étant des fonctions rationelles et entières de $\varphi((2n+1)\beta)$. Or en donnant à p et q toutes leurs valeurs possibles, on pourra au moyen de ces expressions, qui seront au nombre $(2n+1)^2$, exprimer linéairement toutes les racines, sans avoir besoin de résoudre encore une équation du $n^{\text{ième}}$ degré. Aussi on saura exprimer toutes les racines au moyen des puissances entières de deux de ces expressions.

Königsberg, 25. Janvier 1828.

9.

Die Function $\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\ldots.$ durch die Anzahl der a ausgedrückt.

In Folge der Aufgabe 40. S. 193. im zweiten Bande dieses Journals.

(Von Herrn *Th. Clausen* zu Altona.)

Es sei $\varphi(x)$ der Werth dieser Function für die Anzahl x; so ist, wie man leicht sieht:

$$\varphi(x+1) = \frac{1}{a+\varphi(x)}, \text{ oder}$$

$$(1.)\quad \varphi(x+1)\,\varphi(x)+a\,\varphi(x+1)=1 \ldots\ldots$$

Man nehme an, dafs x eine ganze positive Zahl sei und setze

$$\frac{1}{\varphi(x)\cdot\varphi(x-1)\ldots\varphi(1)} = F(x).$$

Multiplicirt man also die Gleichung (1.) mit $F(x+1)$, so verwandelt sie sieh in:

$$F(x-1)+aF(x) = F(x+1).$$

Dieser Gleichung thut man Genüge durch die Annahme $F(x)=k\beta^x$, und findet dann zur Bestimmung von β folgende Gleichung:

$$\beta^2-a\beta-1=0,$$

woraus $\beta = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{4}a^2+1)}$ folgt. Es ist also:

$$(2.)\quad F(x) = k[\tfrac{1}{2}a+\sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2+1)}]^x + k'[\tfrac{1}{2}a-\sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2+1)}]^x \ldots\ldots$$

Um die Constanten k und k' zu bestimmen, bemerke ich, dafs $F(0)=1$ und $F(1)=a$ ist; und also:

$$1 = k+k',$$

$$a = \tfrac{1}{2}a(k+k')+\sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2+1)}(k-k');\ \text{folglich}$$

$$k = +\frac{1}{2\sqrt{(\frac{1}{4}a^2+1)}}[\tfrac{1}{2}a+\sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2+1)}],$$

$$k' = -\frac{1}{2\sqrt{(\frac{1}{4}a^2+1)}}[\tfrac{1}{2}a-\sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2+1)}],$$

und demnach:

$$F(x) = \frac{1}{2\sqrt{(\frac{1}{4}a^2+1)}}\{[\tfrac{1}{2}a+\sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2+1)}]^x-[\tfrac{1}{2}a-\sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2+1)}]^x\},$$

oder endlich, da $\varphi(x) = \frac{F(x-1)}{F(x)}$ ist:

$$(3.)\quad \varphi(x) = \frac{[\frac{1}{2}a+\sqrt{(\frac{1}{4}a^2+1)}]^x - [\frac{1}{2}a-\sqrt{(\frac{1}{4}a^2+1)}]^x}{[\frac{1}{2}a+\sqrt{(\frac{1}{4}a^2+1)}]^{x+1} - [\frac{1}{2}a-\sqrt{(\frac{1}{4}a^2+1)}]^{x+1}} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

Diese Gleichung enthält also den Werth der obenstehenden Function durch die Anzahl der Glieder x ausgedrückt, für jedes ganze positive x; und zwar in solcher Form, dafs man ihn ohne Weiteres auf jeden beliebigen Werth von x ausdehnen kann.

Ich füge noch einige merkwürdige Eigenschaften dieser Function, hinzu:

$$(4.)\quad \varphi(x+y) = \frac{\varphi(x)+\varphi(y)-a\,.\,\varphi(x)\,\varphi(y)}{1+\varphi(x)\,\varphi(y)} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

deren Richtigkeit sich durch Substitution der Gleichung (3.) zeigt.

Man hat ferner vermöge der Gleichung (1.):

$\varphi(-1) = \infty,$

$\varphi(-2) = -a,$

$\varphi(-2)\varphi(-3) = 1 - a\varphi(-2),$

$\varphi(-2)\varphi(-3)\varphi(-4) = \varphi(-2) - a\varphi(-2)\varphi(-3),$

$\varphi(-2)\varphi(-3)....\varphi(-n) = \varphi(-2)\varphi(-3)....\varphi[-(n-2)] - a\varphi(-2)....\varphi[-(n-1)].$

Durch Hülfe dieser Gleichungen und der Gleichung (1.) findet man, dafs die Reihe:

$$(5.)\quad \varphi(nx) =$$

$$\frac{n.\varphi(x) + \frac{n.n-1}{1.2}\varphi(-2)\,\varphi(x)^2 + \frac{n.n-1.n-2}{1\,.\,2\,.\,3}\varphi(-2)\,\varphi(-3)\,\varphi(x)^3 + \text{etc.}}{1 + \frac{n.n-1}{1.2}\varphi(x)^2 + \frac{n.n-1.n-2}{1\,.\,2\,.\,3}\varphi(-2)\varphi(x)^3 + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\varphi(-2)\varphi(-3)\varphi(x)^4 + \text{etc.}}$$

wenn sie für den Werth n gilt, auch für $n+1$ richtig ist. Da sie aber für $n = 2$ gilt, so folgt daraus die Richtigkeit für alle Fälle, wo n eine ganze positive Zahl ist. Aus der Gleichung (3.) sieht man noch, dafs

$$(6.)\quad \varphi(-\tfrac{1}{2}) = \sqrt{-1}.$$

10.

Ueber die Fälle, wenn die Reihe von der Form

$$y=1+\frac{\alpha}{1}\cdot\frac{\beta}{\gamma}x+\frac{\alpha.\alpha+1}{1.2}\cdot\frac{\beta.\beta+1}{\gamma.\gamma+1}x^2+\text{etc.}$$

ein Quadrat von der Form

$$z=1+\frac{\alpha'}{1}\cdot\frac{\beta'}{\gamma'}\cdot\frac{\delta'}{\varepsilon'}x+\frac{\alpha'.\alpha'+1}{1.2}\cdot\frac{\beta'.\beta'+1}{\gamma'.\gamma'+1}\cdot\frac{\delta'.\delta'+1}{\varepsilon'.\varepsilon'+1}x^2+\text{etc. hat.}$$

(Von Herrn *Th. Clausen* zu Altona.)

Zwischen den Differentialen von y und x findet folgende Relation Statt:

$$(1.)\quad (x^3-x^2)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\{(\alpha+\beta+1)x^2-\gamma x\}\frac{\partial y}{\partial x}+\alpha\beta xy=0.$$

Eine nochmalige Differentiation giebt:

$$(2.)\quad (x^3-x^2)\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}+\{(\alpha+\beta+4)x^2-(\gamma+2)x\}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$
$$+\{(2\alpha+2\beta+\alpha\beta+2)x-\gamma\}\frac{\partial y}{\partial x}+\alpha\beta y=0.$$

Die Reihe z giebt:

$$(3.)\quad (x^3-x^2)\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}+\{(3+\alpha'+\beta'+\delta')x^2-(1+\gamma'+\varepsilon')x\}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$
$$+\{(1+\alpha'+\beta'+\delta'+\alpha'\beta'+\alpha'\delta'+\beta'\delta')x-\gamma'\varepsilon'\}\frac{\partial z}{\partial x}+\alpha'\beta'\delta' z.$$

Soll nun $z=y^2$ sein, so mufs man haben:

$$(4.)\quad \begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=2y\frac{\partial y}{\partial x},\\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2y\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+2\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2,\\ \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}=2y\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}+6\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.\end{cases}$$

Setzt man noch

$$(5.)\quad \begin{cases}a'=\alpha'+\beta'+\delta',\\ b'=\alpha'\beta'+\alpha'\delta'+\beta'\delta',\\ c'=\alpha'\beta'\delta',\\ d'=\varepsilon'+\gamma',\\ e'=\varepsilon'\gamma',\end{cases}$$

so wird die Gleichung (3.):

$$(6.)\quad (x^3-x^2)\,2y\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}+\{(3+a')x^2-(1+d')x\}\,2y\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$
$$+\{(1+a'+b')x-e'\}.2y\frac{\partial y}{\partial x}+c'y^2+6(x^3-x^2)\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$
$$+2\{(3+a')x^2-(1+d')x\}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2=0.$$

Dieser mufs durch die Gleichungen (1.) und (2.) Genüge gethan werden. Multiplicirt man sie deswegen resp. mit $2y\frac{A}{x}+\frac{\partial y}{\partial x}.B$ und $2y$, welche Form, wie man leicht sieht, die Factoren nur haben können: so mufs die Summe mit der Gleichung (6.) identisch sein. Man erhält durch Vergleichung der einzelnen Coefficienten:

$$\begin{aligned}
3+a' &= A+\alpha+\beta+4\\
1+d' &= A+\gamma+2\\
1+a'+b' &= A(\alpha+\beta+1)+\tfrac{1}{2}B\alpha\beta+2\alpha+2\beta+\alpha\beta+2\\
e' &= A\gamma+\gamma\\
c' &= 2A\alpha\beta+2\alpha\beta\\
b &= B\\
2(3+a') &= B(\alpha+\beta+1)\\
2(1+d') &= B\gamma
\end{aligned}$$

woraus folgt:

$$\begin{aligned}
\gamma &= \alpha+\beta+\tfrac{1}{2}\\
A &= 2\alpha+2\beta-1\\
B &= b\\
a' &= 3\alpha+3\beta\\
b' &= 2\alpha^2+8\alpha\beta+2\beta^2\\
c' &= 4(\alpha+\beta)\alpha\beta\\
d' &= 3\gamma-1\\
e' &= (2\gamma-1)\gamma.
\end{aligned}$$

Aus den Gleichungen (5.) sieht man, dafs α', β' und δ' die Wurzeln der cubischen Gleichung $x^3-a'x^2+b'x-c'$ sind; man findet diese leicht 2α, 2β und $\alpha+\beta$. Ferner sind γ' und ε' die Wurzeln der quadratischen Gleichung $x^2-d'x+e'$, die sich γ und $2\gamma-1$ ergeben.

Aus dem Vorhergehenden folgt also, dafs, damit das Quadrat der Reihe y von der Form z sei, die Relation Statt finden müsse:

$$\gamma=\alpha+\beta+\tfrac{1}{2},$$

und dafs dann die Werthe von α', β' und δ', die unter sich verwechselt werden können:

$$2\alpha,\ 2\beta,\ \alpha+\beta,$$

die Werthe von γ' und ε' aber, die ebenfalls unter sich verwechselt werden können,

$$\gamma,\ 2\gamma-1$$

sind.

Als Beispiel will ich suchen, in welchen Fällen die Coefficienten von z Cubi sein können. Hier ist $\gamma'=\varepsilon'=1$, mithin $\gamma=1$; überdem $\alpha=\beta$; folglich da $\gamma=\alpha+\beta+\frac{1}{2}$ ist, $\alpha=\frac{1}{4}$. Wir haben also in diesem Fall die Reihe:

$$y = 1+\left(\frac{1}{4}\right)^2x+\left(\frac{1.5}{4.8}\right)^2x^2+\left(\frac{1.5.9}{4.8.12}\right)^2x^3+\text{ etc.}$$

$$z = yy = 1+\left(\frac{1}{2}\right)^3x+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^3x^2+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^3x^3+\text{ etc.}$$

Ein zweites Beispiel sei die Reihe:

$$y=\frac{\text{arc. sin}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=1+\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{3}x+\frac{1.3}{2.4}\cdot\tfrac{1}{5}x^2+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\tfrac{1}{7}x^3+\text{ etc.}$$

Hier ist $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=\frac{1}{2}$, $\gamma=\frac{3}{2}$, mithin die erforderliche Bedingung erfüllt; es folgt also α', β', $\delta'=1,\ 1,\ 1$; γ', $\varepsilon'=\frac{3}{2},\ 2$. Demnach

$$z=\frac{(\text{arc. sin}\sqrt{x})^2}{x}=1+\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{1}{2}x+\frac{2.4}{3.5}\cdot\tfrac{1}{3}x^2+\frac{2.4.6}{3.5.7}\cdot\tfrac{1}{4}x^3+\text{ etc.}$$

11.
Beitrag zur Theorie der Reihen.

(Von Herrn *Th. Clausen* zu Altona.)

Da es häufig vorkommt, dafs man das Product zweier Reihen sucht: so glaube ich, dafs die Auflösung der Aufgabe: zu finden in welchen Fällen das Product der zwei Reihen

$$y=1+\frac{\alpha}{1}\cdot\frac{\beta}{\gamma}x+\frac{\alpha.\alpha+1}{1.2}\cdot\frac{\beta.\beta+1}{\gamma.\gamma+1}x^2+\frac{\alpha.\alpha+1.\alpha+2}{1.2.3}\cdot\frac{\beta.\beta+1.\beta+2}{\gamma.\gamma+1.\gamma+2}x^3+\ldots.$$

$$z=1+\frac{\alpha'}{1}\cdot\frac{\beta'}{\gamma'}x+\frac{\alpha'.\alpha'+1}{1.2}\cdot\frac{\beta'.\beta'+1}{\gamma'.\gamma'+1}x^2+\frac{\alpha'.\alpha'+1.\alpha'+2}{1.2.3}\cdot\frac{\beta'.\beta'+1.\beta'+2}{\gamma'.\gamma'+1.\gamma'+2}x^3+\ldots.$$

von der Form

$$u=1+\frac{a}{1}\cdot\frac{b}{d}\frac{c}{e}x+\frac{a.a+1}{1.2}\cdot\frac{b.b+1}{d.d+1}\cdot\frac{c.c+1}{e.e+1}x^2$$
$$+\frac{a.a+1.a+2}{1.2.3}\cdot\frac{b.b+1.b+2}{d.d+1.d+2}\cdot\frac{c.c+1.c+2}{e.e+1.e+2}x^3+\ldots.$$

sey, nicht uninteressant sein dürfte.

Die Eigenschaften dieser Reihen werden durch folgende Differentialgleichungen ausgedrückt:

(1.) $(x^2-x)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\{(1+\alpha+\beta)x-\gamma\}\frac{\partial y}{\partial x}+\alpha\beta y=0.$

(2.) $(x^2-x)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\{(1+\alpha'+\beta')x-\gamma'\}\frac{\partial z}{\partial x}+\alpha'\beta' z=0.$

(3.) $(x^2-x)\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}+\{(3+\alpha+\beta)x-(1+\gamma)\}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+(1+\alpha+\beta+\alpha\beta)\frac{\partial y}{\partial x}=0$

(4.) $(x^2-x)\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}+\{(3+\alpha'+\beta')x-(1+\gamma')\}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+(1+\alpha'+\beta'+\alpha'\beta')\frac{\partial z}{\partial x}=0.$

(5.) $(x^3-x^2)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\{(3+a+b+c)x^2-(1+d+e)x\}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$
$$+\{(1+a+b+c+ab+ac+bc)x-de\}\frac{\partial u}{\partial x}+abcu=0.$$

Es sei nun

$$u=yz, \text{ so ist}$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}=z\frac{\partial y}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial x},$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=z\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x},$$
$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=z\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}+y\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}+3\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+3\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

Nach Substitution dieser Werthe mufs der Gleichung (5.) durch (1.), (2.), (3.) und (4.) Genüge gethan werden. Multiplicirt man also diese resp. mit $Az+Bx.\frac{\partial z}{\partial x}$, $Cy+Dx.\frac{\partial y}{\partial x}$, xz, xy (die Factoren können nemlich nur diese Form haben), und vergleicht die Summe der Producte mit der Gleichung (5.), so findet man folgende Gleichungen:

$$3+a+b+c=3+\alpha+\beta+A \tag{6.}$$
$$=3+\alpha'+\beta'+C \tag{7.}$$
$$1+d+e=1+\gamma+A \tag{8.}$$
$$=1+\gamma'+C \tag{9.}$$
$$3=B \tag{10.}$$
$$3=D \tag{11.}$$
$$2(3+a+b+c)=B(1+\alpha+\beta)+D(1+\alpha'+\beta') \tag{12.}$$
$$2(1+d+e)=B\gamma+D\gamma' \tag{13.}$$
$$1+a+b+c+ab+ac+bc=1+\alpha+\beta+\alpha\beta+(1+\alpha+\beta)A+\alpha'\beta'D \tag{14.}$$
$$=1+\alpha'+\beta'+\alpha'\beta'+(1+\alpha'+\beta')C+\alpha\beta B \tag{15.}$$
$$de=\gamma A \tag{16.}$$
$$=\gamma' C \tag{17.}$$
$$abc=\alpha\beta A+\alpha'\beta' C. \tag{18.}$$

Diese 13 Gleichungen geben aufser der Bestimmung der 9 Gröfsen A, B, C, D, a, b, c, d, e noch 4 Bedingungsgleichungen zwischen α, β, γ, α', β', γ'. Durch (6.) .... (13.) findet man:

$$A=\tfrac{1}{2}\gamma+\tfrac{3}{2}\gamma'-1 \tag{19.}$$
$$B=3 \tag{20.}$$
$$C=\tfrac{3}{2}\gamma+\tfrac{1}{2}\gamma'-1 \tag{21.}$$
$$D=3 \tag{22.}$$
$$a+b+c=\tfrac{3}{2}(\alpha+\beta+\alpha'+\beta') \tag{23.}$$
$$d+e=\tfrac{3}{2}(\gamma+\gamma')-1 \tag{24.}$$

und die Bedingungsgleichungen:

$$\alpha+\beta=\gamma-\tfrac{1}{2} \tag{25.}$$
$$\alpha'+\beta'=\gamma'-\tfrac{1}{2}, \tag{26.}$$

durch deren Hülfe man ferner aus (14.) .... (17.) folgende zwei findet:

$$\gamma-\gamma'=4(\alpha\beta-\alpha'\beta') \tag{27.}$$
$$\gamma(\gamma-2)=\gamma'(\gamma'-2). \tag{28.}$$

Diesen letzteren kann auf zwei Arten Genüge gethan werden: I. durch die Annahme $\gamma=\gamma'$; die Gleichungen (25.), (26.), (27.) geben

in diesem Fall:

$$\alpha+\beta=\alpha'+\beta'$$
$$\alpha\beta=\alpha'\beta',$$

mithin wären die beiden Reihen y und z einander gleich, welchen Fall ich schon früher behandelt habe *), und also hier übergehe; II. durch die Gleichung $\gamma'=2-\gamma$; und dann giebt die Addition von (25.) und (26.)

(29.) $\alpha+\beta+\alpha'+\beta'=\gamma+\gamma'-1=1,$

die Subtraction und Vergleichung mit (27.):

(30.) $\gamma-\gamma'=\alpha+\beta-(\alpha'+\beta')=4\alpha\beta-4\alpha'\beta',$

aus welchen beiden Gleichungen

(31.) $\alpha'=\frac{1}{2}-\alpha$

(32.) $\beta'=\frac{1}{2}-\beta$ folgt.

Mit den 4 Bedingungsgleichungen (25.), (26.), (31.) und (32.) findet man nun leicht:

(33.) $a+b+c=\frac{3}{2}$

(34.) $ab+ac+bc=\frac{3}{4}-(\alpha-\beta)^2$

(35.) $abc=\frac{1}{8}-\frac{1}{2}(\alpha-\beta)^2$

woraus sich für a, b, c die Werthe:

$$\begin{matrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}+\alpha-\beta\\ \frac{1}{2}-\alpha+\beta\end{matrix}$$

ergeben. Ferner

(36.) $d+e=\gamma+\gamma'$

(37.) $de=\gamma\gamma'.$

Wir haben also, wenn das Product der zwei verschiedenen Reihen y und z von der Form u ist, welches mit den 4 Bedingungen:

$$\alpha+\beta=\gamma-\frac{1}{2}$$
$$\alpha'=\frac{1}{2}-\alpha$$
$$\beta'=\frac{1}{2}-\beta$$
$$\gamma'=2-\gamma$$

zugleich Statt findet, die Werthe von a, b, c (die unter sich verwechselt werden können):

$$\begin{matrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}+\alpha-\beta\\ \frac{1}{2}-\alpha+\beta\end{matrix}$$

*) Hier oben Seite 89.

und die Werthe von d, e:

$$\gamma$$
$$2-\gamma.$$

Als Beispiel mögen die beiden Reihen

$$y = 1 + \frac{4}{7}x + \frac{4.6}{7.9}x^2 + \frac{4.6.8}{7.9.11}x^3 + \ldots\ldots$$

$$z = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1.1}{2.4}x^2 - \frac{1.1.3}{2.4.6}x^3 - \ldots\ldots$$

dienen. Hier ist $\alpha = 1$, $\beta = \frac{4}{2}$, $\gamma = \frac{7}{2}$, $\alpha' = -\frac{1}{2}$, $\beta' = -\frac{3}{2}$, $\gamma' = -\frac{3}{2}$, und demnach sind die erforderlichen Bedingungen erfüllt. Es wird also $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$, $c = \frac{3}{2}$, $d = \frac{7}{2}$, $e = -\frac{3}{2}$, und folglich

$$u = yz = 1 + \frac{1.1.3}{2.7.3}x - \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1.1}{7.9}\cdot\frac{3.5}{3.1}x^2 - \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1.1.3}{7.9.11}\cdot\frac{3.5.7}{3.1.1}x^3$$
$$- \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\frac{1.1.3.5}{7.9.11.13}\cdot\frac{3.5.7.9}{3.1.1.3}x^4 - \ldots\ldots$$

$$u = 1 + \frac{5.1}{5.7}\cdot\frac{1}{2}x - \frac{5.1}{7.9}\cdot\frac{1.3}{2.4}x^2 - \frac{5.3}{9.11}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}x^3 - \frac{5.5}{11.13}\cdot\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x^4 - \ldots\ldots$$

In einem Schreiben des Herrn Verfassers obigen Aufsatzes an den Herausgeber dieses Journals bemerkt derselbe, dafs sich die Lambertische Reihe $x + 2x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 2x^5 + 4x^6 + 2x^7 + \ldots\ldots$, welche gleich

$$\frac{x}{1-x} + \frac{x^2}{1-x^2} + \frac{x^3}{1-x^3} + \ldots\ldots + \frac{x^n}{1-x^n} + \ldots\ldots$$

ist, und in welcher die Exponenten der Glieder, welche 2 zum Coefficienten haben, der Reihe nach Primzahlen, die Coefficienten der übrigen Glieder aber die Zahlen der ganzzahligen Theiler der Exponenten der nemlichen Glieder sind (man sehe die Aufgabe 16. S. 99. im 2ten Bande dieses Journals) in folgende Reihe:

$$x\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + x^4\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right) + x^9\left(\frac{1+x^3}{1-x^3}\right) + x^{16}\left(\frac{1+x^4}{1-x^4}\right) + \ldots\ldots + x^{n^2}\left(\frac{1+x^n}{1-x^n}\right) + \ldots\ldots$$

verwandeln lasse, welche für ein sehr kleines x sehr schnell convergirt.

12.
Aufgaben und Lehrsätze,
erstere aufzulösen, letztere zu beweisen.

Lehrsätze über den Zusammenhang von Combinationen mit Variationen und jener unter einander; von Herrn Prof. *Scherk* zu Halle.

1. Man bilde alle Variations-Formen der $(h+1)$ten Classe, und zur Summe $h+k$ aus den Gröfsen $1, 2, 3, \ldots . k$. Jede derselben werde durch $\overset{1}{m}, \overset{2}{m}, \overset{3}{m}, \ldots . \overset{h+1}{m}$ dargestellt. Setzt man nun $\overset{1}{m} = \overset{1}{s}$; $\overset{1}{s}+\overset{2}{m}-1 = \overset{2}{s}$; $\overset{2}{s}+\overset{3}{m}-1 = \overset{3}{s}$, $\ldots . \overset{h-1}{s}+\overset{h}{m}-1 = \overset{h}{s}$, so ist der Complexus der Combinationen, mit Wiederholungen aus denselben Gröfsen $1, 2, 3, \ldots . k$; zur $h$ten Classe, $= \Sigma \overset{1}{s}\overset{2}{s}\overset{3}{s} \ldots . \overset{h}{s}$, wo das Summenzeichen sich auf alle verschiedenen Variations-Formen erstreckt.

Ist z. B. $h = 2$, $k = 3$, so sind alle Combinationen zur 3ten Classe und zur Summe s aus den Gröfsen $1, 2, 3, = 113, 122$, also die Variationen 113, 131, 311, 122, 212, 221. Hieraus erhält man nach der angegebenen Regel 11, 13, 33, 12, 22, 23, oder geordnet: 11, 12, 13, 22, 23, 33, welches die Combinationen der 2ten Classe mit Wiederholungen aus den gegebenen Gröfsen 1, 2, 3 sind.

2. Bildet man auf dieselbe Weise alle Variations-Formen der $(h+1)$ten Classe und zur Summe $k+1$ aus den Gröfsen $1, 2, 3, \ldots . (k-h+1)$, und verfährt ganz wie vorher, so ist der Complexus der Combinationen ohne Wiederholungen aus den Gröfsen $1, 2, 3, \ldots . k$, zur $h$ten Classe, $= \Sigma \overset{1}{s}(\overset{2}{s}+1)(\overset{3}{s}+2) \ldots . (\overset{h}{s}+h-1)$. Ist z. B. $h = 3$, $k = 5$, so sind alle Combinationen zur 4ten Classe, und zur Summe 6, aus den Gröfsen 1, 2, 3, = 1113, 1122, folglich die Variationen, 1113, 1131, 1311, 3111, 1122, 1212, 1221, 2112, 2121, 2211. Hieraus erhält man nach der angegebenen Regel, 123, 125, 145, 345, 124, 134, 135, 234, 235, 245, oder geordnet: 123, 124, 125, 134, 135, 145, 234, 235, 245, 345, welches die Combinationen, ohne Wiederholungen aus den Gröfsen 1, 2, 3, 4, 5 zur dritten Classe sind.

3.

3) Man bilde alle Combinations-Formen ohne Wiederholungen zur $h$ten Classe aus den Gröfsen 1, 2, 3, ... $k-h+1$, ziehe von jeder in der ersten Stelle jeder Form stehenden Zahl 0, von jeder in der 2ten Stelle stehenden Zahl 1, in der 3ten 2, ... in der $h$ten $h-1$ ab, so erhält man alle Combinationen mit Wiederholungen zur $h$ten Classe aus den Gröfsen 1, 2, 3, ... k, und zwar so, dafs diese nach demselben Prinzip geordnet sind, nach welchem jene geordnet waren. Ist z. B. $h=3$, $k=3$, so sind alle Combinationen ohne Wiederholungen aus den Gröfsen 1, 2, 3, 4, 5 zur 3ten Classe, auf gewöhnliche Weise geordnet:

1.2.3, 1.2.4, 1.2.5, 1.3.4, 1.3.5, 1.4.5, 2.3.4, 2.3.5, 2.4.5, 3.4.5,
hiervon ab: 0.1.2, 0.1.2, 0.1.2, 0.1.2, 0.1.2, 0.1.2, 0.1.2, 0.1.2, 0.1.2, 0.1.2,
bleibt: 1.1.1, 1.1.2, 1.1.3, 1.2.2, 1.2.3, 1.3.3, 2.2.2, 2.2.3, 2.3.3, 3.3.3,

also die Combinationen mit Wiederholungen aus den Gröfsen 1, 2, 3 zur 3ten Classe.

Es bedarf keiner Erwähnung, dafs alle drei Sätze auch umgekehrt ausgesprochen werden können. Da aber jeder von ihnen eine Folge der beiden anderen ist, so braucht man nur zwei derselben (etwa einen der beiden ersten und den letzten, weil es bei diesen leicht angehet) zu beweisen, und zwar wünscht man, dafs dieser Beweis rein combinatorisch sei.

Aufgaben von Anderen *).

4) Man beweiset, dafs jede auf Null gebrachte algebraische Gleichung mit Einer unbekannten Gröfse, in welcher die Exponenten der Potenzen der unbekannten Gröfse ganze Zahlen sind, nothwendig entweder reelle oder imaginaire Wurzeln hat. Z. B. Cauchy thut es sehr sinnreich in seinem *Cours d'analyse, tome I. p.* 331. *etc.* Der Beweis geht davon aus, dafs jede reelle oder imaginaire Gröfse durch $u+v\sqrt{-1}$ ausgedrückt werden kann, wo u und v, wie es der Beweis fordert, nothwendig reelle Gröfsen sind. Haben die Wurzeln einer beliebigen Gleichung diese Form, so folgt von selbst, dafs sie Paarweise $u+v\sqrt{-1}$ und $u-v\sqrt{-1}$ da sein müssen, weil $\sqrt{-1}$ die Zeichen $+$ und $-$ zugleich hat. Sind nun aber u und v reell, so bezeichnet der Ausdruck

*) Man sehe wegen der Ueberschrift „Von Anderen" hier und in der Folge die Bemerkung S. 395. im 2. Bande dieses Journals.

$u \pm v\sqrt{-1}$ eine reelle Gröfse nur dann, wenn v Null ist, welches dann auf zwei gleiche Wurzeln deutet. Dieses trifft aber schon bei der quadratischen Gleichung, z. B. $x^2 - ax + b^2 = 0$ nicht zu, wo zwar die Wurzeln allerdings von der Form $u \pm v\sqrt{-1}$ sind, aber v, im Falle $a^2 > 4b$ ist, nicht Null sein kann, sondern vielmehr imaginair ist. Dieses schon scheint einer Erläuterung zu bedürfen.

Ferner ist bekanntlich leicht zu zeigen, dafs einer Gleichung vom $n$ten Grade, sobald man ihr Eine Wurzel zugestehet, dann nothwendig n zukommen. Es fragt sich aber, ob überhaupt nach der Existenz Einer Wurzel gefragt werden kann. Im Allgemeinen scheint es, wenn man z. B. schreibt:

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} \ldots + a_n = 0,$$

Voraussetzung zu sein, dafs dann x wirklich existire, nemlich als Zeichen, nicht als Gröfse. Fragt man nach der Existenz der Wurzel als Gröfse, so kann man dieselbe, wie es scheint, nicht beweisen wollen, weil selbst eine einzelne Wurzel wirklich nicht immer existirt Denn eine Gleichung mit lauter imaginairen Wurzeln hat wirklich keine Wurzel (als Gröfse betrachtet).

Endlich scheint es, dafs man den Wurzeln einer Gleichung, indem man ihnen den Ausdruck $u \pm v\sqrt{-1}$ zuschreibt, geschlossene algebraische Ausdrücke gebe. Gleichwohl beweisen Riccati und Abel (letzterer im 1sten Heft des 1sten Bandes dieses Journals S. 65.), dafs den Gleichungen von höherem als dem vierten Grade nicht allgemein geschlossene algebraische Ausdrücke der Wurzeln genug thun.

Es fragt sich also, eines Theils, was eigentlich in Rücksicht der Existenz der Wurzeln einer algebraischen Gleichung zu beweisen gefordert werden könne und müsse, wie der zu beweisende Satz eigentlich zu verstehen sei, und dann, wie er mit der behaupteten Nicht-Existenz allgemeiner algebraischer Ausdrücke der Wurzeln höherer Gleichungen zu vereinigen sei.

In jedem Falle scheint dieser Gegenstand nicht völlig aufgeklärt, und es wäre wohl zu wünschen, dafs es geschehe, und zwar auf eine Weise, die so deutlich wäre, dafs sie sich, wie man zu sagen pflegt, für die Elemente eigne. Möglich mufs diese sogenannte elementare Darstellung nothwendig sein, so viele Schlüsse auch bis zum Ziele mö-

GENERAL LIBRARY University of MICHIGAN

gen auf einander gehäuft werden müssen, denn was wahr ist, ist auch klar. Und umgekehrt, nur was klar ist, wenigstens in der Mathematik, ist wahr.

5. Die Curven in der Kugelfläche zu untersuchen, deren Gleichungen zwischen Abscissen und Ordinaten vom ersten und vom zweiten Grade sind, wenn man den Umfang eines beliebigen kleinen Kreises in der Kugel zur Abscissen-Axe, und die darauf senkrechten gröfsten Kreise zu Ordinaten nimmt.

6. Auf einer gegebenen krummen Fläche einen bestimmten Flächenraum mit der möglich-kürzesten Linie einzuschliefsen.

7. Die Gleichung einer krummen Fläche zwischen rechtwinkligen Coordinaten x, y und z ist gegeben. Man soll in der Fläche eine Curve so ziehen, dafs z. B. die z der Curve für gleich-lange Bogenstücke derselben gleich viel von einander verschieden sind.

8. Die Gleichung einer Curve im Raume ist gegeben. Man lege durch alle Puncte derselben und durch einen und denselben bestimmten Punct gerade Linien, so dafs eine Kegelfläche entsteht, deren Spitze der bestimmte Punct ist. Diese Kegelfläche werde von einer krummen Fläche geschnitten. Welche mufs die Gleichung dieser krummen Fläche sein, damit ihr Durchschnitt mit der Kegelfläche eine bestimmte Gestalt habe?

9. In einem cylinderförmigen Gefäfse, dessen Querschnitte, senkrecht auf die gerade Linie im Mantel des Cylinders, Kreise sind, und dessen Axe lothrecht steht, befinde sich eine schwere, unelastische Flüssigkeit, und das Gefäfs werde mit gleichförmiger Geschwindigkeit um die Axe gedrehet. Man sucht die Gestalt der Oberfläche der Flüssigkeit.

10. Bekanntlich können den 12 Tönen der chromatischen Tonleiter nicht völlig die reinen Verhältnisse gegeben werden, die ihnen auf dem Monochord zukommen, z. B. nicht alle Quinten können $\frac{2}{3}$, nicht alle Quarten $\frac{3}{4}$ etc. des Grundtons sein, weil 12 Quinten übereinander nicht 7 Octaven, 12 Quarten nicht 5 Octaven, u. s. w. ausmachen, indem $(\frac{2}{3})^{12}$ nicht gleich $(\frac{1}{2})^{7}$, $(\frac{3}{4})^{12}$ nicht gleich $(\frac{1}{2})^{5}$ ist etc. Die sogenannte gleichschwebende Temperatur vertheilt die nothwendige Abweichung gleichförmig. Sie ist aber der practischen Musik nicht günstig, weil sie einen vorzüglichen Reiz derselben, nemlich die Verschiedenheit der Tonarten, oder die Enharmonik aufhebt. Die Regeln anderer Temperaturen sind willkürlich.

Die beste für die Praxis dürfte sein, welche den verschiedenen Tonarten die meiste characteristische Verschiedenheit giebt, ohne den sogenannten vollkommenen Consonanzen und nach Verhältnifs den unvollkommenen zu viel von ihrer Reinheit zu nehmen. Wenn auch diese Regel für den Calcul noch zu unbestimmt sein mag, und auch vielleicht nicht gut bestimmter mag ausgedrückt werden können, so läfst sich doch fragen, ob Temperaturen möglich sind, in welchen die nothwendigen Abweichungen von der reinen Stimmung in den 12 verschiedenen, den 12 chromatischen Tönen zugehörigen diatonischen Tonleitern bei den vollkommenen Consonanzen wenigstens nicht gröfser sind, als bei den unvollkommenen, also z. B. bei den Quinten nicht gröfser als bei den Quarten, Terzen u. s. w. Wenn solche Temperaturen möglich sind, so werden die Regeln derselben und die zugehörigen enharmonischen Systeme verlangt.

13.

Ueber die Integration logarithmisch-rationaler Differentiale.

(Von Herrn Prof. Dr. *C. J. Hill* zu Lund *)).

Bekanntlich reduciren sich viele Aufgaben der Geometrie und Physik zuletzt auf die Auflösung von Gleichungen, welche in den schwierigeren Fällen sowohl die unbekannten Gröfsen als deren Ableitungen (Differential-Coefficienten) enthalten können. Zuweilen lassen sich in solchen Gleichungen entweder die veränderlichen Gröfsen absondern, oder es lassen sich wenigstens Ausdrücke für die unbekannten Gröfsen mit Hülfe bestimmter Integrale (*intégrales définies*) finden. In beiden Fällen beruhet zuletzt die Auflösung auf Integrationen nach Einer Veränderlichen, wie $\int dx.fx$, welche im Allgemeinen Quadraturen heifsen, und welche also für beliebige Functionen wie fx verlangt werden. Die Mathematik löset im Allgemeinen ihre Aufgaben durch vorausgerechnete Tafeln, in welchen für jeden Werth der willkürlich veränderlichen Gröfsen die zugehörigen Werthe der Functionen gefunden werden. Solche Tafeln sind also im Allgemeinen für jede Function, die in den Elementen des Calculs vorkommt, nothwendig. Wenn z. B. das Product zweier Zahlen verlangt wird, so findet man dasselbe in der Producten-Tafel, oder dem sogenannten Einmaleins. Ob die Tabelle niedergeschrieben sei, oder ob der Rechner sie im Gedächtnifs habe, ist offenbar gleichgültig.

*) Diese Abhandlung hatte der Herr Verfasser, zuvorkommend gefällig, schon an seinem Wohnort ins Deutsche übersetzen lassen. Allein die Uebersetzung war zu wenig verständlich. Um den Herrn Verfasser nicht noch mehr zu bemühen, hat der Herausgeber versucht, den Styl der Abhandlung dem deutschen Sprachgebrauche mehr anzupassen. Dieses Unternehmen war, wegen der geringen Verständlichkeit der Uebersetzung und noch mehr wegen der Undeutlichkeit der Abschrift, besonders der Formeln, schwierig. Der Herausgeber ist daher nicht ganz sicher, dafs der Sinn des Herrn Verfassers überall genau getroffen worden, und hat zu wünschen, dafs er nicht bedeutend gefehlt haben möge. **Der Herausgeber.**

Tafeln für gegebene Functionen rechnet man nach den Regeln, welche ihnen eigenthümlich sind, oder welche ihre Entstehung bezeichnen. Für Integral-Functionen aber, für welche noch die Reductionsformeln unbekannt sind hat man verschiedene sinnreiche Methoden erdacht, entweder dieselben durch convergente Reihen auszudrücken, oder die nöthigen Tafeln successive zu berechnen. Das erstere läfst sich gewöhnlich für beliebige Werthe der Veränderlichen nicht allgemein thun, sondern man mufs, um Reihen zu finden, von welchen z. B. 4 bis 5 Glieder 7 Decimalstellen geben, wenn auch nicht die Eigenschaften der Integral-Functionen, wie $\int dx.fx$ selbst, so doch wenigstens die ihrer Ableitungen fx zu Hülfe nehmen. Was das Letztere betrifft, so würde das allgemeine Verfahren, wenn es auch nicht, wie oft, Ausnahmen unterworfen wäre, für die Functionen, welche von $x = -\infty$ bis $= +\infty$ reichen, durch deren vielleicht unendlichen Umfang schwer auszuführen sein.

Es entsteht also sogleich folgende Frage: „Wenn man eine Tafel der Werthe einer Function innerhalb eines gewissen Umfanges hat, z. B. von $x = 0$ bis $x = 1$: wie kann man sich der innerhalb der Grenzen berechneten Werthe der Function bedienen, um die Werthe für jede Zahl aufserhalb der Grenzen der Tafel zu finden, auf die Weise etwa, wie bei der Multiplication, deren Tafel nur von 0 bis 10 reichet, die aber dennoch die Producte aller Zahlen giebt." Die Beantwortung dieser Frage beruhet auf der Untersuchung der Eigenschaften der Functionen, welche die wichtigste Aufgabe der Analysis ist.

Eine nahverwandte Frage ist die: Wie läfst sich der Tafel, welche blofs die Function für gewisse Zahlen giebt, und die folglich discontinuirlich ist, Continuität geben, d. h. wie kann man sich ihrer für Zahlen, die nicht in der Tafel gefunden werden, die aber zwischen den darin enthaltenen Zahlen liegen, bedienen.

Für die zweite Frage hat man die sogenannten Interpolations-Methoden; die Beantwortung der ersten hat aber grofse Schwierigkeiten, weil es weder allgemeine Methoden (die auch schwerlich zu finden sein möchten), noch sonst bestimmte Vorschriften giebt, in bestimmten Fällen zu den unbekannten Eigenschaften zu gelangen. Nur in einzelnen Fällen ist es möglich, und die Bemühung schien mir wichtig, mehrere zu entdecken. Ich kam durch einige Integral-Ausdrücke, auf welche die Anwendung eines gewissen Grundgesetzes für die mathematische Theo-

rie des Electro-Magnetismus führt, auf diejenige Classe von Integral-Functionen, von welcher hier die Rede sein wird.

Ehe ich beginne wird es aber gut sein, einige allgemeine Bemerkungen über das Quadratur-Problem vorauszuschicken.

Wie schon erwähnt, beruhet dasselbe auf der Realisirung eines Postulats. Nun ist es eine allgemeine Regel, dafs der Postulate nicht allein so wenige sein müssen, als möglich, sondern dafs sie auch möglichst einfach sein, und zur Auflösung möglichst vieler und umfassender Aufgaben dienen müssen. Also auch die Function, welche hier postulirt wird, mufs so einfach sein als möglich, d. h. sie mufs so wenige als möglich willkürlich-veränderliche Gröfsen enthalten. Die einfachsten Functionen sind offenbar die, welche nur eine veränderliche Gröfse enthalten, wie $\log x$, $\mathrm{tang} x$. Dergleichen Functionen will ich κατ' ἐξόχην einfache, oder Functionen mit Einem Elemente nennen. (Dafs die algebraischen Functionen noch elementarer sind, ist eine Einfachheit anderer Art.) Nach jenen kommen die doppelten Functionen, mit zwei Elementen wie x^a, $F(c, \varphi)$ etc. Für mehr zusammengesetzte Functionen, als mit einem oder mit zwei Elementen, lassen sich schwerlich mehr Tafeln berechnen. Denn da die Tafel für eine Function mit einem Element, z. B. für die Logarithmen der Zahlen von 1 bis 100000, schon einen ziemlichen Octav-Band füllt, so würde diejenige für eine Function mit zwei Elementen von gleichem Umfange 100000 Bände erfordern. Selbst wenn man sich mit dem hunderten Theile des Umfanges begnügen, und z. B. nur von $x=0$ bis $x=1000$ und von $y=0$ bis $y=1000$ gehen wollte, würde doch die Tafel schon 10^6 Zahlen enthalten, und also 10 mal so grofs sein, als die Logarithmen-Tafel, die nur 10^5 Zahlen enthält. Eine Tafel für eine Function von drei veränderlichen Gröfsen, in dem Umfange von 0 bis 1000 für jedes Element, würde 10^9 Zahlen enthalten, also 10000 Bände, oder eine ganze Bibliothek füllen. Vollständig ausgerechnete Tafeln für dergleichen und noch mehr zusammengesetzte Functionen, wie z. B.

$$\int \frac{dx}{a+a_1x+a_2x^2} \cdot \log(b+b_1x+b_2x^2),$$

welche Function sieben willkürliche Gröfsen a, a_1, a_2, b, b_1, b_2 und x enthält, sind also weder auszurechnen, noch herauszugeben und zu benutzen möglich.

Eine wichtige Aufgabe bei der Untersuchung zusammengesetzter Integral-Formeln ist also: sie in andere zu zerlegen, welche weniger willkürliche Gröfsen enthalten. Je weiter die Zerlegung geht, je besser ist es. Es wäre z. B. wichtig, die dreifache elliptische Function Π auf zweifache zu bringen. Die Berechnung der zugehörigen Tafel würde dadurch erleichtert werden, wenn auch die Tafel selbst nicht dabei gewönne.

Die zweite Regel für die Postulate bei den Integral-Functionen erfordert, dafs sie einen so grofsen Umfang haben, d. i. eine so ausgedehnte Anwendung gestatten, als möglich, vorzüglich da, wo sie am häufigsten vorkommen, oder dafs man mit ihrer Hülfe so viele Differentiale integriren könne, als möglich. Die Functionen, welche am häufigsten vorkommen, und in welchen man durch eine leichte Substitution die Constanten auf mannigfaltige Art verändern kann, sind bekanntlich die algebraischen und insbesondere die rationalen. Wenn P, Q, R rationale Functionen bedeuten, und f bezeichnet irgend eine transcendente Function, so kann man ein Quadratur-Problem als reducirt ansehen, wenn es die Form $\int P dx \int R$ hat, weil ein solches Differential im Allgemeinen auf die Form einer Summe mehrerer Producte gebracht werden kann, und die eigentliche Schwierigkeit nur in der Integration dieser liegt, die auch noch in Factoren aufgelöst werden können *). Nach der verschiedenen Bedeutung von f bekommt man verschiedene Arten von Differentialen, und jede setzt eine verschiedene Familie von Integral-Functionen voraus, nemlich diejenigen möglichst einfachen Functionen, mit welchen die Integration des gegebenen Differential-Ausdrucks ausführbar ist.

Ist z. E. $\int R$ constant, so hat man die gewöhnlichen rationalen Differentiale wie $P dx$, von welchen Joh. Bernoulli und Leibnitz ungefähr gleichzeitig **) zeigten, dafs sie mit Hülfe der Auflösung einer rationalen Bruch-Function in einzelne Functionen von einer von diesen Formen:

$$1.\ x^n, \qquad 2.\ \frac{a}{(b+x)^n}, \qquad 3.\ \frac{a+a_1 x}{(b^2+2bx\cos\beta+x^2)^n},$$

*) Wenn man blofs $\int dx \int x$ nehmen wollte, so ist klar, dafs, sobald man, um den Ausdruck zu vereinfachen, statt x eine rationale Function von z oder eine solche, deren Differential rational ist, setzte, dieselbe in die Form $\int dz\, Pz . \int R^1(z)$ übergehen würde, welche immer die allgemeine ist, die man also in ihrem ganzen Umfange zu untersuchen hat.

**) Montucla III. p. 132. und 147.

wo n eine ganze positive Zahl ist, vorzüglich auf Logarithmen und Kreisbogen zu bestimmten Tangenten gebracht werden können.

Bezeichnet dagegen f eine der einfachsten der irrationalen Formen, z. B. die zweite Wurzel, wie bei der Rectification der Curven, so entsteht schon eine unendliche Mannigfaltigkeit von Integral-Functionen, je nachdem R in $\sqrt{R}$ auf höhere Grade steigt. Für den Fall, dafs R blofs eine ganze Function vom zweiten Grade ist, wie $a+a_1x+a_2x^2$, oder auch eine Bruch-Function vom ersten Grade, wie $\frac{a+a_1x}{b+b_1x}$, zeigte Newton in seiner „*quadratura curvarum,*" dafs die Integration von $Pdx\sqrt{R}$ auf den Ausdruck der Fläche elliptischer und hyperbolischer Ausschnitte führe. Späterhin zeigte Cotes, dafs alle diese Integrationen auf einfachen Functionen, nemlich Logarithmen und Kreisbogen beruhen, deren Eigenschaften schon bekannt, und für welche schon Tafeln vorhanden waren, womit also die Quadratur oder die Untersuchung von $\int Pdx\sqrt{(a+a_1x+a_2x^2)}$ vollendet war.

Im Allgemeinen zerfällt jedes Quadratur-Problem in drei Theile. Sie sind folgende:

1) Die Zerlegung, d. h. die Aufsuchung der einfachsten Functionen, fx, gx etc., mittelst welcher, wenn man sie als gelöset voraussetzt, die Integration aller zu einerlei Classe gehörigen Differentiale möglich ist.

2) Die Vergleichung, d. h. die Untersuchung der Theorie der postulirten Functionen oder derjenigen Eigenschaften derselben, vermittelst welcher beliebige Functionen von einerlei Form mit einander verglichen werden können; z. B. wenn man ein Paar Werthe einer Function f, wie fx, fy kennt, einen anderen fz, und durch Wiederholung, beliebige andere zu finden.

3) Die Berechnung von Tafeln der Functionen, welche durch die Kenntnifs ihrer Eigenschaften sehr erleichtert wird, oder wenigstens nach Belieben mufs controllirt werden können.

Jede Function von eigenthümlicher Art hat ihre besonderen Eigenschaften, und kann als ein für sich selbst bestehendes Ganze blofs in und durch sich selbst berechnet werden. Da eine Differential-Gleichung im Allgemeinen nichts anders ist, als der analytische Ausdruck der Aufgabe, eine Function zu finden, die so und so beschaffen sei, so ist klar, dafs

eine gesuchte Function nicht immer blofs eine Combination bekannter Functionen sein darf, und daher kommt es, dafs die gegebene Differential-Gleichung nicht sowohl dient, die unbekannte Function selbst zu finden, als vielmehr diejenigen Eigenschaften zu finden, nach welcher die Tafel ihrer Werthe zu berechnen sei. So mufs es sich auch bei dem Quadratur-Problem oder bei der Auflösung der Gleichung $dy = fx\,dx$ verhalten. Wenn diese Gleichung im Allgemeinen und abstract, für den Fall, dafs fx rational ist, gegeben würde, und man kennte blofs die algebraischen Functionen, so würde man durch einen consequenten Versuch, die Gleichung in geschlossener Form zu lösen, nothwendig auf die Idee der Logarithmen und Kreisbogen, als der nächsten Functionen mit einem Element, die mit in die Combination gehören, welche y ausdrückt, geführt worden sein. Es gereichte zu grofser Erleichterung, dafs ihre Eigenschaften schon bekannt und Tafeln dafür ausgerechnet waren *). Der einzige Fall **), wo man auf rein analytischem Wege zu einer vollständigen Kenntnifs neuer Functionen gelangte, ist der, in welchem

$$fR = \sqrt{(a + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4)}.$$

Schon Maclaurin und d'Alembert fingen die Zerlegung an, indem sie zeigten, dafs mehrere dahin gehörige Integrationen auf der Rectification der Ellipse und Hyperbel und gewisser Curven vom dritten Grade beruhen. Euler, Landen, und hauptsächlich Legendre, welcher zeigte, dafs jedes $\int P dc \sqrt[4]{(a)x}$ auf drei neuen elliptischen Functionen $F(c, \varphi)$, $E(c, \varphi)$, $\Pi(n, c, \varphi)$ beruhe, von welchen zwei, Functionen mit zwei Elementen sind, und eine, eine Function mit drei Elementen ist, vollendeten die Zerlegung. Die Vergleichung derselben wurde von Fagnani vorbereitet, welcher zuerst die Bissection der beiden ersteren fand, von Euler aber vollendet, der die allgemeinen Eigenschaften der

---

*) Die Hauptformeln für die trigonometrischen Functionen finden sich schon (geometrisch ausgedrückt) beim Ptolemaeus. Peurbachius machte darauf aufmerksam, und Regiomontanus bediente sich ihrer, nebst den Differenzen, zu der Berechnung der trigonometrischen Tafeln. Ich weifs nicht, wie unter diesen Umständen Montucla, *Hist. des mathém. III. p.* 277. sagen kann: „*Je ne vois pas que ces expressions* $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ *etc. fussent connus au premiers calculateurs de nos tables trigonometriques.*"

**) Dafs man, ohne die allgemeinen Eigenschaften einer Function zu kennen, dennoch Tafeln für dieselbe hat ausrechnen können, wie es bei den Soldnerschen, Krampischen u. s. w. der Fall ist, beweiset blofs die Geduld der Rechner, und die Vervollkommnung der Rechnen-Methoden gehört aber nicht hierher, wo vielmehr von der vollständigen Entwickelung einer ganzen Classe von Integral-Functionen die Rede ist.

ersten entdeckte, so wie von Legendre, der die Eigenschaften der letzteren fand, und Tafeln dafür, jedoch nur mit gröfseren Zwischenräumen rechnete.

Betrachtet man $\int P dx \sqrt{x}$ weiter, so scheint dieser Ausdruck immer neue Integral-Functionen vorauszusetzen, je nachdem R auf höhere Grade steigt; jedoch kann er im Allgemeinen, wenn R nicht über den sechsten Grad geht, noch auf die obigen gebracht werden, wie ich bei einer anderen Gelegenheit zeigen werde. Die elliptischen Functionen hat man als diejenigen transcendenten Functionen angesehen, welche von nächst höherer Ordnung sind, als die Logarithmen, welche die erste Ordnung der Integral-Functionen erreichen. Diejenigen, welche hier abgehandelt werden sollen, gehören aber, meines Erachtens, ebenfalls in die nächst höhere Ordnung. Zuerst ist leicht zu sehen, dafs wenn z. B. eine wiederholte Integration, wie $\int dx \int y\, dx$ zu machen ist, wo y eine rationale Function von x oder y bedeutet, die zweite Integration auf $\int dx P \log R$ oder $\int dx P \operatorname{arc\,tang} R$, also sehr oft auf diejenige Classe von Integrationen führen werde, welche hier abgehandelt werden soll. Die Functionen aber, welche diese Integration voraussetzt, entstehen gleichsam durch die Wiederholung derjenigen Operation, welche den ersten Integral-Functionen den Ursprung gab. Sie gehören also, in gerade-aufsteigender Linie, in die nächst höhere Ordnung. Heifsen also jene logarithmische, so würden die von der nächst höheren Ordnung bilogarithmische zu nennen sein. Sie übertreffen übrigens die elliptischen sowohl an Einfachheit, da Eine oder höchstens zwei von ihnen blofs einfach sind, und Eine zweifach ist, als auch an ausgedehntem Gebrauche, weil R von beliebigem Grade sein kann, ja selbst P und R rationale Functionen, sowohl von x als von $\sqrt{(a + a_{,} x + a_{,,} x^2)}$, und selbst allgemein jede beliebige irrationale Gröfse, die sich durch irgend eine Substitution rational machen läfst, sein können. Auch lassen sich noch viele andere Integrationen darauf bringen, z. B.:

$$\int \Phi\, d\Phi\, R[\sqrt{(a + a_1 e^{\varphi} + a_2 e^{2\varphi})} \cos \Phi],$$
$$\int \Phi\, d\Phi\, R(\sin \Phi,\ \cos \Phi),$$
$$\int d\Phi \log R[e^{\varphi} \sqrt{(b + b_1 e^{\varphi} + b_2 e^{2\varphi})}],$$
$$\int d\Phi \log R(\sin \Phi,\ \cos \Phi),$$
$$\int d\Phi \operatorname{arc\,tang} R(e^{\varphi}) \text{ etc.},$$

wo R immer eine rationale Function bedeutet.

Ich glaube also, dafs die drei neuen Functionen, deren Entstehung und Gebrauch ich vortragen will, einige Aufmerksamkeit verdienen, um so mehr da sie, wie sich in der Folge zeigen wird, mehrere Eigenschaften haben, die denen der elliptischen Functionen ähnlich sind, und mit deren Hülfe auch die Construction und Berechnung von Tafeln ihrer Werthe sehr erleichtert werden kann. Einstweilen, bis Jemand die Berechnung solcher Tafeln unternimmt, will ich die merkwürdigsten Werthe der Functionen mittheilen, und convergirende Reihen geben, durch welche man mit etwa 5 Gliedern die Werthe wenigstens bis auf 7 Decimalstellen finden kann.

Allgemein sind diese Functionen, so viel mir bekannt, noch nicht untersucht worden. Man findet nur entweder Reihen für verschiedene hierher gehörige Integrale, z. B. (bei M. Hirsch, Integral-Tafeln S. 291.; bei Du Bourguet, *calcul différentiel et intégral. tome I. p.* 449), oder einige bestimmte Integrale (*intégrales définies*) (bei Du Bourguet, bei Poisson, *Journ. de l'Ecole polytechnique cah. X. p.* 612., welcher S. 617. sagt: „*cela conduit à une classe nombreuse d'intégrales définies, qui n'ont pas encore été considérées par les géomètres,*" bei Euler, *act. Petrop. T. VII*), von welchen sich aber zeigen wird, dafs sie nur unmittelbare Corollarien der Eigenschaften der Functionen sind. Was eigentlich in der Theorie dieser Functionen bis jetzt Bedeutenderes gefunden, ist die Formel für die erste Function, welche ich weiterhin durch $\lambda(x)$ bezeichne. Sie ist von Landen gegeben und von Legendre (*Exercices de calc. int. tome I. p.* 244.) bewiesen. Er fügt hinzu: „*jusqu'à présent on n'est pas allé plus loin dans la théorie de ces sortes de transcendentes.*" D. Bernoulli hat in den *nov. Comment. Petrop.* 1772 *p.* 4., die Summe einer Reihe gegeben, welche einem hierher gehörigen bestimmten Integral gleich kommt. Ich finde eine Arbeit von einem Engländer, Namens Spener „*Essay on Logarithmic transcendents*" angeführt, habe sie aber nicht zu Gesicht bekommen können, weifs also nicht, ob sie hierher Gehöriges enthält.

Die Zerlegung einer gegebenen Differential-Formel $dx\,fx$ mufs im Allgemeinen darauf ausgehen, sie in Summen mehrerer einfachen Functionen zu zertheilen, z. B. so, dafs $fx = \Phi x + \psi x$, und

$\int\int x\,dx = \int \varphi x\,dx + \int \psi x\,dx$ *). Ist die Formel nicht schon an sich selbst von der Art, dafs es sich thun läfst, so mufs man sie durch irgend eine Substitution so zu verwandeln suchen, dafs es geschehen kann. Enthält fx mehrere willkürliche Constanten oder Potenzen davon, so läfst sich im Allgemeinen $\int dx fx$, wie leicht zu sehen, nicht in andere einfachere Ausdrücke auflösen, ohne durch die Substitution wenigstens wiederum eben so viele willkürliche Constanten einzuführen, welche dann theils zur Wegschaffung der anfänglichen willkürlichen Gröfsen, theils zu der beabsichtigten Auflösung in Summen mehrerer einzelnen Functionen dienen. Die Formen für die Substitutionen, die man zunächst versuchen wird, sind die algebraischen und insbesondere die rationalen, weil sie immer zugleich eine solche Trennung erlauben. Wenn man nemlich in $dx fx = dy$ irgend eine rationale Function R von z für x setzt, so dafs $dy = dz P.fR$, so kann, wie leicht zu sehen, der äufsere Theil P, als rationale Function von z, immer nach bekannten Zerlegungs-Regeln (man sehe die Beilage I.) in eine Summe von mehreren einzelnen Theilen von der Form:

1) z^n,

2) $\frac{a}{(b+z)^n}$ und

3) $\frac{a+a_1 z}{(b^2+2bz\cos x+z^2)^n}$

aufgelöset werden, so dafs man nunmehr blofs einzelne Theile, wie

1) $\int z^n dz fR$,

2) $\int \frac{a\,dz}{(b+z)^n} fR$ und

3) $\int \frac{(a+a_1 z)\,dz fR}{(b^2+2bz\cos x+z^2)^n}$

zu untersuchen hat, und die weitere Zerlegung beruhet dann darauf, die in R eingeführten willkürlichen Constanten so zu bestimmen, dafs entweder fR ebenfalls in eine Summe von einfacheren Functionen aufgelöset werde, oder dafs wenigstens die Zahl der willkürlichen Coefficien-

---

*) Die Auflösung in Producte, wie $fx = \varphi x . \psi x$, hat im Allgemeinen keinen Nutzen, aufser wenn $\psi x = F(\int \varphi x\,dx)$, so dafs

$$\int Fx\,dx = \int \varphi x\,dx . F\int \varphi x\,dx = F^1 \int \varphi x\,dx \ldots,$$

wo $dF^1 x = dx\,Fx$ ist, oder auch, wenn z. B. ein Factor rational ist, und daher in mehrere Glieder aufgelöset werden kann.

ten geringer werde. Durch das Verfahren, immer neue willkürliche Grösen statt der vorigen zu setzen, gelingt es in der Regel, die gegebene Form so zu verwandeln, dafs man einen einfacheren und regelmäfsigeren Ausdruck erhält.

Specielle Regeln für die weitere Zerlegung zu geben, scheint im Allgemeinen nicht möglich *), da sie sich offenbar nach der jedesmaligen Art der Function f richten müssen. Ich will blofs diejenige anzeigen, deren ich mich bei der gegenwärtigen Untersuchung mit Erfolg bedient habe. Wenn man nemlich aus einer Differential-Formel, welche 6 bis 7 willkürliche Constanten enthält, dieselben wegschaffen, oder sie wenigstens bestimmen will, so scheint es beim ersten Anblick, dafs man gleich Anfangs eine Substitution machen müsse, welche wiederum wenigstens eben so viele neue Arbitrairen einführt. Es scheint mir indessen besser, schrittweise zu verfahren, und erst einige wenige einzuführen, z. B. zwei, deren man sich bedient, um die gegebene Differential-Formel erst einigermafsen zu zerlegen, z. B. in zwei etwas einfachere Theile. Man wiederholt dann die Operation, bis man zu möglichst einfachen Differentialen gelangt. Der Nutzen dieses Verfahrens besteht theils darin, dafs, weil die Zahl der zu bestimmenden willkürlichen Constanten geringer ist, die Elimination erleichtert wird, und die algebraische End-Gleichung auf einen minder hohen Grad steigt, theils darin, dafs man bei jeder neuen Substitution eine andere Form für die, willkürliche Constanten enthaltenden Functionen wählen kann. Auf diese Weise kann man in jedem einzelnen Falle entweder unmittelbar oder durch einen besonderen analytischen Calcul finden, welche Form der substituirten Function am besten zum Ziele führt. Auch partielle Differentiationen und Integrationen gewähren zuweilen einige nicht zu übersehende Vortheile.

Auf diese Weise ist es mir gelungen, die gegebenen allgemeinen Differentiale erst in einzelne, noch ziemlich zusammengesetzte Theile, darauf diese wieder in zweifache, und endlich die meisten auch in einfache aufzulösen.

Es ist merkwürdig, wie die Schwierigkeiten zunehmen, je weiter man in der Zerlegung kommt, fast auf die Art, wie bei der chemischen Analyse, wo die erste Zerlegung zuweilen sehr leicht ist, die endliche

---

*) Die allgemeinste Regel drückt die bekannte und wichtige Formel $\int p\,dq = pq - \int q\,dp$ aus.

Trennung der einzelnen Elemente aber oft fast unüberwindliche Schwierigkeiten hat. Die letzte Zerlegung dieser oder jener Function mit zwei Elementen fand ich nicht eher, bis ich versuchte, sie als eine eigene neue Function, oder als ein Element zu betrachten, und ihre Eigenschaften zu untersuchen.

Diesemnach will ich nun zuerst zeigen:

1) Wie das logarithmische Integral $\int P dx \log R$ in andere, weniger zusammengesetzte aufgelöset werden kann.
2) Wie eben dieses mit dem Kreisbogen-Integral $\int P dx \operatorname{arc\,tang} R$ geschieht.
3) Wie die solchergestalt erhaltenen, minder zusammengesetzten Integrale in Functionen mit zwei Elementen zertheilt werden können.
4) Wie diese Functionen mit zwei Elementen in Functionen mit einem Element aufgelöset, oder wenigstens eine durch die andere ausgedrückt werden können.

Hierdurch ist die Zerlegung der gegebenen Differential-Formeln geschehen. Die Aufgabe ist dann ferner, die Eigenschaften der neuen Functionen zu finden, und Tafeln dafür zu berechnen.

Der Kürze wegen wollen wir uns folgender Bezeichnung bedienen.

Bezeichnung der Functionen.

1. Eine Function mit einem Element soll durch einen grofsen oder wenigstens langen Buchstaben bezeichnet werden, welcher unmittelbar vor das Element gesetzt wird. Eine unbekannte Function soll durch griechische Buchstaben, wie z. B. φx, ψx, eine gegebene durch lateinische, z. B. wie fx, gx bezeichnet werden. Also:

Sinus x durch Sx,
Cosinus x durch Cx,
Tangens x durch Tx,
Logarithmus x durch Lx,
$\int \frac{lx}{x} L(1+x)$ durch λx.

2. Die umgekehrten Functionen sollen durch das umgekehrte Zeichen, oder auch durch einen Strich über dem Zeichen der directen Function bezeichnet werden. Also:

arcus sinus x durch $\bar{S}x$ oder durch $\mathfrak{z}x$,
arcus cosinus x durch $\bar{C}x$ oder $\mathfrak{Z}x$,

(demnach $\cos x$ durch $\overline{\mathfrak{I}}x$)

arcus tangens x durch $\overline{T}x$ oder durch $\mathit{L}x$.

(Diese letzte Bezeichnung L, als JL betrachtet, scheint sehr gut an die zwei L (log) in dem imaginairen Ausdrucke von arc tang x:

$$\frac{1}{2i}[L(1+ix)-L(1-ix)]$$

zu erinnern.)

3. Zusammengesetzte Functionen sollen durch eine Complexion mehrerer Buchstaben bezeichnet werden, z. B. eine ganze Function vom $n$ten Grade durch $\binom{a}{n}x$ oder $\left.\begin{matrix}n\\a\end{matrix}\right|x$. Dieser Ausdruck hat also entwickelt folgende Form:

$$\left.\begin{matrix}n\\a\end{matrix}\right|x = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n = \binom{a}{n}x.$$

Die Function $\left.\begin{matrix}2\\a\end{matrix}\right|x$ vom zweiten Grade ist auf diese Weise im Allgemeinen $= a_0 + a_1x + a_2x^2$. (Diejenige mit imaginairen Factoren von der nemlichen Ordnung, nemlich $a^2 + 2axC\alpha + x^2$ ist besonders merkwürdig, und soll, wo es nothwendig, durch $\binom{a}{\alpha}x$ oder $(\overset{2}{a}i)x$ bezeichnet werden. Der Winkel wird immer mit demselben griechischen Buchstaben bezeichnet, den die Constante aus dem lateinischen Alphabet hat.)

Ferner soll bezeichnet werden

$\int dx\sqrt{(1-c^2Sx^2)}$ durch E^c_x, wie bei Legendre,

$\int \frac{dx}{x} L(1+2xC\alpha+x^2)$ durch D^α_x,

$\int \frac{dx}{1+x} L(n^2+x^2)$ durch H^n_x.

Der Kürze wegen kann man die Variabeln, welche mehreren Functionen gemein sind, oder die sich leicht von selbst verstehen, weglassen, also Ex, Ez statt E^c_x, E^c_z; Dx, Dz statt D^α_x, D^α_z; ja selbst C statt $C\alpha$; $\left.\begin{matrix}2\\a\end{matrix}\right|$ statt $\left.\begin{matrix}2\\a\end{matrix}\right|x$ etc., z. B. $\binom{a}{\alpha}$ oder $\binom{a}{2}$ statt $a^2+2axC+x^2$ oder $a^2+2ax\cos\alpha+x^2$ etc. schreiben.

Dieser Bezeichnungen und Abkürzungen werde ich mich bei der Rechnung bedienen; in den Resultaten aber werde ich die gewöhnlichen Bezeichnungen beibehalten.

I. Allgemeine Zerlegung von $\int P dx L R$.

Eine erste Zerlegung dieses Ausdrucks ist leicht. Denn da einestheils R von der Form $\frac{\binom{\alpha}{m}x}{\binom{\beta}{n}x}$ ist, so ist $LR = L\binom{\alpha}{m}x - L\binom{\beta}{n}x$, und $\binom{\alpha}{m}x$, $\binom{\beta}{n}x$, als ganze Functionen, können in einfache oder quadratische Factoren von der Form $(c+c_1x)^n$ oder $(e^2+2exC\beta+x^2)^n$ zerlegt werden. Also ist LR eine Summe von Gröfsen, wie $nL(c+c_1x)$ und $nL(e^2+2exC\beta+x^2)$; anderntheils aber kann P als rationale Function von der Form $\frac{\binom{\gamma}{m}x}{\binom{\delta}{n}x}$, nach bekannten Regeln (Beil. I.) in mehrere Theile von der Form

$$x^m,$$
$$(a+a_1x)^{-r} \text{ oder}$$
$$\frac{a+a_1x}{(b^2+2bxC\beta+x^2)^n}$$

aufgelöset werden.

Durch diese beiden Zerlegungen, welche nur die Auflösung algebraischer Gleichungen voraussetzen, findet man also:

$$P = \Sigma\alpha x^m + \Sigma\frac{1}{(a+a_1x)^r} + \Sigma\frac{a+a_1x}{(b^2+2bxC+x)^n}$$

und

$$LR = \Sigma nL(c+c_1x) + \Sigma\varrho L(e^2+2eCx+x^2);$$

folglich ist $\int P dx . LR$ in

$$\int dx\Big[\Sigma n\alpha x^m L(c) + \Sigma\frac{n.L(c)}{(a)^r} + \Sigma\frac{n(a)L(c)}{(b^2)^n}$$
$$+\Sigma\alpha\varrho x^m L(e^2) + \Sigma\frac{\varrho L(e^2)}{(a)^r} + \Sigma\varrho\frac{(a)L(e^2)}{(b^2)^r}\Big]$$

zerlegt worden, wo $\Sigma(Fx)$ die Summe der vorhandenen Functionen von der Form $F(x)$ bedeutet, und der Kürze wegen nur das erste Glied statt der Functionen selbst gesetzt ist [z. B. (b^2) statt $b^2+2bxC+x^2$].

Durch diese Vorbereitung ist also nun so viel gewonnen, dafs man nur noch die sechs Ausdrücke einzeln zu untersuchen braucht, welche entstehen, wenn jede von den zwei Formeln aus LR mit jeder von den drei aus P multiplicirt werden, und welche, wie folgt, bezeichnet werden sollen:

$$\text{A.}\quad \begin{cases} A = \int x^n dx\, L\binom{a}{1} x = \int x^n dx\, L(a + a_1 x), \\ B = \int x^n dx\, L\binom{a}{\alpha} x = \int x^n dx\, L(a^2 + 2ax C\alpha + x^2), \\ C = \int \frac{dx}{\left[\binom{b}{1} x\right]^n} \cdot L\binom{a}{1} x = \int \frac{dx}{(b + b_1 x)^n} \cdot L(a + a_1 x), \\ D = \int \frac{dx}{\left[\binom{b}{1} x\right]^n} \cdot L\binom{a}{\alpha} x = \int \frac{dx}{(b + b_1 x)^n} \cdot L(a^2 + 2ax C\alpha + x^2), \\ E = \int \frac{\binom{a}{1} x\, dx}{\left[\binom{b}{\beta} x\right]^n} \cdot L\binom{c}{1} x = \int \frac{(a + a_1 x)\, dx}{(b^2 + 2bx C\beta + x^2)^n} \cdot L(c + c_1 x), \\ F = \int \frac{\binom{a}{1} x\, dx}{\left[\binom{b}{\beta} x\right]^n} \cdot L\binom{c}{\beta} x = \int \frac{(a + a_1 x)\, dx}{(b^2 + 2bx C + x^2)^n} \cdot L(c^2 + 2cx C + x^2). \end{cases}$$

Um nun diese Ausdrücke zu integriren, kann man sich der bekannten Reductions-Formel

$$\int p\, dq = pq - \int q\, dp$$

bedienen.

Ist nemlich $LR = p$ und $\int P dx = Q$, so ist nach dieser Folmel:

$$\int P dx\, LR = QLR - \int \frac{dR}{R} Q;$$

welche Formel beinahe alles, was bisher über logarithmische Integrale gesagt worden, ausdrückt. (Man sehe z. B. Lacroix *Tr. du Calc. différ. et intégr. sec. édit. Tom. II. p.* 23 *sq.*) Ist Q oder $\int P dx$ rational, so ist die logarithmische Integration schon auf die gewöhnliche rationale reducirt, leider aber enthält Q häufig Logarithmen oder Kreisbogen, so dafs man sich nur im Cirkel bewegt. (In der von Lacroix a. a. O. gegebenen Formel für $\int P dx (Lx)^n$ enthalten die dortigen Gröfsen M, L, K etc. nicht allein dergleichen, sondern noch andere höhere transcendente Gröfsen, die nicht angedeutet sind.)

In dem gegenwärtigen Falle ist P entweder x^n, oder $\left[\binom{b}{1} x\right]^{-n}$ oder $\frac{\binom{a}{1} x}{\left[\binom{b}{\beta} x\right]^n}$, und Q entweder $\frac{x^{n+1}}{n+1}$, oder $\frac{-\binom{b}{1} x^{-n+1}}{n-1}$, oder

$$-\frac{\frac{1}{2} a_1}{(n-1)\left[\binom{b}{\beta} x\right]^{n-1}} + (a - a_1 b C\beta) \int \frac{dx}{\left[\binom{b}{\beta} x\right]^n}.$$

Nach bekannten Integrations-Regeln ist

$$\int \frac{dx}{\left[\binom{b}{\beta}x\right]^n} = \frac{bC+x}{n-1}\left\{\frac{\mathfrak{a}}{\left[\binom{b}{\beta}x\right]^n} + \frac{\mathfrak{a}_1}{\left[\binom{b}{\beta}x\right]^{n-2}} + \ldots + \frac{\mathfrak{a}_{n-1}}{\binom{b}{\beta}x}\right\} + \frac{k}{bS\beta}\cdot \mathcal{L}\frac{x+bC\beta}{bS\beta},$$

woselbst $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$ etc. und k gewisse Constanten sind. (Hirsch. Int. Tafeln p. 106.)

Uebrigens ist R entweder von der Form $a+a_1x$ oder $a^2+2axC\alpha+x^2$, und demnach $dR=a\,dx$, oder $2(aC\alpha+x)\,dx$ und $\frac{dR}{R}=\frac{a_1\,dx}{a+a_1x}$, oder

$$=\frac{2.(aC+x)\,dx}{a^2+2aCx+x^2}.$$

Hieraus erhellet, dafs im Allgemeinen durch diese Reduction sowohl A und B, als C und D auf Integrale rationaler Differentiale reducirt sind, E und F aber, wenn nicht etwa $a=a_1bC\beta$ ist, nothwendig Theile von der Form

$$\int \frac{c_1\,dx}{c+c_1x}\,\mathcal{L}\frac{x+bC\beta}{bS\beta}, \text{ oder}$$

$$\int \frac{dx(cC\gamma+x)}{C^2+2cxC\gamma+x^2}\,\mathcal{L}\frac{x+bC\beta}{bS\beta}$$

enthalten. Diese beiden Ausdrücke mit $\mathcal{L}$ sind demnach solche, die sich nicht durch die allgemeine Reductions-Formel auf Integrale rationaler Differentiale bringen lassen, und die folglich nicht durch L und $\mathcal{L}$ ausgedrückt werden können. Durch weitere partielle Integration erhält man nemlich

$$\mathfrak{B}.\begin{cases} \int \frac{c_1\,dx}{c+c_1\,dx}\,\mathcal{L}\frac{x+bC\beta}{bS\beta} = L\binom{c}{1}x.\mathcal{L}\frac{x+bC\beta}{bS\beta} - \frac{1}{bS\beta}\int \frac{dx}{\binom{b}{\beta}x}\,L\binom{c}{1}x, \\ 2\int \frac{(cC\gamma+x)\,dx}{c^2+2cxC\gamma+x^2}.\mathcal{L}\frac{x+bC\beta}{bS\beta} = L\binom{c}{\gamma}x.\mathcal{L}\frac{x+bC\beta}{bS\beta} - \frac{1}{bS\beta}\int \frac{dx}{\binom{b}{\beta}x}.L\binom{c}{\gamma}x, \end{cases}$$

also besondere Fälle von E und F, nemlich mit dem Exponenten $n=1$, welche demnach ausgenommen werden müssen, und durch E^1 und F^1 bezeichnet werden können.

Dergleichen Ausnahmen finden sich auch im Vorhergehenden, nemlich in A und B, wenn $n=-1$, in welchem Falle $Q=Lx$ und in C und D, wenn $n=1$, in welchem Falle $Q=\frac{1}{b_1}L(b+b_1x)$ ist und demnach $\frac{Q\,dR}{R}$ wieder dieselbe Form bekommt, nemlich logarithmisch-rational wird. A^{-1} und B^{-1} aber können entweder auf dem Wege, auf

welchem wir sie erhalten sollten, nicht vorkommen, oder wenigstens als besondere Fälle von E und D (nemlich für $b = 0$) angesehen werden. Es sind also nur folgende Ausnahme-Fälle weiter zu untersuchen.

$$\mathfrak{F}. \begin{cases} C^1 = \int \frac{dx}{b+x} L(a + a_1 x), \\ D^1 = \int \frac{dx}{b+x} L(a^2 + 2ax C\alpha + x^2), \\ E^1 = \int \frac{dx(a+a_1 x)}{b^2+2bx C\beta+x^2} L(c + c_1 x), \\ F^1 = \int \frac{dx(a+a_1 x)}{b^2+2bx C\gamma+x^2} L(c^2 + 2cx C\gamma + x^2), \end{cases}$$

von welchen schon, weil sie von der allgemeinen Integrations-Formel eine Ausnahme machen, zu vermuthen ist, dafs sie eigenthümliche Functionen enthalten, die als bekannt vorausgesetzt werden müssen, wenn die Integration möglich sein soll.

Die drei ersten Ausdrücke könnten als besondere Fälle des vierten F^1, unter die allgemeine Form $\int \frac{\binom{a}{1} x\, dx}{\binom{b}{2} x} L\binom{c}{2} x$ gebracht, angesehen werden; doch würde dieses gegen unsere Absicht sein, weil gerade einfachere Functionen gesucht werden. Diese drei einfacheren Formen aus der Acht zu lassen, würde schon errungene Vortheile aufgeben heifsen.

Bevor wir zur weiteren Untersuchung dieser Functionen schreiten, wird es gut sein, erst noch eine andere Classe von Functionen zu betrachten, nemlich die mit Δ, von welcher schon einige specielle Fälle bei der Untersuchung der logarithmisch-rationalen Ausdrücke vorkamen, und welche demnach mit diesen verwandt sein müssen.

2. Allgemeine Zerlegung von $\int P dx$. arc. tang. R.

Dieselbe beruhet theils auf der bekannten Zerlegung der rationalen Function P in Partialbrüche, theils auf einer weniger bekannten Eigenschaft der Function Δ (arc. tang.), dafs nemlich die arc. tang. zu rationalen Functionen (d. h. die Bogen, deren Tangenten rational sind und die ich rationale Δ nenne), in eine Summe von arc. tang. vom ersten Grade (d. h. von Bogen, deren Tangenten rationale Functionen vom ersten Grade sind) zerlegt werden können. (S. Beilage II.)

Nach diesem Satze kann man annehmen, dafs

$$\mathit{L}R = \mathit{L}\frac{a_1}{x+b_1} + \mathit{L}\frac{a_2}{x+b_2} + \ldots = \Sigma \mathit{L}\frac{a_r^1}{x+b_r^1}, \text{ oder auch}$$
$$= C - \Sigma \mathit{L}\frac{x+b_r^1}{a_r^1},$$

schon durch Auflösung einer algebraischen Gleichung zerlegt ist.

Nun ist aber, wenn $\int P dx = Q$,

$$\int P dx \mathit{L}R = Q\mathit{L}R - \int \frac{dR}{1+R^2}\cdot Q.$$

Dem Vorhergehenden zufolge darf man also nur für R eine von den Grö-fsen $\frac{x+b_r^1}{a_r^1}$, oder anders bezeichnet, $a+a_1 x$ nehmen, so dafs

$$\frac{dR}{1+R^2} = \frac{a_1 . dx}{1+(a+a_1 x)^2};$$

statt Q aber mufs, da P nach geschehener Zerlegung die Form x^n, oder $\frac{b_1}{(b+b_1 x)^n}$, oder $\frac{a+a_1 x}{(b^2+2bxC+x^2)^n}$ haben mufs, entweder $\frac{x^{n+1}}{n+1}$, oder $\frac{-1}{(n-1)(b+b_1 x)^{n-1}}$, oder endlich

$$\frac{-a_1}{2(n-1)\left[\left(\frac{b}{\beta}\right)x\right]^{n-1}} + \frac{(a-a_1 bC\beta)(bC\beta+x)}{n-1}\left\{\frac{\mathfrak{a}}{\left[\left(\frac{b}{\beta}\right)x\right]^{n-1}} + \ldots + \frac{\mathfrak{a}_{n-1}}{\left(\frac{b}{\beta}\right)x}\right\} + kL\frac{x+bC\beta}{bS\beta}$$

gesetzt werden.

Die möglicherweise hierher gehörigen einfacheren Formen der rationalen Kreisbogen-Differentiale (deren offenbar, da $\mathit{L}R$ sich nur in die eine einfachere Form $\mathit{L}(a+a_1 x)$ auflöset, nicht mehrere, als der verschiedenen Formen der Partialbrüche der rationalen Function P, nemlich drei, sein können) müssen demnach, wie folgt, ausgedrückt und allgemein integrirt werden, nemlich:

$$\mathfrak{D}.\quad \begin{cases} \alpha^n = \int x^n dx \mathit{L}\left(\frac{a}{1}\right)x = \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\frac{a}{1}\right)x - \frac{1}{n+1}\int \frac{a_1 x^{n+1} dx}{1+\left[\left(\frac{a}{1}\right)x\right]^2}, \\ \beta^n = \int \frac{dx}{(b+x)^n}\cdot \mathit{L}\left(\frac{a}{1}\right)x = \frac{-\mathit{L}\left(\frac{a}{1}\right)x}{(n-1)(b+x)^{n-1}} + \frac{a_1}{n-1}\int \frac{dx}{(b+x)^n\left[1+\left(\left(\frac{a}{1}\right)x\right)^2\right]}, \\ \gamma^n = \int \frac{\left(\frac{a}{1}\right)x \ldots dx}{\left[\left(\frac{b}{\beta}\right)x\right]^n}\cdot \mathit{L}\left(\frac{c}{1}\right)x = \mathit{L}\left(\frac{c}{1}\right)x\left\{\frac{-a_1}{2(n-1)\left[\left(\frac{b}{\beta}\right)x\right]^{n-1}} + A\int \frac{dx}{\left[\left(\frac{b}{\beta}\right)x\right]^n}\right\} \\ \qquad + \int \left\{\frac{a_1}{2(n-1)\left[\left(\frac{b}{\beta}\right)x\right]^{n-1}} - A\int \frac{dx}{\left[\left(\frac{b}{\beta}\right)x\right]^n}\right\}\frac{c_1 dx}{1+\left[\left(\frac{c}{1}\right)x\right]^2}. \end{cases}$$

Man sieht hieraus, dafs die beiden ersten α und β sich auf Integrale rationaler Differentiale bringen lassen, und demnach im Allgemeinen durch L und L ausgedrückt werden; die dritte γ aber, da $\int \frac{dx}{\left[\binom{b}{\beta}x\right]^n}$ immer $L\frac{x+bC\beta}{bS\beta}$ enthält, einen besondern Fall von sich selbst, nemlich:

$$\int \frac{dx}{1+\left[\binom{c}{1}x\right]^2} . L\frac{x+bC\beta}{bS\beta}$$

voraussetzt.

Es bietet sich daher γ für $n=1$ immer als ein besonders zu untersuchender Ausdruck dar. Dergleichen Ausnahme-Fälle giebt es auch in α, für $n=-1$, und in β für $n=+1$; der erste aber (α^{-1}) ist, wie man siehet, nur ein besonderer Fall von dem letzteren (β'). Demnach sind aus dem allgemeinen zusammengetzten Integrale $\int P dx L R$ nur folgende abzusondern, von welchen zu vermuthen, dafs sie eigenthümliche, einfachere Bestandtheile enthalten; nemlich:

$$\mathfrak{E}.\quad \begin{cases} \beta' = \int \frac{dx}{b+x} L(a+a_1 x), \\ \gamma' = \int \frac{(a+a_1 x)\,dx}{b^2+2bxC\beta+x^2} L(c+c_1 x), \end{cases}$$

wovon jedoch das erste, β', durch partielle Integration in

$$\beta' = L(b+x)L(a+a_1 x) - \int \frac{a_1\,dx}{1+\left[\binom{a}{1}x\right]^2} L(b+x)$$

übergeht, und folglich auf dem vorher aus den logarithmischen Integralen herkommenden E^1 beruhet; das letzte, γ^1, aber wird

$$= \left[\frac{a_1}{2} L\binom{b}{\beta}x + AL\frac{x+bC\beta}{bS\beta}\right] . L\binom{c}{1}x$$
$$- \int \frac{c_1\,dx}{1+\left[\binom{c}{1}x\right]^2} \cdot \left[\frac{a_1}{2} . L\binom{b}{\beta}x + AL\frac{x+bC\beta}{bS\beta}\right],$$

wo $A=\frac{a-a_1 bC\beta}{bS\beta}$, und beruhet daher theils auf einem besonderen Falle von dem vorher gefundenen F^1, theils auf einem besonderen Falle von sich selbst, nemlich, wenn $a_1=0$, oder

$$\mathfrak{F}.\quad \delta = \int \frac{dx}{c^2+2cxC\gamma+x^2} . L(b+b_1 x),$$

welches daher der einzige den rationalen L Differentialen eigenthümliche Integral-Ausdruck ist.

3. Zerlegung der bis hierher gefundenen Ausdrücke in Functionen mit zwei Elementen.

Das Vorhergehende zeigt, dafs die Integrale von $P\,dx\,LR$ und $P\,dx\,LR$, wenn P und R rationale Functionen von x bezeichnen, aufser den bekannten Functionen weiter keine andere neue enthalten können, als diejenigen, welche sich in C^1, D^1, F^1 und δ befinden. Wir brauchen uns daher nur mit diesen zu beschäftigen, um die darin vielleicht enthaltenen Elemente auszuscheiden, das heifst: die einfacheren Functionen zu finden, die als bekannt angenommen werden müssen, wenn die Integration möglich sein soll. In dieser Absicht werden die fünf gefundenen Ausdrücke so viel als möglich zu vereinfachen gesucht werden müssen.

Erstlich: C^1 oder $\int\frac{dx}{b+x}L(a+a_1x)$,

wird

$$=\int\frac{dy}{y}LA(1+y)=LyLA+\lambda y,$$

wenn man

$$A=a-a_1b,\quad x=\frac{A}{a_1}y-b$$

und

$$\int\frac{dy}{y}L(1+y)=\lambda y$$

setzt.

Die Function C^1 mit vier Elementen (nemlich a, a_1, b und x) reducirt sich demnach auf die einfache Function, die ich durch λy bezeichne, weil einestheils C und I schon andere Functionen bedeuten, anderntheils, weil die Function λ mit $L(\log)$ merkwürdige Aehnlichkeiten hat.

Bei diesem Integrale C^1 sind einige besondere Fälle zu erwägen.

a) Wenn $a=a_1b$ ist, so wird

$$C^1=\tfrac{1}{2}[L(a+a_1x)]^2.$$

Denn setzt man $a+a_1x=z$, so wird $b+x=b+\frac{z-a}{a_1}=\frac{z}{a_1}$, und folglich

$$\int\frac{dx}{b+x}L(a+a_1x)=\int\frac{dz}{z}Lz=\tfrac{1}{2}(Lz)^2+\text{Const.}$$

b) Wenn $a<a_1b$, oder $A(=a-a_1b)$ negativ, $=-c^2$ ist, so scheint beim ersten Anblick eine andere Form der Function mit einem Element angenommen werden zu müssen. Man kann indessen die Integration auf

folgende Weise auf λ reduciren. Wenn man nemlich $x = \frac{c^2}{a} \cdot \frac{1}{z} - b$ setzt, so findet man $dC^1 = -\frac{dz}{z} \cdot Lc^2\left(\frac{1-z}{z}\right)$, und integrirt,

$$C^1 = -Lc^2 \cdot Lz + \tfrac{1}{2}(Lz)^2 - \lambda(-z).$$

Daraus folgt, dafs λ die einzige Function ist, die zur Integration aller zu C^1 gehörigen Ausdrücke zu postuliren nöthig ist.

Zweitens. D^1 oder $\int \frac{dx}{b+x} \cdot L(a^2 + 2axC\alpha + x^2)$,

wird

$$= \int \frac{dy}{y} L[a^2 - 2abC\alpha + b^2 + 2(aC\alpha - b)ay + a^2y^2],$$

wenn man $x = ay - b$ setzt. Nun ist

$$a^2 - 2abC\alpha + b^2 = \binom{a}{\alpha}(-b),$$

also positiv, weil $\binom{a}{\alpha}x$ nur imaginaire Factoren hat, und folglich durch keinen reellen Werth, und noch weniger (z. E. durch $x = -b$) negativ werden kann. Wir können daher $a^2 = \binom{a}{\alpha}(-b)$ setzen. Dieses giebt:

$$(aC\alpha - b)^2 = < a^2 \text{ (oder } a^2 - 2abC\alpha + b^2),$$

und folglich kann

$$\frac{aC\alpha - b}{a} = C\beta$$

gesetzt werden.

Hiedurch wird nun D^1 in $Ly\,La^2 + D_y^\beta$ verwandelt, wenn man der Kürze wegen die Function $\int \frac{dy}{y} L(1 + 2yC\beta + y^2)$ durch D_y^β bezeichnet, welche offenbar eine Function mit zwei Elementen ist, mit deren Hülfe jedes Differential von der Form dD^1 integrirt werden kann.

Drittens. E^1 oder $\int \frac{(a + a_1 x)\,dx}{b^2 + 2bxC\beta + x^2} L(c + c_1 x)$

$$= \int \frac{\binom{a}{c} x\,d\alpha}{\binom{b}{\beta}x} \cdot L\binom{c}{1}x$$

kann zuerst

$$= \tfrac{1}{2}a_1 \cdot \int \frac{d\binom{b}{\beta}x}{\binom{b}{\beta}x} L\binom{c}{1}x + A\int \frac{dx}{\binom{b}{\beta}x} L\binom{c}{1}x = \tfrac{1}{2}a_1 E_1^1 + AE_0^1$$

gesetzt werden, woraus A durch Differentiation $= a - ba_1C\beta$ gefunden wird. Durch partielle Integration findet sich alsbald für den ersten Theil

$$E_{\text{I}}^{\text{I}} = \int \frac{d\binom{b}{\beta}x}{\binom{b}{\beta}x} . L\binom{c}{1}x = L\binom{b}{\beta}x . L\binom{c}{1}x - \int \frac{c_{\text{I}}\, dx}{\binom{c}{1}x} . L\binom{b}{\beta}x,$$

welcher solchergestalt auf D^{I} reducirt, und folglich durch die Function mit zwei Elementen: D_y^{β} gefunden werden kann.

Setzt man $x = ay + b$, so verwandelt sich der zweite Theil

$$E_0^{\text{I}} = \int \frac{dx}{\binom{b}{\beta}x} . L\binom{c}{1}x,$$

in

$$\int \frac{a\, dy\, L(c + c_{\text{I}} b + c_{\text{I}} a y)}{\binom{b}{\beta}b + 2ab^{\text{I}}y + a^2y^2},$$

wo $b^{\text{I}} = bC\beta + b$ ist.

Nun kann man $a = \pm\sqrt{\left[\binom{b}{\beta}b\right]}$, mit demselben Zeichen wie c_{I} nehmen, wodurch ac_{I} positiv wird, und entweder $b^{\text{I}} = 0$ (und folglich $b = -bC\beta$, und $a = bS\beta$), oder auch $c + c_{\text{I}}b = 0$; wodurch sich, wie man siehet, der zweite Theil E_0^{I} entweder auf

$$\int \frac{dy}{1+y^2} L(A+y)^2 = I_y^A,$$

oder auf

$$\int \frac{dy}{1+2yC\alpha+y^2} . Ly = E_y^{\alpha}$$

reducirt, und da beide nur eine arbitraire Constante enthalten, so kann E^{I} durch Functionen mit zwei Elementen gefunden werden: nemlich durch D_y^{β}, und entweder durch I_y^A oder E_y^{α}, von welchen I_y^A am dienlichsten zu sein scheint. Setzt man nemlich $x = b(yS\beta - C\beta)$ und $A = \frac{c - c_{\text{I}} bC\beta}{c_{\text{I}} bS\beta}$, so findet man:

$$E_0^{\text{I}} = \frac{1}{bS\beta} . \left(Ly\, Lc_{\text{I}} bS\beta + \tfrac{\text{I}}{2} I_y^A\right).$$

Viertens. F^{I} oder $\int \frac{(a + a_{\text{I}}x)\, dx}{b^2 + 2bxC\beta + x^2} . L(c^2 + 2cxC\gamma + x^2)$.

Eben wie in E^{I} kann man den logarithmischen Theil in dP von dem Kreisbogen-Theil absondern, wenn man

$$F^{\text{I}} = A\int \frac{dx}{\binom{b}{\beta}x} . L\binom{c}{\gamma}x + \tfrac{\text{I}}{2} a_{\text{I}} . \int \frac{d\binom{b}{\beta}x}{\binom{b}{\beta}x} . L\binom{c}{\gamma}x$$

setzt, indem man, wenn man wieder differentiirt, $A = a - a_{\text{I}} bC\beta$ er-

hält. Setzt man nun, um die Absonderung weiter zu treiben, $x = c(y S\beta - C\gamma)$, so reducirt sich F^1, aufser auf L und L, noch auf zwei neue Functionen von der Form:

$$\int \frac{dy}{1+y^2} . L(a^2 + 2ay C\alpha + y^2) = \int \left[dL\, y . L\binom{a}{\alpha} y \right]$$

und

$$\int \frac{2y\,dy}{1+y^2} L(a^2 + 2ay C\alpha + y^2) = \int dL(1+y^2) . L\binom{a}{\alpha} y,$$

deren jede eine Function mit drei Elementen ist, nemlich a, α und y enthaltend, wenn nicht etwa ein bestimmtes Verhältnifs zwischen den gegebenen Coefficienten Statt findet, wodurch $a = 1$ oder $C\alpha = 0$ wird, wie z. B., wenn $bC\beta = cC\gamma$; wie wir weiter unten sehen werden.

Durch diese Sonderungen und Substitutionen gelangt man daher zu der gesuchten Zerlegung von F^1 in Functionen mit zwei Elementen nicht. Man mufs also eine andere Art der Substitution versuchen.

Unter den algebraischen Formen ist $\frac{a+a_1 y}{\beta+\beta_1 y}$ besonders merkwürdig, weil man dadurch drei willkürliche Gröfsen einführen kann, ohne durch die Substitution den Grad der Function zu ändern. Bei Untersuchungen wie die gegenwärtige, ist es daher rathsam, diese Form nicht unversucht zu lassen. Im gegenwärtigen Falle gelingt der Versuch. Setzt man nemlich $x = \frac{m+ny}{1+y}$, so findet man:

$$dx = \frac{(n-m)\,dy}{(1+y)^2}, \quad \binom{c}{2} x = \frac{c(1+y)^2 + 2c_1(1+y)(m+ny) + (m+ny)^2}{(1+y)^2}$$

$$= \frac{\binom{c}{2} m + 2\left(c + mn + c_1(m+n)\right) y + \binom{c}{2} n . y^2}{(1+y)^2},$$

wo $\binom{c}{2} z$, $c + 2c_1 z + z^2$ bedeutet.

Eine gleiche Form ergiebt sich für $\binom{b}{2} x$.

Nimmt man nun aber m und n so, dafs $m+n = \frac{b-c}{c_1-b_1}$, und $mn = \frac{c_1 b - b_1 c}{b_1 - c_1}$ ist, so reducirt sich $\binom{c}{2} x$ auf

$$\frac{\binom{c}{2} m + \binom{c}{2} n . y^2}{(1+y)^2}, \text{ und } \binom{b}{2} x \text{ auf } \frac{\binom{b}{2} m + \binom{b}{2} n . y^2}{(1+y)^2},$$

folglich F^1 oder

$$\int \frac{\binom{a}{1} x\, dx}{\binom{b}{2} x} . L \binom{c}{2} x \text{ auf}$$

$$(n-m) . \int \frac{\left[\binom{a}{1} m + \binom{a}{1} n y\right] dy}{(1+y)\left[\binom{b}{2} m + \binom{b}{2} n . y^2\right]} . L \frac{\binom{c}{2} m + \binom{c}{2} n . y^2}{(1+y)^2} .$$

Dieser beim ersten Anblick noch verwickeltere Ausdruck kann nach den Principien der ersten Abtheilung einfacher aufgelöst werden. Der aufserhalb des Logarithmenzeichens befindliche Factor kann nemlich als rationale Bruch-Function in Theile von der Form

$$\frac{A}{1+y} + \frac{B+Cy}{\binom{b}{2} m + \binom{b}{2} n . y^2}$$

zerlegt werden. (Man sehe das Beispiel in der Beilage I.)

Der logarithmische Factor selbst löset sich, wie leicht zu sehen, in die Summe

$$L\left[\binom{c}{2} m + \binom{c}{2} n . y^2\right] - L(1+y)^2$$

auf. Und da jeder von diesen zwei Gröfsen in jede von den drei vorigen,

$$\frac{A}{1+y} + \frac{B}{\binom{b}{2} m + \binom{b}{2} n . y^2} + \frac{Cy}{\binom{b}{2} m + \binom{b}{2} n . y^2}$$

multiplicirt werden mufs, um dF^1 zu finden, so entstehen folgende sechs Integral-Formen, in welche nun F aufgelöst ist, nemlich:

1) $\int \frac{dy}{1+y} . L(1+y)^2,$

2) $\int \frac{dy}{1+y} . L\left[\binom{c}{2} m + \binom{c}{2} n . y^2\right],$

3) $\int \frac{dy}{\binom{b}{2} m + \binom{b}{2} n . y^2} . L(1+y)^2,$

4) $\int \frac{dy}{\binom{b}{2} m + \binom{b}{2} n . y^2} . L\left[\binom{c}{2} m + \binom{c}{2} n . y^2\right],$

5) $\int \frac{y\, dy}{\binom{b}{2} m + \binom{b}{2} n . y^2} . L(1+y)^2,$

6) $\int \frac{y\, dy}{\binom{b}{2} m + \binom{b}{2} n . y^2} . L\left[\binom{c}{2} m + \binom{c}{2} n . y^2\right].$

Von diesen Integralen ist das erste offenbar $= \frac{1}{2}[L(1+y)^2]$, oder das

Quadrat eines Logarithmus; das sechste, wenn man $y^2 = z$ setzt, reducirt sich auf C^1 und kann daher durch λ gefunden werden; das zweite beruhet auf einer besonderen Form von D^1, nemlich

$$\int \frac{dy}{1+y} L(t^2+y^2),$$

wo $t^2 = \frac{\binom{c}{2}m}{\binom{c}{2}n}$, welche man durch $\overset{t}{D}y$ bezeichnen und durch D_x^β finden kann. Eben so beruht das dritte auf einer besonderen Form von

$$E^1 = \int \frac{dy}{a^2+y^2} L(1+y)^2 = {}^aEy,$$

wo $a^2 = \frac{\binom{b}{2}m}{\binom{b}{2}n}$; und das fünfte ebenfalls auf einer besonderen Form von

$$E^1 = \int \frac{y\,dy}{a^2+y^2} L(1+y)^2,$$

welche durch G_y^a bezeichnet werden mag.

Unter allen sechs Integralen ist daher keines weiter, welches sich nicht auf die obigen reduciren liefse, als das vierte, welches auf die Form $\int \frac{a\,dy}{a^2+y^2} L(t^2+y^2)$ gebracht werden kann, und noch dreifach zu sein scheint, jedoch durch eine leichte Verwandlung in $La^2.Lu + H_u^v$ übergehet, wenn man nemlich $y = au$ und $\frac{t}{a} = v$ setzt; desgleichen $\int \frac{du}{1+u^2}.L(v^2+u^2) = H_u^v$, welche Form daher die einzige aus F^1 entspringende eigene Function ist, die aber nur zwei Elemente hat.

Wir haben daher nunmehr alle logarithmisch-rationalen Differentiale so weit reducirt, dafs sie wenigstens durch Functionen mit zwei Elementen integrirt werden können. Um aber gewifs zu sein, dafs es mit F^1 immer gelinge, müssen wir sehen, ob auch die so eben vorgenommene Sonderung von F^1 nicht etwa Ausnahme-Fälle habe, die nicht auf Functionen mit zwei Elementen gebracht werden könnten.

Als solche bieten sich besonders die dar, wenn $n = m$ ist, oder wenn n und m imaginair sind.

Erster Fall, wenn $n = m$. Alsdann wäre $x =$ Const. und die Substitution unbrauchbar. In diesem Falle mufs $2n = \frac{b-c}{c_1-b_1}$ und

$n^2 = \frac{c_1 b - b_1 c}{b_1 - c_1}$, folglich $(b-c)^2 = 4(b_1-c_1)(c_1 b - b_1 c)$ sein. Diese Gleichung nach b_1 aufgelöst giebt

$$b_1 = c_1 \cdot \frac{b+c}{2c} \pm \frac{b-c}{2c} \cdot \sqrt{(c_1^2 - c)}.$$

Bei diesem Verhältnifs zwischen den Coefficienten ist die Substitution unmöglich, weil sie $x = \text{Const.}$ giebt.

Die Relation kann zwar, wie leicht zu sehen, oft Statt finden, indessen behaupte ich, dafs es nur geschehen kann, wenn die quadratischen Functionen $\binom{b}{2}x$, $\binom{c}{2}x$ reelle Factoren haben; nicht, wenn dieselben imaginair sind, welches eben der Fall der Formel F^1 ist; nemlich in

$$F^1 = \int \frac{\binom{a}{1}x\,dx}{\binom{b}{\beta}x} \cdot L\binom{c}{\gamma}x.$$

Setzt man nemlich $\binom{c}{\gamma}x$ und $\binom{b}{\beta}x$ statt $\binom{c}{2}x$ und $\binom{b}{2}x$, d. h. beziehlich c^2, $cC\gamma$ und b^2, $bC\beta$ statt c, c_1, b, b_1, so bekommt man $c_1^2 - c = c^2 C\gamma^2 - c^2 = -c^2 S\gamma^2$, also b_1 oder $bC\gamma$ imaginair, wenn nicht zugleich $b = c$, in welchem Falle $b_1 = c_1$ oder $bC\beta = cC\gamma$ ist. Hieraus erhellet, dafs der einzige mögliche Ausnahme-Fall in dieser Hinsicht

$$F^1 = \int \frac{\binom{a}{1}x \cdot dx}{\binom{c}{\gamma}x} \cdot L\binom{c}{\gamma}x$$

ist.

Dieser Fall aber, der beim ersten Anblick sehr zusammengesetzt zu sein scheint, kann glücklicherweise durch die schon früher angewandte Zerlegung von F^1 auf eine, eben der Ausnahme wegen, merkwürdige Function mit einem Element, nemlich H_u^1 oder $\int \frac{du}{1+u^2} L(1+u^2)$ reducirt werden.

Setzt man nemlich $x = c(uS\gamma - C\gamma)$, so wird

$$F^1 = \tfrac{1}{4} a_1 \left[L\binom{c}{\gamma}x\right]^2 + A\int \frac{dx}{\binom{c}{\gamma}x} L\binom{c}{\gamma}x,$$

und

$$\int \frac{dx}{\binom{c}{\gamma}x} L\binom{c}{\gamma}x = \frac{1}{cS\gamma}\int \frac{du}{1+u^2}\left[L(cS\gamma^2) + L(1+u^2)\right]$$

$$= \frac{1}{cS\gamma} \cdot \left[L(c^2 S\gamma^2) \cdot Lu + H_u^1\right].$$

Zweiter Fall. Wenn n oder m imaginair ist.

In diesem Falle mufs

$$\tfrac{1}{4}(b-c)^2-(b_1-c)(c_1b-b_1c)$$

negativ sein, und also $=-r^2$ gesetzt werden. Diese Gleichung giebt aufgelöset,

$$b_1 = c_1\frac{b+c}{2c} \pm \frac{b-c}{2c}\sqrt{\left(c_1^2-c-\frac{4cr^2}{(b-c)^2}\right)},$$

so dafs b_1 imaginair ist, wenn man $c=k^2$ und $c_1=kC\gamma$ setzt, um zu dem eigentlichen F^1 oder zu

$$\int \frac{\binom{a}{1}x\,.\,dx}{\binom{b}{\beta}x}\,.\,L\binom{k}{\gamma}x$$

zu gelangen. Nun mufs aber die gegebene Form F^1 immer reelle Coefficienten haben, folglich kann dieser Fall nicht Statt finden, oder es mufs wenigstens eine von den quadratischen Functionen, hier $\binom{c}{2}x$, reelle einfache Factoren haben, wodurch offenbar F^1 auf E^1 gebracht wird.

Hierdurch ist nunmehr, da die Substitution $x=\frac{m+ny}{1+y}$ nicht mehrere Ausnahme-Fälle zuläfst als die eben betrachteten, vollständig erwiesen, dafs F^1 immer durch Functionen von höchstens zwei Elementen ausgedrückt werden kann. Das Nemliche wurde aber oben von C^1, D^1 und E^1 bewiesen. Also kann jede Integration logarithmisch-rationaler Differentiale durch Functionen mit zwei Elementen bewerkstelligt werden.

Um das Gleiche auch von den Kreisbogen Differentialen zu beweisen, dürfen wir nur die Zerlegung von

$$5.\quad \delta=\int\frac{dx}{c^2+2cxC\gamma+x^2}L(b+b_1x)\left(=\int\frac{dx}{\binom{c}{\gamma}x}\,.\,L\binom{b}{1}x\right)$$

zeigen. Setzen wir

$$x = c(zS\gamma-C\gamma),$$

und der Kürze wegen:

$$\binom{a}{1}z = b-b_1cC\gamma+b_1C\gamma\,.\,z,$$

so wird sogleich

$$\delta = \frac{1}{cS\gamma}\int\frac{dz}{1+z^2}\,.\,L(a+a_1x),$$

und diese Form

$$\int \frac{dx}{1+x^2} L\binom{a}{1} x = {}^{a}_{1}\delta x,$$

welche schon nur drei Elemente hat, läfst sich, wie folgt, noch vereinfachen:

Setzt man nemlich

$$x = \frac{\alpha + z}{1 - \alpha z},$$

so wird

$$\frac{dx}{1+x^2} = \frac{dz}{1+z^2}$$

und

$$\binom{a}{1} x = a - \frac{a_1}{\alpha} + \frac{a_1\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)}{1-\alpha z},$$

und folglich

$$L\binom{a}{1} x = L\left(a - \frac{a_1}{\alpha}\right) + \frac{\pi}{2} - L\frac{A + A_1 z}{a_1(1+\alpha^2)},$$

wenn der Kürze wegen

$$A = \alpha\left[1 + \binom{a}{1}\alpha . \binom{a}{1}\frac{-1}{\alpha}\right]$$

und

$$A_1 = -\alpha^2\left[1 + \left(a - \frac{a_1}{\alpha}\right)^2\right]$$

gesetzt wird.

Multiplicirt man daher die obige Differential-Gleichung mit dieser Kreisbogen-Gleichung, und integrirt, so findet man:

$${}^{a}_{1}\delta x = \left[L\left(a - \frac{a_1}{\alpha}\right) + \frac{\pi}{2}\right] L z - {}^{A}_{1}\delta z + \text{Const.},$$

eine Gleichung, die sehr gut als Ausdruck einer Eigenschaft von ${}^{a}_{1}\delta$ angesehen werden könnte, die wir aber nur zur Vereinfachung dieser Formel anwenden wollen. Dieses kann auf verschiedene Weise geschehen, je nachdem das arbitraire α verschieden bestimmt wird. Ich habe mehrere Formen mit zwei Elementen versucht, wie die Form

$$\int \frac{dz}{1+z^2} L(a+z),$$

die immer, oder

$$\int \frac{dz}{1+z^2} . L\, a(1+z),$$

die nicht immer zum Ziele führt. Die folgende

$$\int \frac{dz}{1+z^2} L(bz)$$

hat mir die zweckmäfsigste geschienen, theils weil sich δ am leichtesten

auf dieselbe reduciren läfst, theils weil sie der obigen logarithmischen am nächsten verwandt ist.

Die Reduction geschiehet, wenn man $A = 0$ setzt, wodurch man für α eine Gleichung von der Form

$$\alpha - \frac{1}{\alpha} = 2k = \frac{a_1}{a} - \frac{a}{a_1} - \frac{1}{a a_1}$$

erhält, so dafs

$$\alpha = k \pm \sqrt{(k^2+1)},$$

und folglich immer reell ist Hieraus erhellet, dafs δ immer auf

$$\int \frac{dz}{1+z^2} L(A, z)$$

gebracht werden, und demnach $\int P dx L R$ auch immer durch Functionen mit nur zwei Elementen gefunden werden kann.

4. Versuch, die gefundenen Functionen mit zwei Elementen in Functionen mit nur einem Element aufzulösen, oder wenigstens durch einander auszudrücken.

Bis hier gelang es uns, alle zu den rationalen logarithmischen und Kreisbogen-Differentialen gehörigen Integral-Ausdrücke auf Functionen mit nur zwei Elementen zurückzuführen. Sobald man aber diese Functionen auf andere mit nur einem Element bringen will, häufen sich die Schwierigkeiten.

Die Functionen mit zwei Elementen durch einander auszudrücken, hat im Allgemeinen keine besondere Schwierigkeit; auch ist es bei mehreren schon oben geschehen. Wir brauchen daher nur darauf hinzuweisen. Um die Uebersicht zu erleichtern, wollen wir die verschiedenen Functionen mit zwei Elementen in Classen eintheilen, so dafs die, welche durch einander ausgedrückt werden können, vereinigt werden.

Erste Classe. $B_y^a = \int \frac{dy}{y} L(a+y)$, $\int \frac{du}{1+u^2} L(a+u)^2 = I_u^a$,

$$E_x^a = \int \frac{dx . Lx}{1+2xC\alpha+x^2}, \quad {}_a^E x = \int \frac{dx}{a^2+x^2} L(1+x)^2.$$

Zweite Classe. $H_u^a = \int \frac{du}{1+u^2} L(a^2+u^2)$, wovon besonders die Function mit nur einem Element:

$$H_u^1 = \int \frac{du}{1+u^2} . L(1+u^2)$$

zu bemerken ist.

Dritte Classe. $\left(\lambda x = \int \frac{dx}{x} L(1+x)\right.$, **mit nur einem Element**$\left.\right)$ **(aus** C^1**),** $D_x^\beta = \int \frac{dx}{x} L(1 + 2x C\beta + x^2)$ **(aus** D^1**)**

$$^t Dx = \int \frac{dx}{1+x} . L(t^2 + x^2); \quad G_y^a = \int \frac{y\,dy}{a^2+y^2} . L(1+y)^2.$$

Vierte Classe. $\delta_x^a = \int \frac{dx}{1+x^2} . L(ax)$, $^a\delta x = \int \frac{dx}{1+x^2} . L(a+x)$.

Zur Rechtfertigung dieser Eintheilung müssen wir kürzlich zeigen, dafs die in eine und dieselbe Classe gebrachten Functionen durch einander ausgedrückt werden können.

Dafs es bei denen in der ersten Classe der Fall ist, folgt daraus, dafs sie alle besondere Formen von E_0^1 sind; von welchen schon gezeigt wurde, dafs man sie durch I_u^a finden kann; und daher umgekehrt diese durch jene. Eben so sind die der dritten Classe besondere Formen von D^1, aufser G_y^a, welches partiell integrirt,

$$= \tfrac{1}{2} L(a^2 + y^2) . L(1+y)^2 - \int \frac{dy}{1+y} L(a^2 + y^2)$$

ist, und sonach eben auf D^1 gebracht werden können. Also können alle Functionen von der dritten Classe durch D_x^β gefunden werden, und umgekehrt. Die in der vierten Classe, als besondere Formen von δ, können auch durch einander ausgedrückt werden. Man kann daher jede Classe als eine einzige Transcendente ansehen.

Hieraus ergiebt sich also, dafs man zu der bezweckten Integration höchstens nur vier Functionen mit zwei Elementen, und eine oder zwei transcendente Functionen mit einem Element, die aber als besondere Fälle der ersten anzusehen sind, zu postuliren braucht. Da sich nicht voraus sehen liefs, welche von den verschiedenen Formen der Transcendenten die regulärste (d. h. die, deren Eigenschaften sich am einfachsten ausdrücken lassen) sei, so habe ich alle oben angeführten verschiedenen Formen, wie sie aus der vorhergehenden Analyse unmittelbar hervorgingen, untersuchen müssen, um keine merkwürdige Form bei der Auswahl zu übergehen. Um aber die vier transcendenten Functionen wo möglich auf eine geringere Anzahl zu bringen, oder auch in einfache zu zerlegen, wird es gut sein, sie noch anders einzutheilen.

Ich bemerke, dafs alle hierhergehörigen Functionen nur von zweierlei Art sind, nemlich:

1) solche, deren Differential ein Product eines Logarithmus in das Differential eines Kreisbogens ist, oder umgekehrt, die also von der Form:

$$\int dJ.L \text{ oder } \int dL.J$$

sind. (Classe 1. und 2.)

2) Solche, deren Differential ein Product eines Logarithmus in das Differential eines Logarithmus, oder auch eines Kreisbogens in das Differential eines Kreisbogens ist, die also von der Form:

$$\int dL.L^1 \text{ oder } \int dJ.J^1$$

sind. (Classe 3. und 4.)

Diese Eintheilung wird sich in der Folge rechtfertigen. Dafs die Functionen der ersten Art durch einander ausgedrückt werden können, ergiebt sich im Allgemeinen daraus, dafs

$$\int dJ.L + \int dL.J = L.J$$

ist, woraus zu vermuthen, dafs sie alle nur eine neue transcendente Function von zwei Elementen voraussetzen: ja, dafs sie selbst alle durch eine und dieselbe Function H_x^1 von einem Elemente ausgedrückt werden können. Wie von den Functionen der ersten Art, die als transcendente Producte logarithmischer und circulairer, also ungleicher Functionen betrachtet werden können, kann ein Gleiches von der zweiten Art, welche transcendente Producte gleicher Functionen sind, erwartet werden. Hier kommt in einer höheren, transcendenten Bedeutung dasjenige wieder vor, was in den Elementen bei den entgegengesetzten Gröfsen Statt findet, dafs nemlich gleiche Zeichen positive, ungleiche Zeichen negative Producte geben. Kreisbogen und Logarithmen sind hier die entgegengesetzten Functionen, und man kann J als einen negativen, oder, wie gewöhnlich, imaginairen Logarithmen betrachten. Die Functionen der ersten Art, als aus ungleichen entspringend, müssen daher negative, d. h. zu den circulairen gehörende Functionen geben (was sich auch bestätigt). Mithin werden die der zweiten Art positive, oder dem Logarithmus analoge Functionen geben. Auch fand ich, dieser Analogie folgend, im Voraus, dafs die Function δ, die so verschieden von D zu sein scheint, gleichwohl durch letztere ausgedrückt werden kann. Wenn nemlich φ und

φ^1 zwei Bogen sind, deren Tangenten die Form $\frac{a+a_1 v}{a+\alpha_1 v}$ haben, desgleichen r und r^1 von der Form $\sqrt{(c+c_1 v+c_2 v^2)}$, so kann man δ oder $\int \frac{dv}{v^2+\beta^2} L(v-b)$ auf

$$\frac{1}{4\beta}\left(D_r^{\varphi}-D_{r^1}^{\varphi^1}\right)+AL(v^2+\beta^2)+BL\frac{v}{\beta}+C$$

bringen. Die Bestimmung der Constanten übergehe ich, da sich bald eine einfachere Art, δ durch D auszudrücken, zeigen wird.

Functionen von der ersten Art: $\left\{\begin{matrix}\int dL.L\\ \int dL.L\end{matrix}\right\}$.

Da die weitere Zerlegung nicht gelang, so fing ich an, die Eigenschaften der hierher gehörigen Functionen $\left(\text{besonders } I_u^a \text{ und } H_u^a\right)$ zu suchen. Vorzugsweise zog ich die in der obigen Analyse sich besonders auszeichnende einfache Function H_a^1 oder $\int \frac{du}{1+u^2} L(1+u^2)$ in Betracht. Besonders schien die Substitution $u=\frac{a+x}{1-ax}$ gelingen zu müssen: sie gab aber statt der gesuchten Eigenschaften der Function mit einem Element H_u^1 die eben so gewünschte Zerlegung der Function I_u^t von zwei Elementen, die sich durch jene so ausdrücken läfst:

$$\int \frac{dx}{1+x^2}.L(t+x)^2, \text{ oder}$$

Lehrsatz I. $I_x^t = H\left(\frac{1-tx}{t+x}\right)+H_x^1+Lx\,L(1+t^2)+C.$

Denn setzt man $\frac{1-tx}{t+x}=u$, so wird $\frac{du}{1+u^2}=-\frac{dx}{1+x^2}$ und

$$1+u^2=\frac{(1+t^2)(1+x^2)}{(t+x)^2},$$

folglich

$$dH_u^1=\frac{-dx}{1+x^2}.L\frac{(1+t^2)(1+x^2)}{(t+x)^2},$$

und daher

$$d\left(H_u^1+H_x^1+Lx.L(1+t^2)\right)$$

$$=\frac{dx}{1+x^2}\left(-L\frac{(1+t^2)(1+x^2)}{(t+x)^2}+L(1+x^2)+L(1+t^2)\right),$$

$$\text{d. h.}=\frac{dx}{1+x^2}L(t+x)^2=d.I_x^t.$$

Integrirt man nun, so erhält man den obigen Lehrsatz, aus welchem

mehrere merkwürdige Corallarien gezogen werden können; nemlich

$$1)\quad I_x^0 = H_x^1 + H_{\left(\frac{1}{x}\right)}^1 + C = \int \frac{dx}{1+x^2} Lx^2,$$

welcher Ausdruck auch für H_x^0 und $I_{\left(\frac{1}{x}\right)}^0 + B$ gilt.

$$2)\quad I_{\left(\frac{1}{a}\right)}^a = \mathit{L}\frac{1}{a} . L(1+a^2),$$

und wenn $I_0^x = 0$, welches ein bestimmtes Integral (*intégrale définie*) ist,

$$\int_{\left(\frac{1}{a}\right)}^0 \frac{dx}{1+x^2} L(a+x)^2 = \mathit{L}\frac{1}{a} . L(1+a^2) \quad \left\{\begin{array}{c}\text{zwischen den Grenzen} \\ x=0 \text{ und } x=\frac{1}{a}\end{array}\right\}.$$

3) Eben so $I_1^1 = \frac{1}{4}\pi L2 = -I_{(-1)}^{(-1)}$,

4) $I_x^a + I_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{a}} = I_x^0 \mathit{L}x\, La^2$,

5) $I_x^a - I_a^x = L(1+a^2)\mathit{L}x - L(1+x^2)\mathit{L}a + I_x^0 - I_a^0$,

6) $I_\infty^t + I_t^0 = \frac{\pi}{2} L(1+t^2)$, folglich $I_\infty^0 = 0$,

7) $I_{-x}^{\ a} + I^{-a}_{\ x} + 2H_{\left(\frac{1}{a}\right)}^1 = 0$,

nebst mehreren bestimmten Integralen, die ich übergehe.

Da auf diese Weise die Zerlegung von I_x^a oder $\int \frac{dx}{1+x^2} . L(a+x)^2$ glücklich gefunden war, nahm ich die noch übrigen vor. Besonders schien die aus D entsprungene Function $\int \frac{x\,dx}{1+x^2} L(a+x)^2$, oder $\int \frac{dx}{a+x} L(1+x^2)$ eben so auflöslich zusammengesetzt zu sein, wie I_x^a, wovon sie nicht sehr verschieden zu sein schien. Leider aber glückte eine andere Zerlegung, als die sich unmittelbar darbietende imaginaire, aller Mühe ungeachtet, nicht. Ein so geringer Erfolg bei dem einfacheren Falle versprach zwar nicht viel für H_x^a oder $\int \frac{dx}{1+x^2} . L(a^2+x^2)$, wovon, da die Function nur imaginaire Factoren enthält, noch weniger eine reelle Zerlegung zu hoffen war. Gleichwohl ist dieselbe vollkommen gelungen.

Bevor ich sie vollständig vortrage, will ich historisch anzeigen, auf welche Standpuncte ich die Zerlegung successive brachte.

Zuerst fand ich, dafs $H_x^a + H_{\left(\frac{a}{x}\right)}^a$ durch I, und folglich durch H^1 ausgedrückt werden kann, woraus sich schon eine Zerlegung hoffen liefs. Späterhin fand ich noch, dafs H_u^a wenigstens auf zwei verschiedene Arten durch I gefunden werden kann, nemlich

$$1)\quad H_u^a = \tfrac{1}{2}\left(I_{u^1}^{a^1} - I_{u''}^{a^1}\right) + \text{einer Summe von } L \times J$$

wo $a^1 = \frac{a}{u}$, $u^1 = \frac{u - \frac{a}{u}}{1+a}$ und $u'' = +\frac{u+\frac{a}{u}}{a-1}$.

$$2)\quad H_u^a = I_{\left(\frac{a}{u}\right)}^{\frac{1}{u}} - I_{\left(\frac{a}{u}\right)}^{-\frac{1}{u}} + 2I_u^0 + \Sigma(L \times J),$$

woraus schon erhellet, dafs H_u^a durch H_x^1 mit Hülfe unseres ersten Lehrsatzes ausgedrückt werden kann. Von den verschiedenen Verfahren, durch welche man zur Zerlegung von H_x^a gelangt, will ich nur das einfachste anführen, obgleich es nicht immer zum Ziele führt, z. E. nicht die Zerlegung von I_x^a giebt. Diese ist eine Variation von H_x^a, in Rücksicht des Parameters (a), und nochmaliger Integration. Weil nemlich H_x^a eine Function sowohl von x als von α ist, so kann man die Ableitung nach a finden, welche völlig bestimmt sein mufs, wenn man den Anfang des Integrals festsetzt, z. E. $H_0^a = 0$.

Dann ist:

$$\begin{aligned} {}_a^d H_x^a = H^1 &= \int \frac{dx}{1+x^2} \cdot {}_a^d L(a^2+x^2) \\ &= \int \frac{dx}{1+x^2} \cdot \frac{2a}{a^2+x^2} = \int \frac{2a\,dx}{a^2-1}\left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{a^2+x^2}\right) \\ &= \frac{2a}{a^2-1} L x - \frac{2}{a^2-1} L\frac{x}{a} + C. \end{aligned}$$

Nach geschehener Entwickelung und Integration wird aber

$$H_x^a = x L a^2 + \frac{x^3}{3}\left(\frac{1}{a^2} - L a^2\right) - \text{etc.},$$

und daher

$${}_x^d H_x^a = x \cdot \frac{2}{a} - \frac{x^3}{3}\left(\frac{2}{a^3} + \frac{2}{a}\right) + \ldots . \text{ etc.}$$

d. h. ${}_a^d H_0^a = 0$, und folglich $C = 0$. Es ist also

$$\frac{d}{a}H^a_x = \frac{2a}{a^2-1}Jx - \frac{2}{a^2-1}\cdot J\left(\frac{x}{a}\right);$$

und also, wenn man mit da multiplicirt, sodann integrirt, und der Kürze wegen $\frac{x}{a} = u$ setzt:

$$H^a_x = \int\left(\frac{2a\,da}{a^2-1}\right)Jx - \int\frac{2\,da}{a^2-1}Ju$$

$$= L(a^2-1)Jx - Ju\,L\frac{a-1}{a+1} + \int\frac{du}{1+u^2}L\frac{a-1}{a+1}.$$

Nun ist aber, weil $a = \frac{x}{u}$, wie leicht zu sehen:

$$\int\frac{du}{1+u^2}\cdot L\frac{a-1}{a+1} = \int\frac{du}{1+u^2}\cdot L\frac{x-u}{x+u} = \int\frac{du}{1+u^2}\cdot L(x-u) - \int\frac{du}{1+u^2}L(x+u)$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(-I^{\ x}_{-u} - I^x_u\right) + C,$$

folglich wird

$$H^a_x = \tfrac{1}{2}\left(-I^{\ x}_{-u} - I^x_u\right) + L(a^2-1)Jx + Ju\,L\frac{a+1}{a-1} + C.$$

Es kann aber I^x_z nach dem ersten Lehrsatze durch H^1_v ausgedrückt werden. Thut man dieses, und bestimmt gehörig die Constante, so ergiebt sich folgende vereinfachte Zerlegung von $2H^a_u$, nemlich:

Zweiter Lehrsatz.

$$2H^a_u = H^1\left(\frac{u-au^{-1}}{1+a}\right) + H^1\left(\frac{u+au^{-1}}{1-a}\right) + 2H^1(u^{-1})$$

$$+ Ju\cdot L(1-a^2)^2 + J\frac{u}{a}\cdot L\left(\frac{1+a}{1-a}\right)^2 + C,$$

ein merkwürdiges Theorem, welches wir mehrerer Vollständigkeit und Deutlichkeit wegen, auch noch besonders beweisen wollen.

Da im Allgemeinen

$$dH^1_v = \frac{dv}{1+v^2}\cdot L(1+v^2)$$

ist, so wird

$$dH^1\left(\frac{u-au^{-1}}{1+a}\right) = \frac{du(1+au^{-2})(1+a)}{(1+a)^2+(u-au^{-1})^2}\cdot L\frac{(1+a)^2+(u-au^{-1})^2}{(1+a)^2},$$

und weil

$$(ab+a_1b_1)^2 + (ab_1-a_1b)^2 = (a^2+a_1^2)\cdot(b^2+b_1^2),$$

so ist

$$(1+a)^2 + (u-au^{-1})^2 = (1+u^2)(1+a^2u^{-2}),$$

und folglich auch

$$= (1-a)^2 + (u + a u^{-1})^2,$$

wenn a negativ genommen wird.

Es ist also

$$dH^1\left(\frac{u - a u^{-1}}{1+a}\right) = du\left(\frac{1}{1+u^2} + \frac{a}{(a^2+u^2)}\right) L\frac{(1+u^2)(1+a^2u^{-2})}{(1+a)^2}$$

und

$$dH^1\left(\frac{u + a u^{-1}}{1+a}\right) = du.\left(\frac{1}{1+u^2} - \frac{a}{a^2+u^2}\right) L\frac{(1+u^2)(1+a^2u^{-2})}{(1-a)^2}.$$

Die Summe dieser beiden Differentiale ist, wie leicht zu sehen:

$$= \frac{2du}{1+u^2}.L(1+u^2)(1+a^2u^{-2})$$

$$- \frac{du}{1+u^2}[L(1+a)^{-2} + L(1-a)^{-2}]$$

$$- \frac{a\,du}{a^2+u^2}[L(1+a)^{-2} - L(1-a)^{-2}],$$

wenn nemlich die Brüche und Logarithmen partiell aufgelöset werden. Durch eine leichte Verwandlung erhält man:

$$d\left[H^1\left(\frac{u - a u^{-1}}{1+a}\right) + H^1\left(\frac{u + a u^{-1}}{1-a}\right)\right]$$

$$= \frac{2du}{1+u^2}[L(1+u^2) + L(a^2+u^2) - Lu^2]$$

$$+ \frac{a\,du}{a^2+u^2} L\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^2 - \frac{du}{1+u^2}.L(1-a^2)^2,$$

und folglich durch Integration:

$$H^1\left(\frac{u - a u^{-1}}{1+a}\right) + H^1\left(\frac{1 + a u^{-1}}{1-a}\right)$$

$$= \text{Const.} + 2H^1_u + 2H^a_u - 2I^0_u + L\frac{u}{a}.L\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^2 - Lu.L(1-a^2)^2,$$

eine Gleichung, die unmittelbar H^a_u giebt, und mit Hülfe des ersten Zusatzes zum ersten Lehrsatze den obigen Lehrsatz beweiset.

Erster Zusatz. $H^a_2 + H^{\frac{1}{a}}_{\frac{1}{2}} = Lz.La^2 + I^0_2 + C.$

Zweiter Zusatz. Wenn $H^a_0 = 0$, so ist $H^{\pm a}_{\infty} = \pi L(1+a)$, welches ein bestimmtes Integral (*intégrale définie*) giebt, nemlich:

$${}^0\int_{\infty} \frac{du}{1+u^2} L(a^2+u^2) = \pi L(1+a)\begin{cases} u = 0, \\ u = a). \end{cases}$$

Dritter Zusatz. Wenn $a = 1$ ist, und die Constante gehörig bestimmt wird, so ist

$$H^1_u - H^1_{\left(\frac{1}{u}\right)} = \tfrac{1}{2} H^1_{\frac{1}{2}}\left(u - \frac{1}{u}\right) + (Lu - L1)LH,$$

welches eine Bisectionsformel für die Function H^1 von einem Element ist. Nimmt man hier $u = \infty$, so findet sich

$$H^1_\infty = \pi L2 = {}^{0}\!\int_{\infty} \frac{du}{1+u^2} L(1+u^2),$$

welches ein bekanntes *intégrale définie* ist. Hieraus erhellet nun deutlich, dafs alle Functionen erster Art nur die einzige neue H^1_x oder

$$\int \frac{dx}{1+x^2} L(1+x^2)$$

voraussetzen, durch welche sie alle ausgedrückt werden können.

Functionen von der zweiten Art:
($\int dL.L^1$ und $\int dL.L^1$).

Diese können im Allgemeinen nicht durch Functionen eines Elements, (wie z. B. λx) ausgedrückt werden, wohl aber eine durch die andere, so dafs nur eine Function zweier Elemente zu postuliren nöthig ist. Im Allgemeinen scheint es zwar gleichgültig, welche von den hierher gehörigen Functionen zweier Elemente man zum Grunde legen will; jedoch ist dazu offenbar die einfachste die beste. Man kann daher nur erst wählen, nachdem die Eigenschaften der Function untersucht worden sind. Durch nähere Untersuchung habe ich gefunden dafs die Function D^a_x oder

$$\int \frac{dx}{x} . L(1 + 2xC\alpha + x^2)$$

am leichtesten zu berechnen ist, und die einfachsten und merkwürdigsten Eigenschaften hat, und also am meisten dazu geeignet ist, die übrigen hierher gehörigen Functionen darauf zu beziehen.

Ich habe vielfältig vergebens versucht, D^a_x in allgemeine und reelle Functionen Eines Elements aufzulösen. Eine imaginaire Sonderung dagegen ist leicht.

Da nemlich

$$1 + 2xC\alpha + x^2 = (1 + xe^{\alpha i})(1 + xe^{-i\alpha}),$$

so wird

$$D^\alpha_x = \int \frac{dx}{x} L(1 + xe^{\alpha i}) + \int \frac{dx}{x} L(1 + xe^{-\alpha i})$$
$$= \lambda(xC\alpha + xS\alpha i) + \lambda(xC\alpha - xS\alpha i)$$
$$(\text{wo } i^2 = -1).$$

Das merkwürdigste hierbei ist, dafs dieser im Allgemeinen imaginaire Ausdruck in unzähligen Fällen reell gemacht werden kann. Es kann nemlich theils, wenn α mit π commensurabel ist, D_x^α durch mehrere λ ausgedrückt werden, wie z. B.

$$D_x^{\frac{2}{3}\pi} = \tfrac{1}{3}\lambda x^3 - \lambda x,$$

theils können im Allgemeinen für jeglichen Werth von α (der auch incommensurabel mit π sein kann) unzählige Werthe von x angegeben, und die Uebergänge zum Reellen auf unzählige Arten auf die Weise bewerkstelligt werden, dafs man D_x^α durch mehrere λ erhält. Dennoch kann D_x^α im Allgemeinen nicht anders als durch eine unendliche Reihe von λ reell ausgedrückt werden. Ich werde dieses weiter unten näher auseinandersetzen.

Für jetzt kommt es nur darauf an, zu zeigen, dafs alle Functionen zweiter Art durch D_x^α, diese Function als bekannt vorausgesetzt, ausgedrückt werden können.

Zuerst ist, wie leicht zu sehen,

$$\lambda x = \tfrac{1}{2}\int\frac{dx}{x}L(1+x^2) = \tfrac{1}{2}\int\frac{dx}{x}L(1+2xC0+x^2) = \tfrac{1}{2}D_x^0.$$

Jedoch mufs λx als Function eines Elements nicht übersehen werden; weshalb wir sie noch besonders betrachten wollen. Zweitens haben wir schon bemerkt, dafs alle aus D^1 und E^1 entspringende, hierher gehörige Integrale durch D_x^α gefunden werden, während alle dergleichen aus F^1 auf D^1 und E^1 zurückgeführt werden, und daher ebenfalls durch D_x^α gefunden werden können. Die einzige noch zweifelhafte Form ist daher die Kreisbogen-Form δ_x^a oder $\int\frac{dx}{1+x^2}Lax$, die aber auch auf D_x^α, wie folgt, gebracht werden kann. Da nemlich D_x^α eine Function zweier Elemente ist, so mufs sie auch eine Ableitung nach dem Parameter α haben. Es ist aber, wie leicht zu sehen,

$$\tfrac{d}{\alpha}D_x^\alpha = D^1 = \tfrac{d}{\alpha}.\int_x\frac{dx}{x}L(1+2xC\alpha+x^2)$$

$$= \int_{(x)}\frac{dx}{x}.\tfrac{d}{\alpha}L(1+2xC\alpha+x^2) = \int\frac{dx}{x}.\frac{-2xS\alpha}{1+2xC\alpha+x^2}$$

$$= -2S\alpha\int_{(x)}\left(\frac{dx}{(S\alpha)^2+(x+C\alpha)^2}\right) = -2.L\frac{x+C\alpha}{S\alpha} + C0x,$$

wo Cox eine von x unabhängige Gröfse oder sogenannte Constante ist, die aber eine Function von α sein kann, welche sich, wie folgt, bestimmen läfst. Da durch unmittelbare Entwickelung

$$D_x^\alpha = 2\int \frac{dx}{x}\left(xC\alpha - \frac{x^2}{2}C2\alpha + \frac{x^3}{3}C3\alpha - \ldots.\right)$$
$$= 2\left(xC\alpha - \frac{x^2 C2\alpha}{3^2} + \frac{x^3 C3\alpha}{3^2} - \ldots.\right),$$

so kann man $D_0^\alpha = 0$ setzen. Alsdann ist

$$\frac{d}{\alpha} D_x^\alpha = -2(xS\alpha - \tfrac{1}{2}x^2 S2\alpha + \ldots.) = 0,$$

und für $x = 0$,

$$\frac{d}{\alpha} D_0^\alpha = 0 = -2L\frac{C\alpha}{S\alpha} + Cox,$$

folglich

$$Cox = 2L\frac{C\alpha}{S\alpha};$$

mithin

$$\frac{d}{\alpha} D_x^\alpha = 2\left(L\frac{C\alpha}{S\alpha} - L\frac{C\alpha + x}{S\alpha}\right) = -2.L\frac{xS\alpha}{1+xC\alpha};$$

folglich

$$D_x^\alpha = -\int 2\,d\alpha L\frac{xS\alpha}{1+xC\alpha}.$$

Nach bekannten trigonometrischen Formeln (oder nach Beisp. 1. Beil. 2.) ist aber

$$L\frac{xS\alpha}{1+xC\alpha} = \tfrac{1}{2}\alpha - L\frac{1-x}{1+x}T\tfrac{1}{2}\alpha,$$

und hieraus

$$D_x^\alpha = \int 2\,d\alpha L\frac{1-x}{1+x}T\tfrac{1}{2}\alpha - \int \alpha\,d\alpha;$$

folglich umgekehrt:

$$\int 2\,d\alpha L\frac{1-x}{1+x}T\tfrac{1}{2}\alpha = D_x^\alpha + \frac{\alpha^2}{2} + \overset{C}{}_{(o\alpha)},$$

d. i. wenn man $\frac{1-x}{1+x} = a$, oder $x = \frac{1-a}{1+a}$, und $T\frac{1}{2}\alpha = t$, oder $\alpha = 2Lt$ und $d\alpha = \frac{2\,dt}{1+t^2}$ setzt:

$$4)\ \int \frac{dt}{1+t^2} L(a.t) = D^{2Lt}_{\left(\frac{1-a}{1+a}\right)} + 2(Lt)^2 + \text{Const.}$$

d. h.:

Dritter Lehrsatz. $\delta_t^a = \frac{1}{4}\left(D^{(2Lt)}_{\left(\frac{1-a}{1+a}\right)} + 2(Lt)^2\right) + \text{Const.}$, welches der dritte merkwürdige Lehrsatz ist, durch welchen die Kreisbogen-Formeln auf die einfacheren logarithmischen gebracht werden können.

Aus der bisherigen Untersuchung geht nun hervor, dafs man zur Integration aller möglichen rationalen, logarithmischen und Kreisbogen-Differentiale $\int P dx\, LR$ und $\int P dx$. arc. tang. R nur diese zwei neuen elementaren Functionen

$$H_x^1 = {}^0\int \frac{dx}{1+x^2} . L(1+x^2) \text{ und}$$

$$D_x^\alpha = {}^0\int \frac{dx}{x} L(1+2x C\alpha + x^2)$$

als bekannt oder berechnet zu postuliren braucht, wozu ihrer Einfachheit wegen noch die dritte

$$\lambda x = \int \frac{dx}{x} L(1+x)$$

kommt.

Statt der ersten kann man auch die Form

$$H\varphi = \int d\varphi\, L(S\varphi)^{-2}$$

nehmen (indem man der Kürze wegen $H_r^1 \varphi$ durch $H\varphi$ bezeichnet). Wenn man nemlich $x = \cot\varphi$ oder $T\varphi = \frac{1}{x}$ setzt, so ist

$$d\varphi = \frac{-dx}{1+x^2} \text{ und } 1+x^2 = \frac{1}{S\varphi^2},$$

folglich

$$\int \frac{dx}{1+x^2} L(1+x^2) = -\int d\varphi\, L(s\varphi)^{-2} = \int d\varphi\, L(s\varphi)^2,$$

$$\text{d. h. } H_x^1 = \text{Const.} - H\varphi.$$

Als elementare bilogarithmische Functionen kann man daher annehmen:

$$\lambda x = \int \frac{dx}{x} L(1+x) \text{ *)},$$

$$D_x^\alpha = \int \frac{dx}{x} L(1+2x C\alpha + x^2),$$

$$H\varphi = \int d\varphi . L(S\varphi)^{-2},$$

durch deren Hülfe beliebige rationale logarithmische Differential-Formeln integrirt werden können.

Da die rationalen logarithmischen Differentiale schon für sich einen weit gröfseren Umfang haben, als die rationalen und einer noch weite-

---

*) Man könnte auch $\varkappa = e^\alpha = {}^1\lambda\varphi$, ${}^cD_e\varphi = {}^1D\varphi$ setzen, so dafs $\lambda\varphi = \int d\varphi\, L(1+e^\varphi)$ und ${}^1D_\varphi^\alpha = \int d\varphi\, L(1+2e^\varphi C\alpha + e^{2\varphi})$ wäre; dieses aber gewährt keine besonderen Vortheile.

ren Ausdehnung durch Verwandlung fähig sind *), so schienen mir diese drei neuen Functionen von einem so ausgedehnten Gebrauche und von eben solcher Wichtigkeit wie die logarithmischen (circulairen) und elliptischen. Ich habe deshalb keine Mühe gespart, ihren Eigenschaften nachzuspüren, die ich auch endlich fand. Ein Freund ist mir bei der begonnenen Berechnung von Tafeln für dieselben behülflich gewesen, vermöge welcher die Functionen nunmehr als bekannt angesehen werden können **).

Wenn man diese Functionen als bekannt voraussetzt, so kann man z. B. folgende Integrationen synthetisch bewerkstelligen. Wir setzen dieselben her, damit der Gebrauch der neuen Functionen besser einleuchten möge.

Aufgabe 1.

$$dy = \frac{dt}{1+t^2} \cdot L(t + T\psi)^2$$

zu integriren.

Auflösung. Man setze $t = T\varphi$, so wird

$$dy = d\varphi L(T\varphi + T\psi)^2 = d\varphi [L\int(\varphi+\psi)^2 - LC\varphi^2 - LC\psi^2],$$

folglich, weil

$$\int d\varphi L(S\varphi)^{-2} = H\varphi,$$

und mithin

$$\int d\varphi L(C\varphi)^{-2} = -H(R-\varphi) \text{ ist,}$$

durch Integration:

$$y = -H(\varphi+\psi) - H(R-\varphi) - \varphi LC\psi^2 + \text{Const.}$$

---

*) Es können nemlich unzählige Ausdrücke darauf reducirt werden, z. B.

$$\delta y = q\, d\varphi\, R[e_1^{q\varphi}, \sqrt{(a + a_1 e^{\varphi} + e^{2\varphi})}].$$

Setzt man

$$\sqrt{(a + a_1 e^{\varphi} + e^{2\varphi})} = z + e^{\varphi},$$

so ist

$$e^{\varphi} = \frac{z^2 - a}{a_1 - 2z} \text{ und } d\varphi = \left(\frac{2z}{z^2-a} + \frac{2}{a_1 - 2z}\right) dz,$$

und folglich

$$\frac{dy}{q} = \left(\frac{2z}{z^2-a} + \frac{2}{a_1-2z}\right) dz\, R\left(\frac{z^2-a}{a_1-2z}z + \frac{z^2-a}{a_1-2z}\right),$$

d. h. rational, und demnach $\int \frac{dy}{q}$ von der Form $Z + L Z^1$, und

$$y = q(Z + L Z^1) - \int \left(\frac{2z}{z^2-a} + \frac{2}{a_1-2z}\right) dz\,(Z + L Z^1),$$

also durch obige drei neue Functionen zu finden.

**) Ich habe einige der Hauptpuncte der Tafeln für λ und H mit Hülfe der gefundenen Eigenschaften berechnet, und füge sie zur Probe in der Beilage III. bei.

Aufgabe 2. $dy = \frac{dt}{1+t^2} L(a^2+t^2)$ oder $= d\varphi L(a^2+T\varphi^2)$ zu integriren.

Auflösung. Man setze $t = T\varphi = aT\beta$, so wird

$$a^2 + T\varphi^2 = T\varphi^2\left(1+\frac{1}{T\beta^2}\right) = \frac{T\varphi^2}{S\beta^2} = \frac{S\varphi^2}{C\varphi^2 S\beta^2};$$

daher:

$$dy = d\varphi L S\varphi^2 - d\varphi L(C\varphi^2 S\beta^2).$$

Weil aber $a = \frac{T\varphi}{T\beta}$, so ist

$$1 \pm a = \frac{T\beta \pm T\varphi}{T\beta} = \frac{S(\beta\pm\varphi)}{S\beta C\varphi},$$

und folglich

$$\frac{1+a}{1-a} = \frac{S(\beta+\varphi)}{S(\beta-\varphi)}, \text{ und}$$

$$1-a^2 = \frac{S(\beta+\varphi).S(\beta-\varphi)}{S\beta^2 C\varphi^2},$$

woraus

$$S\beta^2 C\varphi^2 = \frac{S(\beta+\varphi)S(\beta-\varphi)}{1-a^2},$$

und mithin

$$d\varphi L(S\beta^2 C\varphi^2) = d\varphi L S(\beta+\varphi) + d\varphi L S(\beta-\varphi) - d\varphi L(1-a^2),$$

$$\text{d. i.} = \left\{\begin{array}{c}(d\varphi+d\beta) L S(\beta+\varphi) + (d\varphi-d\beta) L S(\beta-\varphi) - d\varphi L(1-a^2)\\ -d\beta L S(\beta+\varphi) + d\beta L S(\beta-\varphi)\end{array}\right\}$$

oder

$$= d(\varphi+\beta) L S(\varphi+\beta) + d(\varphi-\beta) L S(\beta-\varphi) - d\varphi L(1-a^2) - d\beta L\frac{1+a}{1-a}$$

folgt, daher

$$dy = d\varphi L S\varphi^2 - d(\varphi+\beta) L S(\varphi+\beta) + d(\beta-\varphi) L S(\beta-\varphi) + d\varphi L(1-a^2) + d\beta L\frac{1+a}{1-a},$$

und integrirt:

$$y = -H\varphi + \tfrac{1}{2}[H(\varphi+\beta)+H(\varphi-\beta)] + \varphi L(1-a^2) + \beta L\frac{1+a}{1-a} + \text{Const.}$$

$$= \int L(a^2+T\varphi^2)d\varphi, \text{ wo } T\beta = \frac{1}{a}T\varphi,$$

welches das obige zweite Theorem ist, auf eine neue Art hergeleitet.

Aufgabe 3. $dy = d\varphi L(a^2+2aC\alpha T\varphi+T\varphi^2)$ oder

$$= \frac{dt}{1+t^2} L(a^2+2aC\alpha t+t^2)$$

zu integriren.

Auflösung. Man setze $\varphi = \psi - \beta$, oder $T\varphi = \frac{T\psi - T\beta}{1+T\psi T\beta}$, und nehme β so, dafs

$$1)\quad a^2 T\beta + a C\alpha (1 - T\beta^2) = T\beta,$$

so wird

$$dy = d\psi L \frac{\binom{a}{\alpha} T\beta + T\psi^2 . \binom{1}{\alpha} (a T\beta)}{(1 + T\beta T\psi)^2},$$

d. h.

$$dy = d\psi . L \frac{\binom{1}{\alpha} a T\beta}{T\beta^2} \cdot \frac{c^2 + T\psi^2}{(\cot\beta + T\psi)^2}, \quad \text{wo} \quad c^2 = \frac{\binom{a}{\alpha} T\beta}{\binom{1}{\alpha} a T\beta}.$$

Durch Auflösung des Logarithmen und Integrirung findet man daher

$$y = \psi L \frac{\binom{1}{\alpha} a T\beta}{(T\beta)^2} + \int d\psi L(c^2 + T\psi^2) - \int d\psi L(\cot\beta + T\psi)^2,$$

und es kann folglich y mit Hülfe der beiden vorigen Aufgaben weiter entwickelt und ganz durch H ausgedrückt werden.

Die Gleichung (1.) für β giebt

$$T\beta = \frac{a^2 - 1 \pm \sqrt{(a^4 + 2a^2 C\alpha + 1)}}{2 a C\alpha},$$

welcher Werth in $\binom{a}{\alpha} T\beta$ und $\binom{1}{\alpha} a T\beta$ gesetzt, einen noch verwickelteren Ausdruck für die Constante der Integral-Gleichung wie c etc. giebt. Ich habe deshalb den Ausdruck derselben durch folgenden trigonometrischen Calcul zu vereinfachen gesucht:

Die Gleichung (1.) kann offenbar so geschrieben werden:

$$\frac{1 - T\beta^2}{2 T\beta} = \frac{1 - a^2}{2 a C\alpha},$$

und giebt daher, wenn man $a = T\mathfrak{a}$ setzt,

$$T2\beta = C\alpha . T2\mathfrak{a} \quad (\text{oder } 2\beta = \angle C\alpha T2\mathfrak{a} \text{ etc.} < \pi)$$

woraus $C\alpha = \frac{T2\beta}{T2\mathfrak{a}}$. Substituirt man dieses in

$$a)\quad \binom{a}{\alpha} T\beta \text{ oder } = a^2 - 2 a C\alpha T\beta + T\beta^2,$$

so nimmt dieser Ausdruck successive folgende Formen an:

$$\begin{aligned}
\binom{a}{\alpha} T\beta &= T\mathfrak{a}^2 + T\beta^2 - \frac{2 T\mathfrak{a}}{T2\mathfrak{a}} . T\beta . T2\beta = T\mathfrak{a}^2 + T\beta^2 - (1 - T\mathfrak{a}^2) T\beta T2\beta \\
&= T\mathfrak{a}^2 (1 + T\beta T2\beta) - T\beta (T2\beta - T\beta) \\
&= (T2\beta - T\beta) \left(T\mathfrak{a}^2 . \frac{1 + T\beta T2\beta}{T2\beta - T\beta} - T\beta \right) \\
&= (T2\beta - T\beta) \left(T\mathfrak{a}^2 . \frac{1}{T\beta} - T\beta \right) = \frac{(T2\beta - T\beta)(T\mathfrak{a}^2 - T\beta^2)}{T\beta} \\
&= \frac{S\beta}{C2\beta C\beta T\beta} (T\mathfrak{a} + T\beta)(T\mathfrak{a} - T\beta) = \frac{S(\mathfrak{a} + \beta) S(\mathfrak{a} - \beta)}{C2\beta . C\mathfrak{a}^2 C\beta^2} = \binom{a}{\alpha} T\beta.
\end{aligned}$$

Substituirt man ferner $C\alpha = \frac{T2\beta}{T2\mathfrak{a}}$ in

$$b)\quad \binom{1}{\alpha} a\,T\beta = 1 + 2\,a\,C\alpha\,T\beta + a^2\,T\beta^2,$$

so erhält man eben so, successive:

$$\binom{1}{\alpha} a\,T\beta = 1 + T\mathfrak{a}^2\,T\beta^2 + \frac{2\,T\mathfrak{a}}{T2\mathfrak{a}}\,.\,T\beta\,T2\beta$$

$$= 1 + T\mathfrak{a}^2 T\beta^2 + (1 - T\mathfrak{a}^2)\,T\beta\,T2\beta = 1 + T\beta\,T2\beta + T\mathfrak{a}^2\,T\beta(T\beta - T2\beta)$$

$$= (T2\beta - T\beta)\left(\frac{1 + T\beta\,T2\beta}{T2\beta - T\beta} - T\mathfrak{a}^2\,T\beta\right) = \frac{T2\beta - T\beta}{T\beta}(1 - T\mathfrak{a}^2\,T\beta^2)$$

$$= \frac{(1 - T\mathfrak{a}\,T\beta)(1 + T\mathfrak{a}\,T\beta)}{C2\beta} = \frac{C(\mathfrak{a}+\beta).C(\mathfrak{a}-\beta)}{C2\beta.C\mathfrak{a}^2\,C\beta^2} = \binom{1}{\alpha} a\,T\beta.$$

Hierdurch wird nun

$$\frac{\binom{a}{\alpha} T\beta}{\binom{1}{\alpha} a\,T\beta} = \frac{S(\mathfrak{a}+\beta).S(\mathfrak{a}-\beta)}{C(\mathfrak{a}+\beta).C(\mathfrak{a}-\beta)},$$

und daher

$$c = \sqrt{[T(\mathfrak{a}+\beta).T(\mathfrak{a}-\beta)]}$$

und

$$\frac{\binom{1}{\alpha} a\,T\beta}{(T\beta)^2} = \frac{C(\mathfrak{a}+\beta).C(\mathfrak{a}-\beta)}{C2\beta.C\mathfrak{a}^2.S\beta^2}.$$

Setzt man noch

$$c = T\mathfrak{A},\ \text{und}\ \frac{T(\varphi+\beta)}{c} = T\gamma,$$

so wird

$$1 - c^2 = \frac{C(\mathfrak{a}+\beta).C(\mathfrak{a}-\beta) - S(\mathfrak{a}+\beta).S(\mathfrak{a}-\beta)}{C(\mathfrak{a}+\beta)\,C(\mathfrak{a}-\beta)} = \frac{C2\mathfrak{a}}{C(\mathfrak{a}+\beta)\,C(\mathfrak{a}-\beta)} = \frac{2\,T\mathfrak{A}}{T2\mathfrak{A}}.$$

Nun ist aber nach der zweiten Aufgabe

$$\int d\psi\,L(c^2 + T\psi^2)\ \text{oder}\ \int d\psi\,L(T\mathfrak{A}^2 + T\psi^2)$$

$$= \tfrac{1}{2}[H(\psi+\gamma) + H(\psi-\gamma)] - H\psi + \psi L\frac{2\,T\mathfrak{A}}{T2\mathfrak{A}} + \gamma L[T(\tfrac{1}{2}R + \mathfrak{A})],$$

und nach der ersten Aufgabe

$$\int d\psi\,L(T\psi + T\beta^1)^{-2} = H(\psi + \beta^1) + H(R - \psi) + \psi L(C\beta^1)^2.$$

Also wird, wenn man alles zusammennimmt, indem man $\beta^1 = R - \beta$ (wo $R = 90^\circ = \frac{1}{2}\pi$ ist) und $\psi = \varphi + \beta$ setzt:

$$y\ \text{oder}\ \int d\varphi\,L(T\mathfrak{a}^2 + 2\,C\alpha\,T\mathfrak{a}\,T\varphi + T\varphi^2) = F_0$$

$$= \tfrac{1}{2}[H(\varphi+\beta+\gamma) + H(\varphi+\beta-\gamma)] - H(\varphi+\beta) + H[R-(\varphi+\beta)]$$

$$+ H(R+\varphi) + \gamma\,L\,T(\tfrac{1}{2}R + \mathfrak{A}) + \varphi L\frac{C2\mathfrak{a}}{C2\beta\,C\mathfrak{a}^2} + \text{Const.},$$

wozu nur folgende einfache Hülfsgleichungen nöthig sind:

$$T2\beta = C\alpha . T2\mathfrak{a},$$
$$T\mathfrak{A} = \sqrt{[T(\mathfrak{a}+\beta).T(\mathfrak{a}-\beta)]}$$

und

$$T\gamma = \frac{T(\varphi+\beta)}{T\mathfrak{A}}.$$

Mit Hülfe der Eigenschaften von H kann dieser Integral-Ausdruck noch etwas vereinfacht werden, wie ich weiterhin zeigen werde.

Anmerkung. $\int d\psi L(a^2 - 2aC\alpha T\psi + T\psi^2)$ findet man, wenn man in den vorigen Ausdrücken $\psi = -\varphi$ setzt.

Zusammenstellung.

I. Integration der einfachen logarithmisch-rationalen Differentiale.

1. Wenn

$$\lambda x = \int \frac{dx}{x} L(1+x)$$
$$\alpha + \beta x = u,$$

so ist

$$C^1 = C\,{}_{\alpha}^{a}{}_{x} =$$
$$\int \frac{dx}{\alpha+\beta x} L(a+bx) = \frac{1}{\beta}\int \frac{du}{u}. L\frac{a\beta - b\alpha + bu}{\beta},$$
$$\int \frac{du}{u} L(a^2+bu) = \lambda\frac{bu}{a^2} + \tfrac{1}{2} La^2 Lu^2,$$
$$\int \frac{du}{u} L(bu-a^2) = \tfrac{1}{2}[L(bu)]^2 - \lambda\left(\frac{-a^2}{bu}\right),$$
$$\int \frac{du}{u} Lbu = \tfrac{1}{2}[L(bu)]^2,$$
$$\int \frac{du}{u} L(1+au^n) = \frac{1}{n}.\lambda(au^n),$$
$$\int \frac{rz^{r-1}dz}{\alpha+\beta z^r}. L(a+bz^r) = C\,{}_{\alpha}^{a}{}_{(z^r)}.$$

2. Wenn

$$D\,{}_{y}^{\beta} = \int \frac{dy}{y} L(1+2yC\beta+y^2),$$
$$y = \frac{b+b_1 x}{\mathfrak{a}},$$
$$\mathfrak{a}^2 = a^2 b_1^2 - 2ab b_1 C\alpha + b^2,$$
$$C\beta = \frac{ab_1 C\alpha - b}{\mathfrak{a}},$$

so ist

$$D^1 = D\,{}^{a}_{b}\,x$$
$$= \int \frac{dx}{b + b_1 x} L(a^2 + 2ax\,C\alpha + x^2)$$
$$= \frac{1}{b_1}\left(D\,{}^{\beta}_{y} + \tfrac{1}{2} L(b + b_1 x)^2 L \frac{\mathfrak{a}^2}{b_1^2}\right).$$

Besonders zu bemerken ist

$$\int \frac{dx}{x} L(1 + ax + b^2x^2) = D\,{}^{\circlearrowleft \frac{a}{2b}}_{bx},$$
$$\int \frac{dx}{1+x} L(x^2 + T\beta^2) = D_{-(1\overset{\beta}{+}x)C\beta} - \tfrac{1}{2} L C\beta^2 L(1+x)^2$$

und wenn $T\beta = \frac{b}{a}$,

$$\int \frac{dy}{a+y} L(b^2 + y^2) = D_{-(1\overset{\beta}{+}\frac{y}{a})C\beta} + \tfrac{1}{2} L \frac{a^2}{C\beta^2} L(a+y)^2,$$
$$\int \frac{dy}{\cot\alpha + y} L(1 + y^2) = D_{-(1\overset{\alpha}{+}y\,T\alpha)C\alpha} + \tfrac{1}{2} L s^{-2}_{\alpha} L(\cot\alpha + y)^2$$
$$= D_{-(C\alpha\overset{\alpha}{+}y\,S\alpha)} - \tfrac{1}{2} L(S\alpha)^2 L(\cot\alpha + y)^2.$$

3. Wenn

$$A = a - a_1 b C\beta,$$
$$\mathfrak{a}^2 = b^2 c_1^2 - 2bc\,c_1 C\beta + c^2,$$
$$C\alpha = \frac{b c_1 C\beta - c}{\mathfrak{a}},$$

so ist

$$E^1 = \overset{a}{\underset{b}{E}}{}^{c}\,x$$
$$\int \frac{(a + a_1 x)\,dx}{b^2 + 2bx\,C\beta + x^2} L(c + c_1 x) = \frac{a_1}{2} . \overset{b}{\underset{b}{E}}{}^{c} x + A . \overset{\circ}{\underset{b}{E}}{}^{c} x,$$
$$1)\ \overset{b}{\underset{b}{E}}{}^{c} x = \int \frac{2(bC\beta + x)\,dx}{b^2 + 2bx\,C\beta + x^2} . L(c + c_1 x)$$
$$= L(c + c_1 x) L . \frac{(b^2 + 2bx\,C\beta + x^2) c_1^2}{\mathfrak{a}^2} - D\,{}^{\alpha}_{\frac{c + c_1 x}{\mathfrak{a}}},$$

und wenn

$$x + bC\beta = bS\beta . T\varphi,$$
$$c - b c_1 C\beta = b c_1 S\beta . T\psi,$$
$$H\varphi = \int d\varphi\, L S^{-2}_{\varphi},$$

so ist

$$2)\ \overset{\circ}{\underset{b}{E}}{}^{c} x = \int \frac{dx\, L(c + c_1 x)}{b^2 + 2bx\,C\beta + x^2} = \frac{-1}{2bS\beta}\left(H(\varphi+\psi) + H(R-\varphi) + \varphi L \frac{C\psi^2}{(bc_1 S\beta)^2}\right).$$

Besonders zu bemerken ist:

Wenn

$$T\alpha = \frac{b c_1}{c},$$

$$\mathfrak{a} = \frac{c}{C\alpha},$$

$$1)\ \int \frac{2x\,dx}{b^2+x^2} L(c+c_1 x) = L\frac{(b^2+x^2)c_1^2}{\mathfrak{a}^2} L(c+c_1 x) - D_{-\frac{c+c_1 x}{\mathfrak{a}}}^{\alpha}.$$

Wenn

$$a = T\alpha,$$

$$2)\ G_y^a = \int \frac{y\,dy\,L(1+y)^2}{a^2+y^2} = L\frac{a^2+y^2}{a^2+1} L(1+y) - D_{-(1+y)C\alpha}^{\alpha}.$$

Wenn

$$y = t\varphi,$$
$$t = T\psi,$$

so ist

$$3)\ \tfrac{1}{2} F_y^t = \int \frac{dy}{1+y^2} L(t+y) = \int d\varphi\, L(T\varphi + T\psi)$$
$$= -\tfrac{1}{2}[H(\varphi+\psi) + H(R-\varphi) + \varphi L C\psi^2].$$

Wenn

$$x + C\alpha = S\alpha \,.\, T\varphi,$$

so ist

$$4)\ \underset{a}{E} y = \frac{1}{a}\left(L\frac{y}{a} L a^2 + I_{\frac{y}{a}}^{\frac{1}{a}}\right) = \int \frac{dy}{a^2+y^2} L(1+y)^2,$$

$$E_x^a = \int \frac{dx\,Lx}{1+2x\,C\alpha+x^2} = -\frac{1}{2S\alpha}[H(\varphi+R+\alpha) + H(R-\varphi)] = E_{\frac{1}{x}}^{\alpha}.$$

Zusatz 1. $\overset{\circ}{\int}_{\infty} dE_x^{\alpha} = 0$; 2) $\frac{H\alpha - 2H\frac{1}{2}\alpha}{2S\alpha} = \overset{\circ}{\int}_{1} dE_x^{\alpha}$.

4. Wenn

$$1)\ x = b(T\varphi\, S\beta - C\beta) = -b\frac{(\varphi+\beta)}{C\varphi},$$

$$T\mathfrak{a}^2 = \frac{c^2 - 2bc\,C\beta C\gamma + b^2 C\beta^2}{(bS\beta)^2},$$

$$C\alpha = \frac{cC\gamma - bC\beta}{bS\beta T\mathfrak{a}},$$

$$2)\ T2\mathfrak{b} = C\alpha \,.\, T2\mathfrak{a},$$

$$T\mathfrak{A} = \sqrt{[T(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}).T(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})]},$$

$$3)\ T\psi = \frac{T(\varphi+\mathfrak{b})}{T\mathfrak{A}},$$

so ist

$$F^1 = \overset{a}{\underset{b}{F}}{}^c x$$

$$= \int \frac{(a+a_1 x)\,dx\,L(c^2+2cx\,C\gamma+x^2)}{b^2+2bx\,C\beta+x^2} = A.\overset{o}{\underset{b}{F}}{}^c x + \tfrac{1}{2}a_1.\overset{b}{\underset{b}{F}}{}^c x.$$

$$\overset{o}{\underset{b}{F}}{}^c x = \int \frac{dx\,L(c^2+2cx\,C\gamma+x^2)}{b^2+2bx\,C\beta+x^2}$$

$$= \frac{1}{bS\beta}\cdot\begin{Bmatrix}\tfrac{1}{2}[H(\varphi+\mathfrak{b}+\psi)+H(\varphi+\mathfrak{b}-\psi)-H2(\varphi+\mathfrak{b})]\\ +H(R+\varphi)+\psi L\,T(\tfrac{1}{2}R+\mathfrak{A})+\varphi L\frac{(bS\beta)^2\,C2\mathfrak{a}}{4C2\mathfrak{b}\,C\mathfrak{a}^2}\end{Bmatrix}.$$

Wenn

$$4)\quad \varphi = \eta - \mathfrak{b},$$
$$T\mathfrak{B} = T\mathfrak{b} - T\mathfrak{A},$$
$$\left(x = \frac{-\mathfrak{b}\,C(\varphi+\beta)}{C\varphi}\ \text{etc. wie oben}\right),$$

so ist

$$\overset{b}{\underset{b}{F}}{}^c x = \int \frac{2(b\,C\beta+x)\,dx.\,L(c^2+2cx\,C\gamma+x^2)}{b^2+2bx\,C\beta+x^2}$$

$$= 2D_{-(C\mathfrak{b}+\overset{\mathfrak{b}}{T\eta}S\mathfrak{b})} - 2D_{-(1+\overset{\mathfrak{B}}{T\mathfrak{b}\,T\eta})C\mathfrak{B}} - \lambda\,\frac{-C2\mathfrak{a}\,C\eta^2}{C(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})\,C(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})}$$
$$+ L(b^2+2bx\,C\beta+x^2)\,L\frac{(bS\beta)^2\,C(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})\,C(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})}{C2\mathfrak{b}\,C\mathfrak{a}^2\,S\mathfrak{b}^2}$$
$$+ 2\left[L\left(\frac{C\varphi}{S\mathfrak{b}}\right)\right]^2 + L(\cot\mathfrak{b}+T\eta)^2.L\left(\frac{C\mathfrak{B}^2}{C\mathfrak{b}^2}\right).$$

Besonders zu bemerken sind:

Für 2),

$$1)\ \int d\varphi\,L(T\mathfrak{a}^2+2T\varphi\,T\mathfrak{a}\,C\alpha+T\varphi^2) =$$
$$\text{Const.} + \tfrac{1}{2}[H(\varphi+\mathfrak{b}+\psi)+H(\varphi+\mathfrak{b}-\psi)-H2(\varphi+\mathfrak{b})]$$
$$+H(R+\varphi)+\psi L\,T(\tfrac{1}{2}R+\mathfrak{A})+\varphi L\frac{C2\mathfrak{a}}{4C2\mathfrak{b}\,C\mathfrak{a}^2}.$$

Für 2) und 4)

$$y = T\varphi = T(\eta-\mathfrak{b}),$$
$$2)\ \int\frac{2y\,dy}{1+y^2}L(T\mathfrak{a}^2+2y\,T\mathfrak{a}\,C\alpha+y^2) = \text{Const.}$$
$$+2\left(D_{[(\mathfrak{b}+\overset{\mathfrak{b}}{T\eta}S\mathfrak{b})} - D_{-(1+\overset{\mathfrak{B}}{T\eta\,T\mathfrak{b}})\,C\mathfrak{B}}\right) - \lambda\frac{-C2\mathfrak{a}\,C\eta^2}{C(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})\,C(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})}$$
$$+L(1+y^2)\,L\frac{C\mathfrak{a}(+\mathfrak{b}).\,C(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})}{C2\mathfrak{b}.\,C\mathfrak{a}^2\,S\mathfrak{b}^2}+2\left[L\left(\frac{C\varphi}{S\mathfrak{b}}\right)\right]^2+L\left(\frac{C\varphi}{C\eta\,C\mathfrak{b}}\right)^2 L\left(\frac{C\mathfrak{B}}{C\mathfrak{b}}\right)^2.$$

$$3)\ \int\frac{2y\,dy}{1+y^2}L(T\mathfrak{a}+y)^2 = -2D_{-(S\mathfrak{a}+\overset{R-\mathfrak{a}}{y\,C\mathfrak{a}})} + L(T\mathfrak{a}+y)^2\,L(1+y^2)\,C\mathfrak{a}^2.$$

II. Integration der einfachen rationalen Kreisbogen-Differentiale.

Wenn

$$c + c_1 x = u = T\varphi,$$
$$b c_1 - c b_1 = b_1 T\psi,$$

so ist

$$1) \quad \overset{1}{\beta} = \underset{b}{\beta^c} x =$$

$$\int \frac{dx}{b + b_1 x} L(c + c_1 x) = \frac{1}{2 b_1} [H(\varphi + \psi) + H(R - \varphi) + \varphi L\left(\frac{c_1 C\psi (b + b_1 x)^2}{b_1}\right).$$

Wenn

$$A = \frac{\alpha - \alpha_1 b C\beta}{b S\beta},$$

so ist

$$2) \quad \overset{1}{\gamma} = \underset{b}{\overset{\alpha}{\gamma^c}} x$$

$$= \int \frac{(\alpha + \alpha_1 x) dx}{b^2 + 2 b x C\beta + x^2} L(c + c_1 x)$$

$$= \left(\tfrac{1}{2}\alpha_1 L(b^2 + 2 b x C\beta + x^2) + A L \frac{x + b C\beta}{b S\beta}\right) L u$$

$$- \int \frac{du}{1 + u^2} \left(\tfrac{1}{2}\alpha_1 L(b^2 + 2 b x C\beta + x^2) + A L \frac{x + b C\beta}{b S\beta}\right).$$

Es kann aber $b^2 + 2 b x C\beta + x^2$ auf die Form $\frac{B^2 + 2\mathfrak{b} u + C\mathfrak{B} + u^2}{c_1^2}$ gebracht, und daher

$$\int \frac{du}{1 + u^2} L(b + 2 b x C\beta + x^2)$$

nach F^1 durch H^1 gefunden werden.

Wenn

$$a = \frac{c_1 b C\beta - c}{c_1 b S\beta},$$
$$a_1 = \frac{1}{c_1 b S\beta},$$
$$u = T\varphi = c + c_1 x,$$
$$T 2\alpha = \frac{2 a a_1}{1 + a^2 - a_1^2},$$
$$n = a T\alpha - a_1,$$
$$\varphi = \alpha + \psi,$$

so ist

$$3)\ \int\frac{du}{1+u^2}\mathcal{L}\frac{x+bC\beta}{bS\beta}=\int\frac{du}{1+u^2}\mathcal{L}(a+a_1u)$$

$$=\int d\Phi\,\mathcal{L}(a+a_1T\Phi)=\int d\varphi[\mathcal{L}(a-a_1\cot\alpha)+\tfrac{1}{2}\pi-\mathcal{L}nT\psi]$$

$$=-\varphi\mathcal{L}\left(\frac{1}{n}T\alpha\right)-\int d\psi\,\mathcal{L}(nT\psi)$$

$$=-\varphi\mathcal{L}\left(\frac{1}{n}T\alpha\right)-\tfrac{1}{4}\left(D_{\frac{1-n}{1+n}}^{2\psi}+2\psi^2\right)+\text{Const.}$$

$$\text{Cor.}\ {}^{-\infty}\int_{+\infty}\frac{du}{1+u^2}\cdot\mathcal{L}(a+a_1u)=\pi\left[\alpha-\mathcal{L}\left(\frac{1}{n}T\alpha\right)\right].$$

Beilage I.

Einfache Art der Zerlegung rationaler Brüche.

1) Wenn der Zähler von höherem Grade als der Nenner ist, nemlich $m>n$, so ist

$$\frac{\binom{\alpha}{\beta}x}{\binom{\beta}{n}x}\cong\binom{\varepsilon}{m-n}+\frac{\binom{\eta}{n-1}x}{\binom{\beta}{n}x}.$$

2) Wenn der Zähler niedriger als der Nenner oder $m<n$, also der bei (1.) zurückbleibende Bruchtheil $\dfrac{\binom{\eta}{n-1}x}{\binom{\beta}{n}x}$, wo $m=n-1$, zu zerlegen ist, so geschieht dieses

a) in eine Summe von einzelnen Brüchen wie $\dfrac{ar}{x-b_r}$, deren Nenner wie $x-b_r$ einfache Factoren des gegebenen Nenners $\binom{\beta}{n}x$ sind, welcher also in

$$(x-b_1)(x-b_2)\ldots.(x-b_r^1)\ldots.(x-b_n^1)$$

aufgelöset werden mufs, und deren Zähler a_r ist, oder $=\dfrac{\binom{\eta}{m}b_r}{\binom{d\beta}{n}b_r}$, d. h. diejenige Gröfse, in welche $\dfrac{\binom{\eta}{m}x}{(d\beta n)x}$ oder $\dfrac{\binom{\eta}{m}x(x-b_r)}{\binom{\beta}{n}x}$ übergeht, wenn man $x=b_r$ setzt, wo $\binom{d\beta}{n}x=\dfrac{\binom{\beta}{n}x}{x-b_r}$ gleich dem Producte der übrigen Factoren des Nenners aufser $x-b_r$ ist.

b) Hat dagegen der Nenner mehrere gleiche Factoren, z. B. wie $(x-b)^r$, so geschieht die Zerlegung am einfachsten nach einer von Hrn. Magister Berlin hieselbst, in einer academischen Abhandlung (*de compositione fractionum rationalium, Lund.* 1824.) dargestellten Methode, die hauptsächlich darin bestehet, $y+b$ statt x zu substituiren, wodurch der gegebene Bruch

$$\frac{\binom{n}{m}x}{\binom{\beta}{n}x} \text{ oder } \frac{\binom{n}{m}(b+y)}{\binom{\beta}{n}(b+y)},$$

nach geschehener Entwicklung, auf die Form $\dfrac{\binom{a}{m}y}{y^r\binom{c}{n-r}y}$ gebracht wird, welche sich leicht in

$$\frac{\left(\frac{a}{c}\right)_0}{y^r}+\frac{\left(\frac{a}{c}\right)_1}{y^{r-1}}+\frac{\left(\frac{a}{c}\right)_2}{y^{r-2}}+\frac{\left(\frac{a}{c}\right)_{r-1}}{y}+\frac{P^1}{\binom{c}{n-r}y}$$

zerlegen läfst, wenn man blofs $\binom{c}{n-r}y$ in $\binom{a}{m}y$ dividirt, doch so, dafs man von den niedrigeren Potenzen von y anfängt, und also einen Quotienten von der Form

$$\left(\frac{a}{c}\right)_0+\left(\frac{a}{c}\right)_1.y+\left(\frac{a}{c}\right)_2.y^2+\ldots.=\frac{a_0+a_1y+a_2y^2+\ldots.}{c_0+c_1y+c_2y^2+\ldots.}$$
$$=\frac{a_0}{c_0}+\frac{a_1c_0+a_0c_1}{c_0^2}y+\ldots.$$

bekommt. [Man kann auch, statt mit $c_0+c_1y+c_2y^2+\ldots.$ zu dividiren, mit $\frac{1}{c_0}-\frac{c_1}{c_0^2}y+\left(\frac{c_1^2}{c_0^3}-\frac{c_2}{c_0^2}\right)y^2-\left(\frac{c_1^3}{c_0^4}-\frac{2c_1c_2}{c_0^3}+\frac{c_3}{c_0^2}\right)y^3+\ldots.$ multipliciren. Alsdann sind die Coefficienten, nach Arbogast, die successiven Derivationen von c_0^{-1}.]

c) Hat endlich der Nenner einfache, imaginaire, oder positive quadratische Factoren, sie mögen ungleich oder gleich sein, wie $\left[\binom{a}{\alpha}y\right]^r$ oder $(y^2+2ayC+a^2)^r$, so setzt man $x+aC=x$ oder $y=x-aC$, wodurch der Factor $(x^2+a^2C^2)^r=(x^2+e^2)^r$ wird, wenn $e=aS\alpha$. Der Zähler T, nebst dem Producte der übrigen Factoren des Nenners P, werden Functionen von x. In diesem letzteren P werden nun die Glieder mit geraden und mit ungeraden Exponenten abgesondert, so dafs es aus einer geraden Function $=F(x^2)$ und einer ungeraden $=x.G(x^2)$ besteht,

wie $P = F(x^2) + x.G(x^2) = Px$. Für ein negatives x ist $F(x^2) - xG(x^2) = P(-x)$. Hiermit wird sowohl der Zähler als der Nenner multiplicirt. Dann wird der neue Nenner eine gerade Function $= (x^2+e^2)^r.N(x^2)$, wenn man der Kürze wegen $N(x^2) = [F(x^2)]^2 - x^2[G.(x^2)]^2$ setzt, und der neue Zähler kann durch Vereinigung aller geraden Potenzen [in $= H(x^2)$] und aller ungeraden [in $= xI(x^2)$], unter die Form $H(x^2) + xI(x^2)$ gebracht werden; so dafs man jetzt blofs

$$\frac{H(x^2)}{(x^2+e^2)^r.N(x^2)} \text{ und } \frac{I(x^2)}{(x^2+e^2)^r.N(x^2)},$$

jedes für sich, zu zerlegen hat, welches auf die obige Art leicht geschiehet (nemlich dadurch, dafs $x^2+e^2 = z$ gesetzt, und nach geschehener Entwickelung gehörig dividirt wird u. s. w.).

Auf diese Weise erhält man:

$$\frac{H(x^2)}{(x^2+e^2)^r Nx^2} \simeq \frac{A}{(x^2+e^2)^r} + \frac{A_1}{(x^2+e^2)^{r-1}} + \text{etc.}$$

und

$$\frac{I(x^2)}{(x^2+e^2)Nx^2} \simeq \frac{B}{(x^2+e^2)^r} + \frac{B_1}{(x^2+e^2)^{r-1}} + \text{etc.},$$

und folglich

$$\frac{\binom{y}{m}y}{(y^2+2ayC+a^2)^r.P} = \frac{H(x^2)+xI(x^2)}{(x^2+e^2)^r.N(x^2)} = \frac{A+Bx}{(x^2+e^2)^r} + \frac{A_1+B_1x}{(x^2+e^2)^{r-1}} + \text{etc.}$$

Dieses allgemeine Verfahren kann, wie leicht zu sehen, noch vereinfacht werden. Wenn man z. B. blofs den Nenner zu einer gegebenen Potenz eines der Factoren des Nenners sucht, so braucht man nur die Substitution und Division bis zum Grade des Exponenten, oder bis zum nächst niedrigeren fortzusetzen etc., welches weitere Detail ich übergehe.

Allgemeine Beispiele. 1.

$$\frac{a+\alpha y}{(1+y)(b+\beta y^2)} \text{ in } \frac{A}{(1+y)} + \frac{B+Cy}{b+\beta y^2}$$

zu zerlegen.

Auflösung. Setzt man -1 anstatt y in $\frac{a+\alpha y}{b+\beta y^2}$, so ergiebt sich

$$A = \frac{a-\alpha}{b+\beta}.$$

Um B und C zu finden, multiplicire man $\frac{a+\alpha y}{1+y}$ mit $\frac{1-y}{1-y}$, welches $\frac{a-\alpha y^2+(\alpha-a)y}{1-y^2}$ giebt. Setzt man hierin $-\frac{b}{\beta}$ statt y^2 (nicht statt y), so erhält man:

$$\frac{a+\alpha\frac{b}{\beta}}{1+\frac{b}{\beta}}+y.\frac{\alpha-a}{1+\frac{b}{\beta}}=\frac{a\beta+b\alpha}{b+\beta}+y.\frac{(\alpha-a)\beta}{b+\beta},$$

welches der gesuchte Zähler $B+Cy$ ist. Es ist also

$$\frac{a+\alpha y}{(1+y)(b+\beta y^2)}=\frac{1}{b+\beta}.\left(\frac{a-\alpha}{1+y}+\frac{a\beta+b\alpha+y\beta(\alpha-a)}{b+\beta y^2}\right).$$

Anmerkung. 1. Die Richtigkeit dieses Verfahrens ist leicht einzusehen, wenn man in dem verwandelten Bruche z anstatt y setzt, wodurch er in

$$\frac{a-\alpha z}{(1-z)(b+\beta z)}+y.\frac{\alpha-a}{(1-z)(b+\beta z)}$$

übergehet, wo jedes Glied offenbar als rationale Function von z mit lineären Factoren im Nenner, zerlegt werden kann. Der Zähler zu $b+\beta z$ wird nach der gewöhnlichen Regel

$$=\frac{a+\alpha\frac{b}{\beta}}{1+\frac{b}{\beta}}+y.\frac{\alpha-a}{1+\frac{b}{\beta}}$$

gefunden.

Anmerkung. 2. Die Regel kann auch so ausgedrückt werden.

Nachdem durch gehörige Substitution der quadratische Factor auf die Form $(x^2+ez)^r$ gebracht worden, wird in dem Producte der übrigen Factoren $-x$ statt $+x$ gesetzt, und mit dem Resultate werden Zähler und Nenner multiplicirt; hierauf wird $x^2+e^2=z$ gesetzt und von z^0 an dividirt.

Ein nicht zu übersehender Vortheil bestehet darin, dafs man den Nenner nicht im Voraus zu entwickeln braucht, sondern ihn als Product beibehalten und die Substitution in z gleichwohl bewerkstelligen kann. Dann werden blofs die niedrigeren Potenzen von z, wie z^0, z^1, z^2 entwickelt, nemlich höchstens bis zum Grade des fraglichen Factors, oder Eins weniger. Hierauf wird auch nur eben so weit dividirt.

Bisweilen kann es vortheilhaft sein, statt der gewöhnlichen Entwickelung und Division eine logarithmische anzuwenden, besonders wenn die Zahl der Factoren im Nenner und deren Exponenten ziemlich grofs sind, aufser dem des fraglichen Factors, welcher z. B. $=$ oder <3 ist.

Aufgabe 2.

$$y=\frac{1+2x+3x^2}{(4+x^2)^2.(1+x)^2.(2+x)}=\frac{A+Bx}{(4+x^2)^2}+\frac{A_1+B_1x}{4+x^2}+\frac{T}{(1+x)^2.(2+x)}.$$

Erste Auflösung. Man setze $x^2+4=z$, also $x^2=z-4$, und multiplicire Zähler und Nenner mit

$$(1-x)^2.(2-x)=2-5.x+4x^2-x^3\,[=P(-x)],$$

so erhält man:

$$y = \frac{2+10x^4-x(1+8x^2+3x^4)}{z^2.(5-z)^2(8-z)},$$

oder, nach geschehener Substitution:

$$y = \frac{16z-8z+6z^2-x(17-16z+az^2)}{z^2(200-105z+Cz^2+\ldots.)}.$$

Dividirt man nun mit $200-105z+\ldots.$ in $162-8z\ldots.$, so erhält man:

$\frac{81}{100}+\frac{101}{4000}z+\ldots.$, oder $A+A_1z\ldots.$

Dividirt man mit $200-105z+\ldots.$ in $17-16z-\ldots.$, so erhält man:

$\frac{17}{200}-\frac{283}{8000}z+\ldots.$, oder $B+B_1z\ldots.$

Es ist daher

$$y = \frac{162-17x}{200(x^2+4)^2}+\frac{5{,}05+7{,}075x}{200(x^2+4)}+\frac{T}{P}.$$

Zweite Auflösung. Man bringe den gegebenen Zähler nebst $P(-x)$ unter die Form $p+xq$ und p_1+xq_1, so dafs p und q nur x^2, und daher nach geschehener Substitution ($x^2=z-e^2$) nur z enthalten. Der neue Zähler wird dadurch nach geschehener Entwicklung

$$pp_1+x^2qq_1+x(qp_1+pq_1) = pp_1+(z-e^2)qq_1+x(qp_1+pq_1),$$

oder

$$= a+a_1z+\ldots.+x(b+b_1z+\ldots.)$$

und in dem Beispiele

$$= (-14+4z-x(1+z)(-11+3z+2x)$$
$$= 162-8z+\ldots.-x(17-16z+\ldots.).$$

Statt der Entwickelung und der Division bedienen wir uns nun der Logarithmen. Wenn nemlich

$$L(a+a_1z+a_2z^2) = b+b_1z+b_2z^2+\ldots.$$

ist, so ist

$$b = La \text{ oder } a = e^b;\ a_1 = ab;\ a_2 = a(b_2+\tfrac{1}{2}b_1^2) \text{ etc.}$$

Hier ist

$$y_1 = \frac{162-80z}{z^2(5-z)^2(8-z)},$$

folglich

$$L(y_1.z^2) = \begin{Bmatrix} L162-\frac{80}{162}z+ \\ -L5^2+\frac{2}{5}z+ \\ -L8+\frac{1}{8}z+ \end{Bmatrix}$$

$$= L\frac{162}{8.25}+\frac{101}{3240}z = L\left(\frac{81}{100}+\frac{101}{3240}\cdot\frac{81}{100}z+\right);$$

folglich

$$y_1.z^2 = \frac{81}{1000}+\frac{1010}{40000}z+\ldots. =$$

dem Quotienten, der sich auf diese Weise durch eine einfachere Rechnung findet als vorhin. Eben so wird

$$L(y_2 . z^2) = L\ \frac{17-16z}{(5-z)^2(8-z)} = L(\tfrac{17}{200} - \tfrac{283}{8000}z +),$$

und daher

$$y = y_1 - x y_2 = \frac{162-17x}{200z^2} + \frac{202+283x}{8000z} + \frac{T}{P}.$$

Beilage II.

Ein Bogen, dessen Tangente eine rationale Function ist, kann in eine Summe mehrerer Bogen, deren Tangenten ganze rationale Functionen vom ersten Grade sind, aufgelöst werden; d. h. es ist

$$JL\left(\frac{\binom{c}{r}x}{\binom{b}{n}x}\right) = \Sigma JL(a + a_1 x).$$

1. Die höchste Zahl der Grade im Zähler kann immer geringer gemacht werden als die des Nenners.

a) Ist $r < n$, so ist es von selbst der Fall.

b) Ist $r > n$, so ist

$$JL\left(\frac{\binom{c}{r}x}{\binom{b}{n}x}\right) = \tfrac{1}{2}\pi - JL\left(\frac{\binom{b}{n}x}{\binom{c}{r}x}\right).$$

c) Ist endlich $r = n$, so gelangt man dazu auf folgende Weise:

Durch Division bekommt man

$$\frac{\binom{c}{n}x}{\binom{b}{n}x} = \frac{c\,{}^{1}_{n}}{b\,{}^{1}_{n}} + \frac{\binom{e}{n-1}x}{\binom{b}{n}x},$$

wo $c^1_r = \frac{c\,{}^{1}_{n}}{b\,{}^{1}_{n}} . b^1_r + e^1_r$.

Nun ist aber

$$JR - JS = J\frac{R-S}{1+RS},$$

und daher, wenn man $R = \frac{\binom{c}{n}x}{\binom{b}{n}x}$, $S = \frac{c\,{}^{1}_{n}}{b\,{}^{1}_{n}}$ nimmt:

$$J\frac{\binom{c}{n}x}{\binom{b}{n}x} = J\frac{c\,{}^{1}_{n}}{b\,{}^{1}_{n}} + J\frac{\binom{c}{n}x . b\,{}^{1}_{n} - \binom{b}{n}x . c\,{}^{1}_{n}}{b\,{}^{1}_{n} . \binom{b}{n}x + c\,{}^{1}_{n} . \binom{c}{n}x},$$

wo der Zähler, wie leicht zu sehen, nur einen Grad niedriger ist als der Nenner, nemlich vom $(n-1)$ten Grade, während der Nenner auf den $n$ten Grad steigt, und für reelle Coefficienten auch nie niedriger werden kann, weil

$$b_n^1 . b_n^1 + c_n^1 . c_n^1$$

nicht gleich Null werden kann.

Beispiel.

$$\mathcal{L}\frac{\binom{c}{2}x}{\binom{b}{2}x} \text{ oder } \mathcal{L}\frac{c+c_1x+c_2x^2}{b+b_1x+b_2x^2}.$$

Auflösung. Es ist

$$\frac{\binom{c}{2}x}{\binom{b}{2}x} = \frac{c_2}{b_2} + \frac{e+e_1x}{\binom{b}{2}x},$$

wo $e = c - \frac{c_2}{b_2}b$ und $e_1 = c_1 - \frac{c_2}{b_2}b_1$; folglich wird

$$\mathcal{L}\frac{\binom{c}{2}x}{\binom{b}{2}x} = \mathcal{L}\frac{c_2}{b_2} + \mathcal{L}\frac{\binom{e}{1}x}{\binom{\varepsilon}{2}x},$$

wenn der Kürze wegen $\varepsilon_r^1 = b_r^1 + \frac{c_2}{b_2}c_r^1$, d. h. $\varepsilon = b + \frac{c_2}{b_2}c$, $\varepsilon_1 = b_1 + \frac{c_2}{b_2}c_1$ und $\varepsilon_2 = b_2 + \frac{c_2}{b_2}c_2 = \frac{b_2^2+c_2^2}{b_2}$ gesetzt wird, welches wie man siehet, nicht gleich Null ist.

Oder auch $e_r^1 = b_2c_r^1 - c_2b_r^1$ und $\varepsilon_r^1 = b_r^1 + c_2c_r^1$, wenn man mit b_2 abkürzt, da $\varepsilon_2 = b_2^2 + c_2^2$ und daher niemals $= 0$ ist.

2. Nachdem man dem Zähler nach (1.) einen geringeren Grad als den des Nenners gegeben hat, nemlich $r < n$, so geschiehet die Zerlegung von $\mathcal{L}\frac{\binom{a}{r}x}{\binom{b}{r}x}$, oder kürzer von $\mathcal{L}\frac{(a)}{(b)}$ (d. h. $\mathcal{L}$ in einen eigentlichen Bruch) am einfachsten auf folgende Weise: Der Kürze wegen sei $dp = \frac{dp}{dx}$, wie bei Arbogast.

Weil

$$d\mathcal{L}\frac{(a)}{(b)} = \frac{(b)d(a)-(a)d(b)}{(a)^2+(b)^2}$$

ein rationaler Bruch ist, so kann er als solcher aufgelöset werden. Da aber der Ausdruck $(a)^2+(b)^2$, oder $\left[\binom{a}{r}x\right]^2+\left[\binom{b}{n}x\right]^2$ immer positiv ist, so kann er durch keinen reellen Werth von x zu 0 gemacht werden, und hat deshalb blofs quadratische Factoren. Setzt man daher einen von diesen $=(x+\beta)^2+\alpha^2=(x+\beta+i\alpha)(x+\beta-i\alpha)$ (wo $i^2=-1$), so mufs einer der imaginairen Factoren in diesem Factor einem der imaginairen Factoren des vorigen gleich sein, z. B. $x+\beta+i\alpha$ in $(b)+i(\alpha)$, während offenbar der andere $x+\beta-i\alpha$ ein Factor in $(b)-i(\alpha)$ wird, wenn man das Zeichen von i verwechselt.

Anstatt nun gleich den ganzen Ausdruck

$$\frac{(b)\,d(a)-(a)\,d(b)}{(a)^2+(b)^2}$$

zu zerlegen, verrichte man erst diese partielle Zerlegung:

$$\frac{(b)\,d(a)-(a)\,d(b)}{(a)^2+(b)^2}=\tfrac{1}{2}\left(\frac{d(a)-i\,d(b)}{(b)+i(a)}+\frac{d(a)+i\,d(b)}{(b)-i(a)}\right),$$

deren Richtigkeit leicht durch wirkliche Addition in dem Gliede rechts erhellet $\left(\text{Es ist nemlich: } \frac{1-y}{1+x}+\frac{1+y}{1-x}=2.\frac{1+xy}{1-x^2}\right)$. Man darf nun blofs diese niedrigeren Brüche auflösen, nemlich $\frac{d(a)-i\,d(b)}{(b)+i(a)}$ und $\frac{d(a)+i\,d(b)}{(b)-i(a)}$, oder blofs den einen, da sich die Auflösung des anderen durch Umkehrung des Zeichens von i ergiebt. Weil aber nun $x+\beta+i\alpha$ einer der Factoren in $(b)+i(a)$ ist, so ist $\frac{A}{x+\beta+i\alpha}$ einer der partiellen Brüche, aus welchen $\frac{d(a)-i\,d(b)}{(b)+i(a)}$ bestehet, und $A=\frac{d(a)-i\,d(b)}{d[(b)+i(a)]}=\frac{d(a)-i\,d(b)}{d(b)-i\,d(a)}$ $=-i$. Wenn also das Zeichen in i geändert wird, so ist ferner $\frac{+i}{x+\beta-i\alpha}$ einer der partiellen Brüche, welche zusammen $\frac{d(a)+i\,d(b)}{(b)-i(a)}$ ausmachen. Die halbe Summe

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{i}{x+\beta-i\alpha}-\frac{i}{x+\beta+i\alpha}\right)=\frac{-\alpha}{(x+\beta)^2+\alpha^2},$$

ist also einer der partiellen Brüche in

$$\frac{(b)\,d(a)-(a)\,d(b)}{(b)^2+(a)^2}.$$

Auf diese Art wird bewiesen, dafs wenn die übrigen Factoren in $(b)^2+(a)^2$ oder $\left[\binom{b}{n}x\right]^2+\left[\binom{a}{r}x\right]^2$, $(x+\beta_1)^2+\alpha_1^2$, $(x+\beta_2)^2+\alpha_2^2$ etc.

sind, dafs alsdann $\frac{-\alpha_1}{(x+\beta_1)^2+\alpha_1^2} - \frac{\alpha_2}{(x+\beta_2)^2+\alpha_2^2}$ etc., zu den partiellen Brüchen gehören, in welche $\frac{(b)\,d(a)-(a)\,d(b)}{(b)^2+(a)^2}$ zerlegt wird, so dafs dieser letztere Ausdruck,

$$dL\frac{(a)}{(b)} = -\frac{\alpha}{(x+\beta)^2+\alpha^2} - \frac{\alpha_1}{(x+\beta_1)^2+\alpha_1^2} - \frac{\alpha_2}{(x+\beta_2)^2+\alpha_2^2} - \text{etc.}$$

ist, folglich ist wenn man integrirt:

$$L\frac{(a)}{(b)} = L\frac{\alpha}{x+\beta} + L\frac{\alpha_1}{x+\beta_1} + L\frac{\alpha_2}{x+\beta_2} + \text{etc.} + \text{Const.} = L\left(\frac{(a_r)\,x}{(b_n)\,x}\right).$$

Es ist noch übrig die Constante C zu bestimmen, welches dadurch geschehen könnte, dafs man $x=0$ setzte, so dafs

$$L\frac{a}{b} = C + L\frac{\alpha}{\beta} + L\frac{\alpha_1}{\beta_1} + L\frac{\alpha_2}{\beta_2} + \ldots.$$

wäre. Sie wird aber leichter gefunden, wenn man

$$L\frac{\alpha}{x+\beta} + L\frac{\alpha_1}{x+\beta} + \ldots.$$

successive addirt. Man sieht leicht, dafs die Summe von der Form:

$$L\frac{\binom{A}{n-1}x}{\binom{B}{n}x}$$

ist, denn man erhält successive

$$L\frac{\alpha}{x+\beta} + L\frac{\alpha_1}{x+\beta_1} = L\frac{\alpha(x+\beta_1)+\alpha_1(x+\beta)}{(x+\beta)(x+\beta_1)-\alpha\alpha_1} \simeq L\frac{\binom{A}{1}x}{\binom{B}{1}x},$$

und allgemein:

$$L\frac{\binom{A}{n-1}x}{\binom{B}{n}x} + L\frac{\alpha}{x+\beta} = L\frac{\binom{A}{n-1}x\,.\,(x+\beta)+\alpha\binom{B}{n}x}{\binom{B}{n}x\,(x+\beta)-\alpha\binom{A}{n-1}x} \simeq L\frac{\binom{1B}{n}x}{\binom{1A}{n+1}x}.$$

Folglich ist der Zähler um einen Grad niedriger als der Nenner, und deshalb wird, wenn man $C = Lc$ setzt,

$$L\left(\frac{\binom{a}{r}x}{\binom{b}{n}x}\right) = Lc + L\left(\frac{\binom{A}{n-1}x}{\binom{B}{n}x}\right) = L\frac{c\binom{B}{n}x+\binom{A}{n-1}x}{\binom{B}{n}x-c\binom{A}{n-1}x},$$

folglich

$$\binom{b}{n}x = \binom{B}{n}x - c\binom{A}{n-1}x, \text{ und } \binom{a}{r}x = c\binom{B}{n}x + \binom{A}{n-1}x \simeq \binom{}{n}x,$$

welches (weil $r<n$) unmöglich ist, wenn nicht $c=0=TC$, und folglich $C = m\pi$ ist.

Wir haben daher folgenden Lehrsatz:

Wenn

$$(b) + i(a)x = (x + \beta_1 + i\alpha_1)(x + \beta_2 + i\alpha_2)\ldots,$$

so ist

$$\mathit{J}\frac{(a)x}{(b)x} = \mathit{J}\frac{\alpha_1}{x+\beta_1} + \mathit{J}\frac{\alpha_2}{x+\beta_2} + \ldots. \pm m\pi,$$

wenn für m eine solche ganze Zahl genommen wird, dafs beiderseits ungefähr gleich viele halbe Umfänge sind.

Zugleich haben wir folgende Summe:

$$\mathit{J}\frac{\alpha_1}{\beta_1} + \mathit{J}\frac{\alpha_2}{\beta_2} + \ldots. + \mathit{J}\frac{\alpha_n^1}{\beta_n^1} = \mathit{J}\frac{a}{b} + m\pi,$$

wo

$$[(x+\beta_1)^2 + \alpha_1^2][(x+\beta_2)^2 + \alpha_2^2]\ldots.\left[\left(x+\beta_n^1\right)^2 + \alpha_n^1\right]^2$$
$$= \left[\left({}_{n-1}^{a}\right)x\right]^2 + \left[\binom{b}{n}x\right]^2 \text{ ist.}$$

Beispiel 1. $\mathit{J}\frac{aS\alpha}{1+aC\alpha}$ oder $\mathit{J}\frac{2at}{1+a+(1-a)t^2}$, wenn $t = T\frac{1}{2}\alpha$.

Auflösung. Man setze

$$(1-a)t^2 + 1 + a + 2at.i = 0,$$

so ist

$$t = \frac{-\alpha i \pm i}{1-a},$$

d. h. t entweder $+1.i$ oder $-\frac{1+a}{1-a}.i$, daher

$$\mathit{J}\frac{aS\alpha}{1+aC\alpha} = \mathit{J}\frac{-1}{t} + \mathit{J}\frac{1+a}{(1-a)t} = \mathit{J}t - \mathit{J}\frac{1-a}{1+a}t = \tfrac{1}{2}\alpha - \mathit{J}\left(\frac{1-a}{1+a}T\tfrac{1}{2}\alpha\right).$$

Zusatz. $\mathit{J}R(S\alpha_1 C\alpha)$ kann auf gleiche Weise aufgelöst werden, da dieser Ausdruck offenbar auf $\mathit{J}^1R(T\frac{1}{2}\alpha)$ zurückgeführt werden kann.

Beilage III.

x	$-\lambda(-x)$	x	$-\lambda(-x)$
1	1, 644 934· 066 848⁝	0	0
0, 9	1, 299 714· 721 991⁝	0, 1	0, 102 617· 791 099⁝
$\frac{3}{4}$	0, 978 469· 393 026⁝	$\frac{1}{4}$	0, 267 652· 639 020⁝
$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$	0, 755 395· 619 093⁝	$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$	0, 426 408· 805 724⁝
0, 5	0, 582 240· 526 465⁝	0, 5	$\frac{1}{12}\pi^2 - \frac{1}{2}(L2)^2$

x	λx	x	λx
0	0	∞	∞
0, 1	0, 097 605· 235 229⁝	100	12, 241 081· 518 111⁝
$\frac{1}{8}$	0, 121 296· 628 923⁝	10	4, 198 859· 487 058⁝
$\frac{1}{4}$	0, 235 900· 297 680⁝	8	3, 685 676· 000 552⁝
$\frac{1}{3}$	0, 309 033· 126 451⁝	4	2, 369 939· 797 102⁝
$\frac{1}{2}$	0, 448 414· 206 956⁝	3	1, 939 375· 420 869⁝
$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$	0, 542 191· 216 451⁝	2	1, 436 746· 366 850⁝
1	0, 822 467· 033 424⁝	$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$	1, 218 525· 260 686⁝
		1	$\frac{1}{12}\pi^2$

φ	$H\varphi$
0	0
$\frac{1}{12}\pi$	1, 227 310· 146 118⁝
$\frac{2}{12}\pi$	1, 740 803· 636 564⁝
$\frac{3}{12}\pi$	2, 004 758· 639 330⁝
$\frac{4}{12}\pi$	2, 128 351· 797 844⁝
$\frac{5}{12}\pi$	2, 171 563· 403 089⁝
$\frac{1}{2}\pi$	2, 177 586· 090 303⁝ 584 130⁚
$\frac{1}{2}\pi + \psi$	$H\pi - H(\frac{1}{2}\pi - \psi)$
π	4, 355 172· 180 607⁝ $= \pi L4.$

14.
Recherches sur les fonctions elliptiques.

(Par Mr. *N. H. Abel.*)

(Suite du mémoire Nr. 12. tom. II. cah. 2. de ce journal*)).

§. VIII.
Expression algébrique de la fonction $\varphi\left(\frac{\omega}{n}\right)$ dans le cas, ou $e = c = 1$. Application à la lemniscate.

34.

Dans le cinquième prargraphe nous avons traité l'équation $P_n = 0$, d'où dépend la détermination des fonctions $\varphi\left(\frac{\omega}{n}\right)$ et $\varphi\left(\frac{\varpi i}{n}\right)$. Cette équation, prise dans toute sa généralité, ne paroit guère résoluble algébriquement pour des valeurs quelconques de e et c; mais néanmoins il y a des cas particuliers, où on peut la résoudre complètement, et par suite obtenir des expressions algébriques des quantités $\varphi\left(\frac{\omega}{n}\right)$ et $\varphi\left(\frac{\varpi i}{n}\right)$ en fonctions de e et c. C'est ce qui arrive toujours, si $\varphi\left(\frac{\varpi i}{n}\right)$ peuvent être exprimés rationellement par $\varphi\left(\frac{\omega}{n}\right)$ et des quantités connues, ce qui a lieu pour une infinité de valeurs de $\frac{c}{e}$. Dans tous ces cas l'équation $P_n = 0$ peut être résolue par une seule et même méthode uniforme, qui est applicable à une infinité d'autres équations de tous les degrés. J'éxposerai cette méthode dans un mémoire separé, et je me contenterai pour le moment à considérer le cas le plus simple, et qui résulte de la supposition $e = c = 1$ et $n = 4\nu + 1$. Dans ce cas on aura

$$208. \quad \begin{cases} \alpha = \int_0 \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^4)}} \text{ où } x = \varphi x, \\ f\alpha = \sqrt{(1-\varphi^2\alpha}; \quad F\alpha = \sqrt{(1+\varphi^2\alpha)}. \end{cases}$$

De même

$$209. \quad \varphi(\alpha i) = i \,.\, \varphi\alpha,$$

ce qui se fait voir, en mettant xi au lieu de i. Cette formule donne ensuite:

$$210. \quad f(\alpha i) = F\alpha; \quad F(\alpha i) = f\alpha.$$

*) L'auteur a fait parvenir cette continuation au redacteur sous le date de 12. Février 1828.

Ces deux quantItés e et c étant égales entres elles, il est clair, qu'il en sera de même de deux quantités que nous avons désignées par ω et ϖ. En effet on aura

$$211. \quad \frac{\omega}{2} = \frac{\varpi}{2} = \int_0 \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^4)}}.$$

35.

En posant dans les formules (10.) βi au lieu de β, on en tirera, en ayant égard aux équations 209. et 210.:

$$212. \quad \begin{cases} \varphi(\alpha+\beta i) = \dfrac{\varphi\alpha.f\beta.F\beta + i.\varphi\beta.f\alpha.F\alpha}{1-\varphi^2\alpha.\varphi^2\beta}, \\ f(\alpha+\beta i) = \dfrac{f\alpha.F\beta - i.\varphi\alpha.\varphi\beta.F\alpha.f\beta}{1-\varphi^2\alpha.\varphi^2\beta}, \\ F(\alpha+\beta i) = \dfrac{F\alpha.f\beta + i.\varphi\alpha.\varphi\beta.f\alpha.F\beta}{1-\varphi^2\alpha.\varphi^2\beta}. \end{cases}$$

Donc, pour trouver les fonctions φ, f, F pour une valeur quelconque imaginaire de la variable, il suffira d'en connoître les valeurs pour des valeurs réelles.

En supposant $\alpha = m\delta$, $\beta = \mu\delta$, on voit que $\varphi(m+\mu i)\delta$; $f(m+\mu i)\delta$; $F(m+\mu i)\delta$ pourront être exprimés rationnellement par les six fontions suivantes:

$$\begin{array}{lll} \varphi(m\delta), & \varphi(\mu\delta), & f(m\delta), \\ f(\mu\delta), & F(m\delta), & F(\mu\delta) \end{array}$$

et par suite aussi par des fonctions rationelles des trois fonctions $\varphi\delta$, $f\delta$, $F\delta$; si m es μ sont des nombres entiers.

En suivant ce développement, on voit également et sans peine que dans le cas, où $m+\mu$ est un nombre impair, on aura:

$$\varphi(m+\mu i)\delta = \varphi(\delta).T,$$

où T est une fonction rationelle de $(\varphi\delta)^2$, $(f\delta)^2$, $(F\delta)^2$, c'est-à-dire de $(\varphi\delta)^2$.

Donc en faisant $\varphi\delta = x$, on aura

$$\varphi(m+mi)\delta = x.\psi(x^2).$$

En changeant δ en δi, $\varphi\delta$ se changera en $\varphi(\delta i) = i\varphi(\delta) = ix$, et la fonction $\varphi(m+\mu i)\delta$ en $i\varphi(m+\mu i)\delta$; donc:

$$\varphi(m+\mu i)\delta = x.\psi(-x^2);$$

par conséquent on doit avoir $\psi(-x^2) = \psi(x^2)$; ce qui fait voir que la fonction $\psi(x^2)$ ne contient que des puissances de la forme x^{4n}. Donc on aura

$$213. \quad \varphi(m+mi)\delta = x.T,$$

ou T est une fonction rationelle de x^4.

Cherchons p. ex. l'expression de $\varphi(2+i)\delta$ en x.

On a d'après les formules (212.), en faisant $\alpha = 2\delta$ et $\beta = \delta$:

$$\varphi(2+i)\delta = \frac{\varphi 2\delta . f\delta . F\delta + i\varphi\delta . f2\delta . F2\delta}{1-(\varphi^2\delta)^2 . \varphi^2\delta}.$$

Or (10.) donne:

$$\varphi(2\delta) = \frac{2\varphi\delta . f\delta . F\delta}{1+(\varphi\delta)^4}; \quad f(2\delta) = \frac{(f\delta)^2-(\varphi\delta)^2 . (F\delta)^2}{1+(\varphi\delta)^4};$$

$$F(2\delta) = \frac{(F\delta)^2+(\varphi\delta)^2 . (f\delta)^2}{1+(\varphi\delta)^4};$$

c'est-à-dire, en remarquant que $\varphi\delta = x$, $f\delta = \sqrt{(1-x^2)}$ et $F\delta = \sqrt{(1+x^2)}$,

$$\varphi(2\delta) = \frac{2x.\sqrt{(1-x^4)}}{1+x^4}; \quad f(2\delta) = \frac{1-2x^2-x^4}{1+x^4}; \quad F(2\delta) = \frac{1-2x^2-x^4}{1+x^4}.$$

Substituant ces valeurs et réduisant, il viendra:

$$215. \quad \varphi(2+i)\delta = x . \frac{2-2x^8+i(1-6x^4+x^8)}{1-2x^4+5x^8} = xi . \frac{1-2i-x^4}{1-(1-2i)x^4}.$$

Expression algébrique de $\varphi\left(\frac{\omega}{4v+1}\right)$.

36.

On peut, comme on sait, décomposer le nombre $4v+1$ en deux carrés. Donc on peut supposer

$$\alpha^2+\beta^2 = 4v+1 = (\alpha+\beta i)(\alpha-\beta i).$$

Nous chercherons d'abord la valeur de $\varphi\left(\frac{\omega}{\alpha+\beta i}\right)$; car celle-ci étant trouvée, on en tirera facilement la valeur de $\varphi\left(\frac{\omega}{4v+1}\right)$.

La somme des deux carrés α^2 et β^2 étant impaire, l'un des nombres α et β sera pair et l'autre impair. Donc la somme $\alpha+\beta$ est impaire. Donc en vertu de 113., on aura

$$216. \quad \varphi(\alpha+\beta i)\delta = x . \frac{T}{S},$$

où T et S sont des fonctions entières de $x^4 = (\varphi\delta)^4$.

En supposant $\delta = \frac{\omega}{\alpha+\beta i}$, le premier membre de 216. se réduit à zéro, et par conséquent $x = \varphi\left(\frac{\omega}{\alpha+\beta i}\right)$ sera une racine de l'équation

$$217. \quad T = 0.$$

Donc on aura la valeur de $\varphi\left(\frac{\omega}{\alpha+\beta i}\right)$ au moyen de la resolution de cette équation.

D'abord on peut trouver tontes les racines de l'équation $T=0$ a l'aide de la fonction φ de la manière suivante:

Si $T=0$, on doit avoir

$$\varphi(\alpha+\beta i)\delta = 0,$$

d'où l'on tire, en vertu de (27.):

$$(\alpha+\beta i)\delta = m\omega + \mu\varpi i = (m+\mu i)\omega,$$

et de là

$$\delta = \frac{m+\mu i}{\alpha+\beta i}\omega$$

et

$$218.\quad x = \varphi\left(\frac{m+\mu i}{\alpha+\beta i}\omega\right).$$

Dans cette expression sont consequemment contenues toutes les racines de l'équation $T=0$. On les trouvera en donnant à m et μ toutes les valeurs entières dequis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$.

Or je dis que les valeurs de x, qui sont différentes entre elles, peuvent être représentées par la formule

$$218'.\quad x = \varphi\left(\frac{\varrho\omega}{\alpha+\beta i}\right),$$

où ϱ a toutes les valeurs entières depuis $-\frac{\alpha^2+\beta^2-1}{2}$ jusqu'à $+\frac{\alpha^2+\beta^2-1}{2}$.

Pour démontrer cela, soient λ et λ' deux nombres entiers, qui satisfont à l'équation indéterminée:

$$219.\quad \beta.\lambda - \alpha.\lambda' = 1;$$

soit de plus t un nombre entier indéterminé et faisons

$$220.\quad k = \mu\lambda + t\alpha;\quad k' = -\mu\lambda' - t\beta:$$

on en déduira sans peine:

$$\mu + \beta k + \alpha k' = 0,$$

et si l'on fait

$$\varrho = m + \alpha k - \beta k',$$

on verifiera aisément l'équation

$$\frac{m+\mu i}{\alpha+\beta i} = \frac{\varrho}{\alpha+\beta i} - k - k' i.$$

De là on tire

$$\varphi\left(\frac{m+\mu i}{\alpha+\beta i}\omega\right) = \varphi\left(\frac{\varrho\omega}{\alpha+\beta i} - k\omega - k'\omega i\right)$$

or suivant (22.) le second membre se réduit à

$$(-1)^{-k-k'}.\varphi\left(\frac{\varrho\omega}{\alpha+\beta i}\right),$$

donc

$$\varphi\left(\frac{m+\mu i}{\alpha+\beta i}\omega\right) = (-1)^{-k-k'}.\varphi\left(\frac{\varrho\omega}{\alpha+\beta i}\right) = \varphi\left(\frac{\pm\varrho\omega}{\alpha+\beta i}\right).$$

Maintenant l'expression de ϱ deviendra, en y substituant les valeurs de k et k':

$$\varrho = m + \mu(\lambda\alpha+\lambda'\beta) + i.(\alpha^2+\beta^2)$$

d'où l'on voit, qu'on peut prendre t tel que la valeur de ϱ, positive ou négative, soit inférieure à $\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}$. Donc etc.

Cela posé: soit ϱ plus grand que $\frac{\alpha^2+\beta^2-1}{4}-1$ $(=\nu-1)$ et faisons

$$\varrho = \nu + \theta.$$

Toutes les racines de l'équation $T=0$ seront representées par la formule (218′.); or toutes ces racines sont différentes entre elles. En effet si l'on avoit p. ex.

$$\varphi\left(\frac{\varrho\omega}{\alpha+\beta i}\right) = \varphi\left(\frac{\varrho'\omega}{\alpha+\beta i}\right),$$

on auroit selon (31.), (en remarquant que $\varpi=\omega$)

$$\frac{\varrho\omega}{\alpha+\beta i} = (-1)^{m+n}.\frac{\varrho'\omega}{\alpha+\beta i} + (m+ni)\omega,$$

d'où l'on tire:

$$\alpha n+\beta m = 0; \quad \varrho = (-1)^{m+n}.\varrho' + \alpha m - \beta n.$$

La première de ces équations donne $n=-\beta t;\ m=\alpha t$, où t est un entier indéterminé. En vertu de ces relations, l'expression de ϱ deviendroit:

$$\varrho = (-1)^{m+n}.\varrho' + (\alpha^2+\beta^2).t,$$

d'où l'on tire

$$\frac{\varrho\pm\varrho'}{\alpha^2+\beta^2} = t,$$

ce qui est impossible, en remarquant que ϱ, ϱ' sont tous deux inférieurs à $\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}$.

Donc les racines differentes entre elles de l'équation $T=0$ sont au nombre de $\frac{\alpha^2+\beta^2-1}{2}$. Il faut voir encore, si l'équation en question a des racines égales. En différentiant (216.) on en tirera, en remarquant que $\partial\varphi\alpha = \partial\alpha.f\alpha.F\alpha$:

$$(\alpha+\beta i).f(\alpha+\beta i)\delta.F(\alpha+\beta i)\delta.S + \left(\frac{\partial S}{\partial\delta}\right).\varphi(\alpha+\beta i)\delta$$
$$= x.\frac{\partial T}{\partial x}.f\delta.F\delta + T.f\delta.F\delta.$$

Si maintenant T, a des facteurs égaux, il faut que T et $\frac{\partial T}{\partial x}$ soient égaux

à zero en même tems; donc l'équation précédente donnera

$$S.f(\alpha+\beta i)\delta.F(\alpha+\beta i)\delta = 0;$$

or on a $\Phi(\alpha+\beta i)\delta = 0$, donc $f(\alpha+\beta i)\delta = \pm 1 = F(\alpha+\beta i)\delta$, et par conséquent

$$S = 0,$$

ce qui est impossible, car nous supposons, ce qui est permis, que T et S n'aient point de facteur communs. Par là on voit que l'équation

$$T = 0$$

est du degré $\alpha^2+\beta^2-1$ par rapport à x, et aura pour racines les quantités:

$$\pm\Phi\left(\frac{\omega}{\alpha+\beta i}\right);\quad \pm\Phi\left(\frac{2\omega}{\alpha+\beta i}\right)\ldots\ldots\pm\Phi\left(\frac{\alpha^2+\beta^2-1}{2}\cdot\frac{\omega}{\alpha+\beta i}\right).$$

En faisant $x^2 = r$, on aura une équation

$$219.\quad R = 0$$

du degré $\frac{\alpha^2+\beta^2-1}{2} = 2\nu$, et dont les racines seront

$$220.\quad \Phi^2(\delta),\ \Phi^2(2\delta),\ \Phi^2(3\delta)\ \ldots\ldots\ \Phi^2(2\nu\delta),$$

ou pour abréger on a supposé $\delta = \frac{\omega}{\alpha+\beta i}$.

Celà posé, on peut aisément résoudre l'équation R = 0, à l'aide de la méthode de M. Gaufs.

Soit ε une racine primitive de $\alpha^2+\beta^2$, je dis qu'on peut exprimer les racines comme il suit:

$$221.\quad \Phi^2(\delta),\ \Phi^2(\varepsilon\delta),\ \Phi^2(\varepsilon^2\delta),\ \Phi^2(\varepsilon^3\delta)\ \ldots\ldots\ \Phi^2(\varepsilon^{2\nu-1}.\delta).$$

En effet, en faisant

$$222.\quad \varepsilon^m = \pm a_m + t(\alpha^2+\beta^2),$$

où a_m est moindre que $\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}$, on aura:

$$\Phi(\varepsilon^m\delta) = \Phi\left(\pm a_m\delta + \frac{t(\alpha^2+\beta^2)}{\alpha+\beta i}\omega\right) = \Phi(\pm a_m\delta + t(\alpha-\beta i)\omega),$$

c'est-à-dire, en vertu de (22.):

$$\Phi(\varepsilon^m\delta) = \pm\Phi(a_m\delta),$$

et par suite:

$$\Phi^2(\varepsilon^m\delta) = \Phi^2(a_m\delta).$$

Je dis maintenant que tous les nombres

$$1,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ldots\ldots\ a_{2\nu-1}$$

sont inégaux entre eux. En effet soit p. ex. $a_m = a_n$, on aura

$$223.\quad \varepsilon^n = \pm a_m + t'(\alpha^2+\beta^2).$$

Des deux équations (222.) et (223.) on tire, en éliminant a_m,

$$\frac{\varepsilon^m \pm \varepsilon^n}{\alpha^2+\beta^2} = \text{à un nombre entier.}$$

Donc, en multipliant par $\varepsilon^m \mp \varepsilon^n$; on trouve que $\frac{\varepsilon^{2m}-\varepsilon^{2n}}{\alpha^2+\beta^2}$ est entier, et par suite $\frac{\varepsilon^{2m-2n}-1}{\alpha^2+\beta^2}$, ce qui est impossible, car ε est la racine primitive de $\alpha^2+\beta^2$ et $2m-2n$ est moindre que $\alpha^2+\beta^2-1$.

Donc les 2ν nombres 1, a, etc. sont différentes entre eux et par conséquent, pris dans un ordre différent, ils sont les mêmes que les suivans:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4\ \ldots\ldots\ 2\nu-1.$$

On voit par la formule $\varphi^2(\varepsilon^m\delta) = \varphi^2(a_m\delta)$, que les quantités (220.) et (221.) coïncident, mais dans un ordre différent.

Maintenant on pourra résoudre l'équation $R=0$ parfaitement de la même manière que l'équation (106.).

On trouvera (116.)

224. $$\varphi^2(\varepsilon^m\delta) = \frac{1}{2\nu}\cdot\left\{+A+\theta^{-m}.v^{\frac{1}{2\nu}}+s_2\theta^{-2m}.v^{\frac{2}{2\nu}}+\ldots..+s_{n-1}\theta^{-(n-1)m}.v^{\frac{n-1}{n}}\right\},$$

où θ est une racine imaginaire de l'équation $\theta^{2\nu}-1=0$, et v, s_2, s_3 ... ... s_{n-1} seront déterminés par les expressions:

$$v = \{\varphi^2(\delta)+\theta.\varphi^2(\varepsilon\delta)+\theta^2.\varphi^2(\varepsilon^2\delta)+\ldots.+\theta^{2\nu-1}.\varphi^2(\varepsilon^{2\nu-1}\delta)\}^{2\nu},$$

$$s_k = \frac{\varphi^2(\delta)+\theta^k.\varphi^2(\varepsilon\delta)+\theta^{2k}.\varphi^2(\varepsilon^2\delta)+\ldots..+\theta^{(2\nu-1)k}.\varphi^2(\varepsilon^{2\nu-1}.\delta)}{\{\varphi^2(\delta)+\theta.\varphi^2(\varepsilon\delta)+\theta^2\varphi^2(\varepsilon^2\delta)+\ldots..+\theta^{2\nu-1}.\varphi^2(\varepsilon^{2\nu-1}\delta)\}^k}.$$

$$A = \varphi^2(\delta)+\varphi^2(\varepsilon\delta)+\varphi^2(\varepsilon^2\delta)+\ldots..+\varphi^2(\varepsilon^{2\nu-1}\delta),$$

qui par le procédé tome II. de ce journal pag. 143., 144., 145. peuvent être exprimés rationellement par les coefficiens de l'équation $R=0$, qui seront de la forme $A+Bi$, où A et B sont des nombres rationels. Donc la formule (224.) donne l'expression algébrique de toutes les racines de l'équation $R=0$, et par consequent les valeurs des fonctions

$$\varphi\left(\frac{\omega}{\alpha+\beta i}\right),\ \varphi\left(\frac{2\omega}{\alpha+\beta i}\right),\ \ldots..\ \varphi\left(\frac{(2\nu-1)\omega}{\alpha+\beta i}\right),\ \varphi\left(\frac{2\nu\omega}{\alpha+\beta i}\right).$$

37.

Ayant trouvé par ce qui précède la valeur de $\varphi\left(\frac{m\omega}{\alpha+\beta i}\right)$, on en tirera celle de la fonction

$$\varphi\left(\frac{\omega}{\alpha^2+\beta^2}\right) = \varphi\left(\frac{\omega}{4\nu+1}\right),$$

comme il suit.

La valeur de $\varphi\left(\frac{m\omega}{\alpha+\beta i}\right)$ donnera celle de $\varphi\left(\frac{m\omega}{\alpha-\beta i}\right)$ en changeant seulement i en $-i$. De là on tire la valeur de $\varphi\left(\frac{m\omega}{\alpha+\beta i}+\frac{m\omega}{\alpha-\beta i}\right)$

par la formule (10), savoir

$$226.\quad \varphi\left(\frac{m\omega}{\alpha+\beta i}+\frac{m\omega}{\alpha-\beta i}\right)=\frac{q\left(\frac{m\omega}{\alpha+\beta i}\right)\sqrt{\left[1-\varphi^4\left(\frac{m\omega}{\alpha-\beta i}\right)\right]}+q\left(\frac{m\omega}{\alpha-\beta i}\right)\cdot\sqrt{\left[1-\varphi^4\left(\frac{m\omega}{\alpha+\beta i}\right)\right]}}{1-\varphi^2\left(\frac{m\omega}{\alpha+\beta i}\right)\cdot\varphi^2\left(\frac{m\omega}{\alpha-\beta i}\right)},$$

$$\text{or}\quad \frac{m\omega}{\alpha+\beta i}+\frac{m\omega}{\alpha-\beta i}=\frac{2m\alpha\omega}{\alpha^2+\beta^2}=\frac{2m\alpha\omega}{4\nu+1};$$

donc on aura la valeur de la fonction

$$\varphi\left(\frac{2m\alpha\omega}{4\nu+1}\right).$$

Maintenant pour avoir la valeur de $\varphi\left(\frac{n\omega}{4\nu+1}\right)$ où n a une valeur déterminée quelconque, il suffit de déterminer m et t de la manière que

$$n=2m\alpha-(4\nu+1)t,$$

ce qui est toujours possible, en remarquant que les deux nombres 2α et $4\nu+1$ sont premiers entre eux; car alors on obtiendra:

$$\varphi\left(\frac{2m\alpha\omega}{4\nu+1}\right)=\varphi\left(\frac{n\omega}{4\nu+1}+t\omega\right)=(-1)^t.\varphi\left(\frac{n\omega}{4\nu+1}\right).$$

En posant p. ex. $n=1$, on aura la valeur de $\varphi\left(\frac{\omega}{4\nu+1}\right)$.

38.

Le cas, où $4\nu+1$ a la forme $1+2^n$, est le plus remarquable; car alors l'expression de $\varphi\left(\frac{\omega}{4\nu+1}\right)$ ne contient que des racines carrées. En effet on a dans ce cas $2\nu=2^{n-1}$, et par suite la formule (224.) fait voir qu'on peut déduire $\varphi(\varepsilon^m\delta)$ de θ et ν en extrayant seulement des racines carrées. Or ν est une fonction rationelle de θ et $\sqrt{(-1)}$, et θ est déterminée par l'équation $\theta^{2^{n-1}}-1$, d'où l'on tire θ par des racines carrées; donc on trouve aussi ν et la fonction

$$\varphi(\varepsilon^m\delta)=\varphi\left(\frac{a_m\cdot\omega}{\alpha+\beta i}\right).$$

Connoissant de cette manière $\varphi\left(\frac{m\omega}{\alpha+\beta i}\right)$, on aura de même $\varphi\left(\frac{m\omega}{\alpha-\beta i}\right)$ et de là, par la formule (226.) la valeur de $\varphi\left(\frac{n\omega}{\alpha^2+\beta^2}\right)=\varphi\left(\frac{n\omega}{4\nu+1}\right)$, en extrayant des racines carrées.

39.

Un autre cas, ou la valeur de $\varphi\left(\frac{m\omega}{n}\right)$ peut être determinée par des racines carrées est celui où n est une puissance de 2, comme nous l'a-

vons vu No. 13. Donc on connoit les fonctions:

$$\varphi\left(\frac{m\omega}{2^n}\right);\quad \varphi\left(\frac{m\omega}{1+2^n}\right),$$

où dans la dernière $1+2^n$ est un nombre premier.

Soient maintenant $1+2^n$, $1+2^{n_1}$, $1+2^{n_2}$, ... $1+2^{n_\mu}$ plusieurs nombres premiers, on connoit les fonctions:

$$\varphi\left(\frac{m\omega}{2^n}\right);\quad \varphi\left(\frac{m_1\omega}{1+2^{n_1}}\right);\quad \varphi\left(\frac{m_2\omega}{1+2^{n_2}}\right);\quad .....\quad \varphi\left(\frac{m_\mu\omega}{1+2^{n_\mu}}\right),$$

et de là la fonction:

$$\varphi\left(\frac{m}{2^n}+\frac{m_1}{1+2^{n_1}}+\frac{m_2}{1+2^{n_2}}+.....+\frac{m_\mu}{1+2^{n_\mu}}\right)\omega$$
$$=\varphi\left(\frac{m'.\omega}{2^n(1+2^{n_1})(1+2^{n_2}).....(1+2^{n_\mu})}\right),$$

où m' est un nombre entier, qui, à cause des indéterminés m, m_1, m_2, ... m_μ peut avoir une valeur quelconque. On peut donc établir le théorème suivant: „La valeur de la fonction $\varphi\left(\frac{m\omega}{n}\right)$ peut être exprimée par „des racines carrées toutes les fois que n est un nombre de la forme „2^n ou $1+2^n$, le dernier nombre étant premier, ou même un produit „de plusieurs nombres de ces deux formes."

40.

En appliquant ce qui précède à la lemniscate, on parviendra au théorème énoncé no. 22.

Soit l'arc AM (Fig. 1.) $=\alpha$ et la corde $AM=x$, on aura

$$\partial\alpha=\frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^4)}}.$$

En effet, l'équation polaire de la lemniscate est

$$x=\sqrt{(\cos 2\theta)},$$

d'où

$$\partial\theta=-\frac{\partial x.\sqrt{(\cos 2\theta)}}{\sin 2\theta}$$

et

$$\partial\alpha^2=\partial x^2+x^2.\partial\theta^2,$$

donc

$$\partial\alpha^2=\partial x^2.\left\{1+\frac{x^2.\cos 2\theta}{(\sin 2\theta)^2}\right\};$$

mais de $x=\sqrt{(\cos 2\theta)}$ on tire $\cos 2\theta=x^2$, $\cos^2 2\theta=x^4$, $1-\cos^2 2\theta=1-x^4=(\sin 2\theta)^2$, donc

$$\partial\alpha^2=\partial x^2\left\{1+\frac{x^4}{1-x^4}\right\}=\frac{\partial x^2}{1-x^4},$$

et par suite

$$\partial\alpha = \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^4)}}$$

et

$$x = \varphi(\alpha).$$

Si l'on suppose $x = 1$, on aura $\alpha = AMB = \frac{\omega}{2}$. Donc la circonférence $AMBN = \omega$. Supposons maintenant qu'il s'agit de diviser cette circonférence en n parties égales, et soit l'arc $AM = \frac{m}{n}.AMBN = \frac{m}{n}\omega$, on aura

$$AM = \varphi\left(\frac{m\omega}{n}\right).$$

Donc on aura la corde, et par suite le m^me^ point de division, si l'on connoit la fonction $\varphi\left(\frac{m\omega}{n}\right)$; or c'est cela qui a toujours lieu, lorsque n est décomposable en nombres premiers de la forme 2 et $1+2^n$, comme nous l'avons vu dans le no. précédent. Donc dans ce cas on peut construire les points de division à l'aide de la règle et du compas seulement, ou ce qui revient au même, par l'intersection de lignes droites et de cercles.

§. IX.

Usage des fonctions φ, f, F dans la transformation des fonctions elliptiques.

41.

M. Legendre a fait voir dans ses exercices de calc. int., comment l'intégrale $\int\frac{\partial\varphi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}}$, qui, en faisant $\sin\varphi = x$, se change en $\int\frac{\partial x}{\sqrt{[(1-x^2)(1-c^2x^2)]}}$, peut être transformée en d'autres intégrales de la même forme, avec un module différent. Je suis parvenu à généraliser cette théorie par le théorème suivant:

Si l'on désigne par α la quantité $\frac{(m+\mu)\omega+(m-\mu)\varpi i}{2n+1}$, où au moins l'un des deux nombres entiers m et μ est premier avec $2n+1$, on aura:

$$227.\quad \begin{cases} \int \frac{dy}{\sqrt{[(1-c_1^2y^2)(1+e_1^2y^2)]}} = \pm a\int \frac{dx}{\sqrt{[(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)]}}, \\ \text{où} \\ y = f.x.\frac{(\varphi^2\alpha - x^2)(\varphi^2 2\alpha - x^2)\ldots\ldots(\varphi^2 n\alpha - x^2)}{(1+e^2\varphi^2\alpha.x^2)(1+e^2\varphi^2 2\alpha.x^2)\ldots(1+e^2\varphi^2 n\alpha.x^2)}, \\ \frac{1}{c_1} = \frac{f}{c}\left\{\Phi\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right).\Phi\left(\frac{\omega}{2}+2\alpha\right)\ldots\ldots\Phi\left(\frac{\omega}{2}+n\alpha\right)\right\}^2, \\ \frac{1}{e_1} = \frac{f}{e}\left\{\Phi\left(\frac{\varpi i}{2}+\alpha\right).\Phi\left(\frac{\varpi i}{2}+2\alpha\right)\ldots\ldots\Phi\left(\frac{\varpi i}{2}+n\alpha\right)\right\}^2, \\ a = f(\Phi\alpha.\Phi 2\alpha.\Phi 3\alpha\ldots\ldots\Phi n\alpha)^2, \end{cases}$$

f étant une indéterminée, de sorte qu'il n'existe qu'une seule relation entre les quantités c_1, e_1, c, e.

Les quantités e^2 et c^2 pourront être positives ou négatives.

Par ce theorème on peut trouver une infinité de transformations différentes entre elles et de celles de M. Legendre.

42.

Soient m et μ deux nombres entiers, et faisons pour abréger:

$$228.\quad \alpha = \frac{(m+\mu)\omega + (m-\mu)\varpi i}{2n+1},$$

où l'on suppose que l'un des deux nombres m, μ soit premier avec $2n+1$.

En désignant par θ une quantité quelconque, il viendra, en vertu de (22.)

$$229.\quad \varphi[\theta+(2n+1)\alpha] = \varphi\theta.$$

En mettant $\theta - n\alpha$ au lieu de θ, on obtiendra:

$$230.\quad \varphi[\theta+(n+1)\alpha] = \varphi(\theta - n\alpha).$$

Celà posé, considérons l'expression suivante

$$231.\quad \Phi_1(\theta) = \varphi(\theta)+\varphi(\theta+\alpha)+\varphi(\theta+2\alpha)+\ldots+\varphi(\theta+n\alpha)+\ldots \\ \ldots+\varphi(\theta+2n\alpha).$$

En mettant $\theta+\alpha$ au lieu de θ, il viendra à cause de l'équation (229.):

$$232.\quad \Phi_1(\theta+\alpha) = \Phi_1(\theta),$$

donc si m désigne un nombre entier quelconque:

$$233.\quad \Phi_1(\theta+m\alpha) = \Phi_1(\theta).$$

En vertu de l'équation 230. on peut écrire l'expression de $\Phi_1(\theta)$, comme il suit:

$$234.\quad \Phi_1(\theta) = \varphi(\theta)+\varphi(\theta+\alpha)+\varphi(\theta-\alpha)+\varphi(\theta+2\alpha)+\varphi(\theta-2\alpha)+\ldots \\ \ldots+\varphi(\theta+n\alpha)+\varphi(\theta-n\alpha),$$

c'est-à-dire, en vertu de la formule

$$\varphi(\theta+\nu\alpha)+\varphi(\theta-\nu\alpha)=\frac{2.\varphi\theta.f(\nu\alpha).F(\nu\alpha)}{1+e^2c^2(\varphi\theta)^2[\varphi(\nu\alpha)]^2},$$

235. $\varphi_1(\theta)$

$$=\varphi\theta+\frac{2\varphi\theta.f\alpha.F\alpha}{1+e^2c^2\varphi^2\alpha.\varphi^2\theta}+\frac{2\varphi\theta.f2\alpha.F2\alpha}{1+e^2c^2\varphi^2 2\alpha.\varphi^2\theta}+\ldots.+\frac{2\varphi\theta.fn\alpha.Fn\alpha}{1+e^2c^2\varphi^2 n\alpha.\varphi^2\theta}.$$

En faisant $\varphi\theta=x$, $\varphi_1(\theta)$ devient une fonction rationelle de x. En la désignant par $\psi(x)$, on aura:

236. $$\psi(x)=x.\left\{1+\frac{2f\alpha.F\alpha}{1+e^2c^2\varphi^2\alpha.x^2}+\ldots.+\frac{2fn\alpha.Fn\alpha}{1+e^2c^2\varphi^2 n\alpha.x^2}\right\}.$$

43.

Maintenant soit ε une quantité quelconque, je dis qu'on aura

237. $$1-\frac{\psi x}{\varphi_1\varepsilon}=\frac{\left(1-\frac{x}{\varphi\varepsilon}\right)\left(1-\frac{x}{\varphi(\varepsilon+\alpha)}\right)\left(1-\frac{x}{\varphi(\varepsilon+2\alpha)}\right)\ldots.\left(1-\frac{x}{\varphi(\varepsilon+2n\alpha)}\right)}{(1+e^2c^2\varphi^2\alpha.x^2)(1+e^2c^2\varphi^2 2\alpha.x^2)\ldots..(1+e^2c^2\varphi^2 n\alpha.x^2)}.$$

En effet il est clair, que la fonction

238. $$R=\left(1-\frac{\psi x}{\varphi_1\varepsilon}\right)(1+e^2c^2\Phi^2\alpha.x^2)\ldots..(1+e^2c^2\Phi^2 n\alpha.x^2)$$

sera entière et du degré $2n+1$; mais en faisant $x=\Phi\varepsilon$, ψx deviendra $=\Phi_1\varepsilon$, et par suite R se réduira à zéro pour cette valeur de x. De même en faisant $x=\Phi(\varepsilon+m\alpha)$, où m est entier, on aura $\psi x=\Phi_1(\varepsilon+m\alpha)$, c'est à dire, en vertu de (233.), $\psi x=\Phi_1\varepsilon$. Donc $1-\frac{\psi x}{\varphi_1\varepsilon}=0$, et par conséquent $x=\Phi(\varepsilon+m\alpha)$ sera une racine de l'équation $R=0$, quel que soit le nombre entier m. Or généralement toutes les quantités

239. $\Phi\varepsilon,\ \Phi(\varepsilon+\alpha),\ \Phi(\varepsilon+2\alpha),\ \ldots..\ \Phi(\varepsilon+2n\alpha)$

sont différentes entre elles. En effet si l'on avoit

$$\Phi(\varepsilon+m'\alpha)=\Phi(\varepsilon+\mu'\alpha),$$

il en suivrait en vertu de (31.)

$$\varepsilon+m'\alpha=(-1)^{k+k''}.\{\varepsilon+\mu'\alpha\}+k\omega+k'\varpi i,$$

d'ou

$$t+k'=2k'',$$
$$k=k''+l;\quad k'=k''-l,$$
$$(m'-\mu')\alpha=(k''+l)\omega+(k''-l)\varpi i.$$

De là, en substituant la valeur de $\alpha=\frac{(m+\mu)\omega+(m-\mu)\varpi i}{2n+1}$, on tire

$$(m'-\mu')(m+\mu)=(2n+1)(k''+l),$$
$$(m'-\mu')(m-\mu)=(2n+1)(k''-l)$$

et

$$m'-\mu'=(2n+1).\frac{k''}{m}=(2n+1)\frac{l}{\mu},$$

équation contradictoire, parceque nous avons supposé, que l'un des deux nombres m et μ soit premier avec $2n+1$, et $m'-\mu'$ est toujours moindre que $2n+1$. Maintenant les $2n+1$ quantités (239.) étant différentes entre elles, elles sont précisément les $2n+1$ racines de l'équation $R=0$. Donc on a

$$240.\quad R = A\left(1-\frac{x}{\varphi\varepsilon}\right)\left(1-\frac{x}{\varphi(\varepsilon+\alpha)}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{x}{\varphi(\varepsilon+2n\alpha)}\right),$$

où A est un coefficient constant, qu'on trouvera en attribuant à x une valeur particulière; p. ex. en faisant $x=0$, on a $R=A$; or l'équation (238.) donne pour $x=0$: $R=1$, donc $A=1$, et par conséquent l'équation (237.) a lieu.

En multipliant cette équation par $\Phi\varepsilon$ et faisant ensuite $\varepsilon=0$, il viendra:

$$241.\quad \psi(x) = gx\,\frac{\left(1-\frac{x}{\varphi\alpha}\right)\left(1-\frac{x}{\varphi 2\alpha}\right)\ldots\ldots\ldots\left(1-\frac{x}{\varphi 2n\alpha}\right)}{(1+e^2c^2\varphi^2\alpha.x^2)\ldots\ldots(1+e^2c^2\varphi^2 n\alpha.x^2)},$$

où g est la valeur de $\frac{\varphi_1\varepsilon}{\varphi\varepsilon}$ pour $\varepsilon=0$. En faisant $\theta=0$, après avoir divisé par $\Phi\theta$, on trouve l'expression suivante de cette constante:

$$242.\quad g = 1+2f\alpha.F\alpha+2f2\alpha.F2\alpha+\ldots\ldots+2fn\alpha.Fn\alpha.$$

En faisant dans (230.) $\theta = n\alpha-(m'+1)\alpha$, on trouve

$$\Phi(2n\alpha-m'\alpha) = \Phi[-(m+1)\alpha] = -\Phi(m'+1)\alpha.$$

Donc on peut écrire l'expression de ψx comme il suit:

$$243.\quad \psi x = g.x.\frac{\left(1-\frac{x^2}{\varphi^2\alpha}\right)\left(1-\frac{x^2}{\varphi^2 2\alpha}\right)\ldots\ldots\ldots\left(1-\frac{x^2}{\varphi^2 n\alpha}\right)}{(1+e^2c^2\varphi^2\alpha.x^2)(1+e^2c^2\varphi^2 2\alpha.x^2)\ldots\ldots(1+e^2c^2\varphi^2 n\alpha.x^2)}.$$

44.

Maintenant faisons dans l'expression de $1-\frac{\psi x}{\varphi_1\varepsilon}$, $\varepsilon=\frac{\omega}{2}$. En supposant pour abréger

$$244.\quad \varrho = (1-e^2c^2\Phi^2\alpha.x^2)(1+e^2c^2\Phi^2 2\alpha.x^2)\ldots\ldots(1+e^2c^2\Phi^2 n\alpha.x^2),$$

on aura

$$1-\frac{\psi x}{\varphi_1\frac{\omega}{2}} = \left(1-\frac{x}{\varphi\frac{\omega}{2}}\right).\left\{1-\frac{x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right)}\right\}\left\{1-\frac{x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2}+2\alpha\right)}\right\}\ldots\left\{1-\frac{x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2}+2n\alpha\right)}\right\}.\frac{1}{\varrho};$$

or, en faisant dans (230.)

$$\theta = \frac{\omega}{2}+(n-m'-1)\alpha,$$

on a

$$\Phi\left(\frac{\omega}{2}+(2n-m')\alpha\right)=\Phi\left(\frac{\omega}{2}-(m'+1)\alpha\right),$$

donc en vertu de la formule (voy. 17.):

$$\Phi\left(\frac{\omega}{2}-\alpha\right)=\Phi\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right),$$

il viendra:

$$\Phi\left(\frac{\omega}{2}+(2n-m')\alpha\right)=\Phi\left(\frac{\omega}{2}+(m'+1)\alpha\right).$$

Cette équation fait voir qu'on peut écrire l'expression de $1-\frac{\psi x}{\varphi_1\frac{\omega}{2}}$ comme il suit:

245. $$1-\frac{\psi x}{\varphi_1\frac{\omega}{2}}$$

$$=(1-cx)\left(1-\frac{x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right)}\right)^2\left(1-\frac{x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2}+2\alpha\right)}\right)^2\cdots\cdots\left(1-\frac{x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2}+n\alpha\right)}\right)^2\cdot\frac{1}{\varrho}.$$

En mettant $-x$ au lieu de $+x$, on aura semblablement

246. $$1+\frac{\psi x}{\varphi_1\frac{\omega}{2}}$$

$$=(1+cx)\cdot\left(1+\frac{x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right)}\right)^2\left(1+\frac{x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2}+2\alpha\right)}\right)^2\cdots\cdots\left(1+\frac{x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2}+n\alpha\right)}\right)^2\cdot\frac{1}{\varrho}.$$

Donc si l'on fait

$$247.\quad y=k.\psi x;\quad c_1=\frac{1}{k.\varphi_1\frac{\omega}{2}},$$

où k est indéterminé, et

$$248.\quad\begin{cases}t=\left(1-\frac{x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right)}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2}+n\alpha\right)}\right),\\ t_1=\left(1+\frac{x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right)}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2}+n\alpha\right)}\right),\end{cases}$$

on aura:

$$249.\quad 1-c_1y=(1-cx).\frac{t^2}{\varrho};\quad 1+c_1y=(1+cx)\frac{t_1^2}{\varrho}.$$

De la même manière, en faisant

$$250.\quad\begin{cases}s=\left(1-\frac{x}{\varphi\left(\frac{\varpi}{2}i+\alpha\right)}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{x}{\varphi\left(\frac{\varpi}{2}i+n\alpha\right)}\right),\\ s_1=\left(1+\frac{x}{\varphi\left(\frac{\varpi}{2}i+\alpha\right)}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{x}{\varphi\left(\frac{\varpi}{2}i+n\alpha\right)}\right),\end{cases}$$

et

$$251.\quad e_1 = \pm \frac{i}{k.\varphi_1\left(\frac{\varpi}{2}i\right)},$$

on trouvera ces deux équations:

$$252.\quad 1 \mp e_1 iy = (1-eix).\frac{s}{\varrho};\quad 1 \pm e_1 iy = (1+eix).\frac{s_1}{\varrho}.$$

Les équations 249. et 252. donneront:

$$(1-c_1^2y^2) = (1-c^2x^2).\frac{t^2t_1^2}{\varrho^2};\quad (1+e_1^2y^2) = (1+e^2x^2).\frac{s^2s_1^2}{\varrho^2}$$

et par conséquent:

$$253.\quad \sqrt{[(1-c_1^2y^2)(1+e_1^2y)]} = \pm\frac{tt_1ss_1}{\varrho^2}\sqrt{[(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)]}.$$

Maintenant l'expression de y donne $dy = \frac{P}{\varrho^2}.dx$, où P sera une fonction entière de x du degré $4n$, donc:

$$\frac{dy}{\sqrt{[(1-c_1^2y^2)(1+e_1^2y^2)]}} = \pm\frac{P}{tt_1ss_1}.\frac{dx}{\sqrt{[(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)]}}.$$

Or je dis que la fonction $\frac{P}{tt_1ss_1}$ se réduira à une quantité constante. En effet on a

$$1-c_1y = (1-cx).\frac{t^2}{\varrho};$$

en différentiant, et mettant pour dy sa valeur $\frac{Pdx}{\varrho^2}$, on aura

$$P = \frac{t}{c_1}\left\{ct\varrho - (1-cx)\left(2\varrho\frac{dt}{dx} - t\frac{d\varrho}{dx}\right)\right\}.$$

On voit de là que P est divisible par t. De la même manière on prouvera que P est divisible par les trois fonctions t_1, s, s_1. Donc si deux quelconques des quatre fonctions t, t_1, s, s_1 n'ont point de facteur commun, P sera divisible par leur produit. Or c'est ce qu'on peut voir aisément à l'aide des expressions de ces fonctions. Donc $\frac{P}{tt_1ss_1}$ est une fonction entière de x. Or P est du degré $4n$; et chacune des fonctions t, t_1, s, s_1 est du degré n. Donc il est prouvé, que $\frac{P}{tt_1ss_1}$ est une quantité constante. En la désignant par a, il viendra

$$254.\quad \frac{\partial y}{\sqrt{[(1-c_1^2y^2)(1+e_1^2y^2)]}} = \pm a.\frac{\partial x}{\sqrt{[(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)]}}.$$

Pour déterminer a il suffit d'attribuer à x une valeur particulière. En faisant p. ex. $x=0$, on aura

$$t = t_1 = s = s_1 = 1;\quad P = \varrho^2.\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = \frac{\partial y}{\partial x} = k.\psi' x.$$

Or en différentiant l'expression de ψx, et faisant ensuite $x = 0$, il viendra $\psi' x = g$, donc

$$255. \quad a = k.g.$$

On peut donner d'autres formes plus simples aux expressions de c_1, e_1, g, a, et qui mettront en évidence plusieurs proprietés remarquables de ces quantités.

Par la formule 240. on voit que le coefficient de x^{2n+1} dans la fonction R est $-\frac{A}{\varphi\varepsilon.\varphi(\varepsilon+\alpha).....\varphi(\varepsilon+2n\alpha)}$; or d'après 237. le même coefficient sera

$$-\frac{(-1)^n}{\varphi_1\varepsilon}.\frac{g}{(\varphi\alpha.\varphi 2\alpha.....\varphi n\alpha)^2},$$

donc en remarquant que $A = 1$:

$$\Phi_1(\varepsilon) = \frac{(-1)^n.g}{(\varphi\alpha.\varphi 2\alpha.....\varphi n\alpha)^2}.\Phi\varepsilon.\Phi(\varepsilon+\alpha).\Phi(\varepsilon+2\alpha)....\Phi(\varepsilon+2n\alpha).$$

En faisant dans (236.), (243.) $x = \frac{1}{5}$, après avoir divisé par x, on obtiendra deux valeurs de $\frac{\psi x}{x}$, savoir

$$1 \text{ et } \frac{g(-1)^n}{(ec)^{2n}(\varphi\alpha.\varphi 2\alpha.....\varphi n\alpha)^2},$$

donc, en les égalant:

$$256. \quad g = (-1)^n.(ec)^{2n}(\Phi\alpha.\Phi 2\alpha.....\Phi n\alpha)^4,$$

et par conséquent:

$$257. \quad \Phi_1(\varepsilon) = (ec)^{2n}(\Phi\alpha.\Phi 2\alpha....\Phi n\alpha)^2\Phi\varepsilon.\Phi(\varepsilon+\alpha).\Phi(\varepsilon+2\alpha)....\Phi(\varepsilon+2n\alpha)$$
$$= \Phi(\varepsilon)+\Phi(\varepsilon+\alpha)+\Phi(\varepsilon+2\alpha)+....+\Phi(\varepsilon+2n\alpha).$$

Cette équation exprime une propriété remarquable de la fonction Φ. En y posant $\varepsilon = \frac{\omega}{2}$ et $\varepsilon = \frac{\varpi}{2}i$, on obtiendra

$$258. \quad \begin{cases} \Phi_1\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1}{kc_1} = (ec)^{2n}.\delta^2\Phi\left(\frac{\omega}{2}\right).\Phi\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right).....\Phi\left(\frac{\omega}{2}+2n\alpha\right), \\ \Phi_1\left(\frac{\varpi}{2}i\right) = \frac{1}{ke_1} = (ec)^{2n}.\delta^2\Phi\left(\frac{\varpi}{2}i\right).\Phi\left(\frac{\varpi}{2}i+\alpha\right).....\Phi\left(\frac{\varpi}{2}i+2n\alpha\right), \end{cases}$$

où l'on a fait pour abréger

$$259. \quad \delta = \Phi\alpha.\Phi 2\alpha.\Phi 3\alpha.....\Phi n\alpha.$$

En remarquant que

$$\Phi\left(\frac{\omega}{2}+(2n-m')\alpha\right) = \Phi\left(\frac{\omega}{2}+(m'+1)\alpha\right)$$

et

$$\Phi\left(\frac{\varpi}{2}i+(2n-m')\alpha\right) = \Phi\left(\frac{\varpi}{2}i+(m'+1)\alpha\right),$$

et faisant

$$260.\quad k(e^2c^2)^n.\delta^2 = f^2,$$

on tire de ces équations

$$261.\quad \begin{cases} \frac{1}{c_1} = \frac{f}{c}\left\{\varphi\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right).\varphi\left(\frac{\omega}{2}+2\alpha\right).....\varphi\left(\frac{\omega}{2}+n\alpha\right)\right\}^2, \\ \frac{1}{e_1} = \pm\frac{f}{e}\left\{\varphi\left(\frac{\varpi}{2}i+\alpha\right).\varphi\left(\frac{\varpi}{2}i+2\alpha\right).....\varphi\left(\frac{\varpi}{2}i+n\alpha\right)\right\}^2. \end{cases}$$

Multipliant et remarquant qu'on a (18.)

$$\varphi\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right)\varphi\left(\frac{\varpi}{2}i+\alpha\right) = \frac{i}{ec};$$

on obtiendra

$$\mp\frac{1}{c_1e_1} = \frac{(-1)^n.f^2}{(ec)^{2n+1}},$$

d'où

$$262.\quad c_1e_1 = \mp\frac{(ec)^{2n+1}.(-1)^n}{f^2}.$$

De même en divisant on obtiendra:

$$263.\quad \begin{cases} \mp\frac{e_1}{c_1} = (-1)^n.\frac{e}{c}(ec)^{2n}.\left\{\varphi\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right).\varphi\left(\frac{\omega}{2}+2\alpha\right).....\varphi\left(\frac{\omega}{2}+n\alpha\right)\right\}^4, \\ \mp\frac{c_1}{e_1} = (-1)^n.\frac{c}{e}(ec)^{2n}.\left\{\varphi\left(\frac{\varpi}{2}i+\alpha\right).\varphi\left(\frac{\varpi}{2}i+2\alpha\right).....\varphi\left(\frac{\varpi}{2}i+n\alpha\right)\right\}^4, \end{cases}$$

Précédemment nous avons trouvé $a = k.g$, et $g = (-1)^n.(ec)^{2n}\delta^4$, donc

$$264.\quad a = f.\delta^2.(-1)^n.$$

Également nous avons trouvé $y = k.\psi(x)$, donc en vertu de (243.)

$$265.\quad y = (-1)^n f.x\,\frac{(\varphi^2\alpha-x^2)(\varphi^2 2\alpha-x^2)(\varphi^2 3\alpha-x^2).....(\varphi^2 n\alpha-x^2)}{(1+e^2c^2\varphi^2\alpha.x^2)(1+e^2c^2\varphi^2 2\alpha.x^2)....(1+e^2c^2\varphi^2 n\alpha.x^2)}.$$

Donc ces valeurs précédentes de c_1, e_1, a et y donneront:

$$266.\quad \frac{\partial y}{\sqrt{[(1-c_1^2y^2)(1+e_1^2y^2)]}} = \pm\frac{a\,\partial x}{\sqrt{[(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)]}},$$

et de là

$$267.\quad \int\frac{\partial y}{\sqrt{[(1-c_1^2y^2)(1+e_1^2y^2)]}} = \pm a.\int\frac{\partial x}{\sqrt{[(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)]}}.$$

45.

Les formules (261.) donnent les valeurs des quantités c_1 et e_1, exprimées en c et e à l'aide de la fonction φ. Or on peut aussi les déterminer à l'aide d'une équation algébrique. En effet on a

$$\left\{\varphi\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right)\right\}^2 = \frac{1}{c^2}\left(\frac{f\alpha}{F\alpha}\right)^2 = \frac{1}{c^2}.\frac{1-c^2\varphi^2\alpha}{1+e^2\varphi^2\alpha}$$

et

$$\left\{\varphi\left(\frac{\varpi}{2}i+\alpha\right)\right\}^2 = -\frac{1}{e^2}\left(\frac{F\alpha}{f\alpha}\right)^2 = -\frac{1}{e^2}.\frac{1+e^2\varphi^2\alpha}{1-c^2\varphi^2\alpha};$$

donc il est clair que les valeurs de c_1 et e_1 pourront être exprimées en

fonctions rationelles et symétriques des quantités $\Phi\alpha$, $\Phi 2\alpha$, ... $\Phi n\alpha$. Donc si $2n+1$ est un nombre premier, on peut, en vertu de ce qu'on a vu §. V., déterminer c_1 et e_1 à l'aide d'une équation algébrique du $(2n+2)^{\text{me}}$ degré. On peut encore démontrer que la même chose aura lieu dans le cas où $2n+1$ est un nombre composé. Alors on peut même déterminer c_1 et e_1 à l'aide d'une équation d'un degré moindre que $2n+2$.

Donc on aura un certain nombre de transformations correspondantes pour chaque valeur de $2n+1$.

46.

On a supposé dans ce qui précède que e et c soient des quantités réelles et positives; mais ayant exprimé c_1 et e_1 en e et c par des équations algébriques, il est clair que la formule (266.) aura lieu également en donnant à e et c des valeurs réelles et imaginaires quelconques. Dans le cas où e^2, c^2 sont réelles, on peut même se servir des expressions (261.), (265.). Mais alors ω et ϖ ne seront pas toujours des quantités réelles. Au reste l'une des quantités c_1 et e_1, à cause de l'indéterminée f, peut être prise à volonté; seulement il faut excepter les valeurs zéro et l'infini.

47.

Si l'on suppose c et e réels et $2n+1$ premier, les valeurs de c_1 et e_1 seront imaginaires, excepté deux d'entre elles, dont l'une répond a

$$\alpha = \frac{2m.\omega}{2n+1}$$

et l'autre à

$$\alpha = \frac{2\mu\varpi i}{2n+1}.$$

A. Supposons d'abord

$$\alpha = +\frac{2m.\omega}{2n+1}.$$

Dans ce cas on aura (261.):

$$\frac{1}{c_1} = \frac{f}{c}.\left\{\Phi\left(\frac{\omega}{2}+\frac{2m\omega}{2n+1}\right).\Phi\left(\frac{\omega}{2}+2.\frac{2m\omega}{2n+1}\right).....\Phi\left(\frac{\omega}{2}+n.\frac{2m\omega}{2n+1}\right)\right\}^2.$$

Soit $\mu.2m=(2n+1)t\pm a_m$, où t est entier et positif, et moindre que $\frac{2n+1}{2}$, on aura

$$\Phi\left(\frac{\omega}{2}+\mu.\frac{2m\omega}{2n+1}\right)=\Phi\left(\frac{\omega}{2}\pm\frac{a_m\omega}{2n+1}+t\right)=(-1)^t.\Phi\left(\frac{\omega}{2}\pm\frac{a_m\omega}{2n+1}\right)$$
$$=\pm\Phi\left(\frac{2n+1-2a_m}{2n+1}.\frac{\omega}{2}\right).$$

Or les nombres $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$ seront les mêmes que les suivants 1, 2, 3, ... n; mais dans un ordre différent; donc l'expression de $\frac{1}{c_1}$ pourra être mise sous la forme

$$268.\quad \frac{1}{c_1} = \frac{f}{c}\left\{\Phi\left(\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{\omega}{2}\right)\Phi\left(\frac{3}{2n+1}\cdot\frac{\omega}{2}\right)\ldots\ldots\Phi\left(\frac{2n-1}{2n+1}\cdot\frac{\omega}{2}\right)\right\}^2.$$

De même l'équation (263.) donnera

$$269.\quad \frac{e_1}{c_1} = \mp(-1)^n.\frac{e}{c}.(ec)^{2n}\left\{\Phi\left(\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{\omega}{2}\right)\Phi\left(\frac{3}{2n+1}\cdot\frac{\omega}{2}\right)\ldots.\Phi\left(\frac{2n-1}{2n+1}\cdot\frac{\omega}{2}\right)\right\}^4,$$

Soit maintenant $c = 1$, $c_1 = 1$, on aura, en posant $\pm(-1)^n = 1$:

$$269'.\quad e_1 = e^{2n+1}.\left\{\Phi\left(\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{\omega}{2}\right)\Phi\left(\frac{3}{2n+1}\cdot\frac{\omega}{2}\right)\ldots\ldots\Phi\left(\frac{2n-1}{2n+1}\cdot\frac{\omega}{2}\right)\right\}^4,$$

$$270.\quad \int\frac{\partial y}{\sqrt{[(1-y^2)(1+e_1^2y^2)]}} = \pm a.\int\frac{\partial x}{\sqrt{[(1-x^2)(1+e^2x^2)]}} + \text{Const.}$$

$$271.\quad y=(-1)^n f.x.\frac{\left\{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2n+1}\right)-x^2\right\}\left\{\varphi^2\left(\frac{2\omega}{2n+1}\right)-x^2\right\}\ldots.\left\{\varphi^2\left(\frac{n\omega}{2n+1}\right)-x^2\right\}}{\left\{1+e^2\varphi^2\left(\frac{\omega}{2n+1}\right)x^2\right\}\left\{1+e^2\varphi^2\left(\frac{2\omega}{2n+1}\right)x^2\right\}\ldots.\left\{1+e^2.\varphi^2\left(\frac{n\omega}{2n+1}\right)x^2\right\}},$$

$$f = \frac{e^{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{e_1}},$$

$$272.\quad a = f.\left\{\Phi\left(\frac{\omega}{2n+1}\right).\Phi\left(\frac{2\omega}{2n+1}\right)\ldots.\Phi\left(\frac{n\omega}{2n+1}\right)\right\}^2(-1)^n$$

ou bien

$$273.\quad a = \left\{\frac{\Phi\left(\frac{\omega}{2n+1}\right).\Phi\left(\frac{2\omega}{2n+1}\right)\ldots.\Phi\left(\frac{n\omega}{2n+1}\right)}{\Phi\left(\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{\omega}{2}\right).\Phi\left(\frac{3}{2n+1}\cdot\frac{\omega}{2}\right)\ldots.\Phi\left(\frac{2n-1}{2n+1}\cdot\frac{\omega}{2}\right)}\right\}^2.(-1)^n.$$

Si l'on suppose e moindre que l'unité ou égale à l'unité, e_1 sera toujours moindre que e, et lorsque $2n+1$ est un très grand nombre, e_1 sera extrêmement petit.

48.

Le signe du second membre de l'équation 270. dépend de la grandeur de x.

Il pourra être jugé aisement comme il suit. On a par ce qui précède

$$\sqrt{[(1-y^2)(1+e_1^2y^2)]} = \pm\frac{tt_1ss_1}{\varrho^2}\sqrt{[(1-x^2)(1+e^2x^2)]}.$$

En supposant x réel, ϱ^2 sera toujours fini et positif, de même que $\sqrt{(1+e_1^2y^2)}$ et $\sqrt{(1+e^2x^2)}$. Donc le signe du second membre de l'équation est le même que celui de la quantité

$$tt_1ss_1\sqrt{\left(\frac{1-x^2}{1-y^2}\right)};$$

maintenant on a

$$ss_1 = \left(1-\frac{x^2}{\varphi^2\left(\frac{\varpi}{2}i+\alpha\right)}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{x^2}{\varphi^2\left(\frac{\varpi}{2}i+n\alpha\right)}\right);$$

$$\text{or } \Phi\left(\frac{\varpi}{2}i+\alpha\right) = \frac{i}{e}\cdot\frac{F\alpha}{f\alpha} \text{ etc.},$$

donc

$$ss_1 = \left\{1+\left(\frac{f\alpha.x}{e.F\alpha}\right)^2\right\}\ldots\ldots\left\{1+\left(\frac{fn\alpha.x}{e.Fn\alpha}\right)^2\right\},$$

donc, en remarquant que α est réel dans le cas que nous considérons, on voit que $s.s_1$ sera toujours une quantité positive; or $t.t_1$ est réel, donc la quantité $\sqrt{\left(\frac{1-x^2}{1-y^2}\right)}$ sera positive égalément, et par conséquent le signe, dont il s'agit, sera le même, que celui de la quantité tt_1. Il n'est pas difficile de voir qu'en vertu de (248.) et en mettant pour α sa valeur $\frac{2m\omega}{2n+1}$, on aura

$$tt_1 = \left\{1-\frac{x^2}{\varphi^2\left(\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{\omega}{2}\right)}\right\}\left\{1-\frac{x^2}{\varphi^2\left(\frac{3}{2n+1}\cdot\frac{\omega}{2}\right)}\right\}\ldots\left\{1-\frac{x^2}{\varphi^2\left(\frac{2n-1}{2n+1}\cdot\frac{\omega}{2}\right)}\right\}$$

quantité qui est positive depuis $x=0$ jusqu'à $x=\Phi\left(\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{\omega}{2}\right)$, négative depuis $x=\Phi\left(\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{\omega}{2}\right)$ jusqu'à $x=\Phi\left(\frac{3}{2n+1}\cdot\frac{\omega}{2}\right)$, positive depuis $x=\Phi\left(\frac{3}{2n+1}\cdot\frac{\omega}{2}\right)$ jusqu'à $x=\Phi\left(\frac{5}{2n+1}\cdot\frac{\omega}{2}\right)$ etc. Si x est plus grand que l'unité, tt_1 aura toujours le même signe, savoir $(-1)^n$.

Donc, dans ce cas l'équation (270.) donnera, en intégrant et commençant l'intégrale par $x=1$:

$$274.\quad \int_1^y \frac{\partial y}{\sqrt{[(y^2-1)(1+e_1^2y^2)]}} = a.\int_1^x \frac{\partial x}{\sqrt{[(x^2-1)(1+e^2x^2)]}}.$$

Si la valeur de x est moindre que l'unité, on aura

$$275.\quad \int \frac{dy}{\sqrt{[(1-y^2)(1+e_1^2y^2)]}} = a\int \frac{dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1+e^2x^2)]}} + \text{Const.}$$

entre les limites

$$x = \Phi\left(\frac{4m-1}{2n+1}\cdot\frac{\omega}{2}\right) \text{ et } x = \Phi\left(\frac{4m+1}{2n+1}\cdot\frac{\omega}{2}\right)$$

et

$$276.\quad -\int \frac{\partial y}{\sqrt{[(1-y^2)(1+e_1^2y^2)]}} = a\int \frac{\partial x}{\sqrt{[(1-x^2)(1+e^2x^2)]}} + \text{Const.}$$

entre les limites $x=\Phi\left(\frac{4m+1}{2n+1}\cdot\frac{\omega}{2}\right)$ et $x=\Phi\left(\frac{4m+3}{2n+1}\cdot\frac{\omega}{2}\right.$.

Si p. ex. on suppose x renfermé entre les limites

$$-\Phi\left(\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{\omega}{2}\right) \text{ et } +\Phi\left(\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{\omega}{2}\right)$$

on aura, en intégrant et commençant l'intégrale par $x=0$,

$$277.\quad \int_0^y \frac{\partial y}{\sqrt{[(1-y^2)(1+e_1^2y^2)]}} = a\int_0^x \frac{\partial x}{\sqrt{[(1-x^2)(1+e^2x^2)]}}.$$

En faisant $x=\Phi\left(\frac{\omega}{(2n+1).2}\right)$, on aura $y=(-1)^n$, et par suite:

$$\int_0^1 \frac{\partial y}{\sqrt{[(1-y^2)(1+e_1^2y^2)]}} = \frac{a.\omega}{2(2n+1)}(-1)^n,$$

d'où

$$278.\quad (-1)^n.a = \frac{4n+2}{\omega}\int_0^1 \frac{\partial y}{\sqrt{[(1-y^2)(1+e_1^2y^2)]}}.$$

Cette expression de a est très commode pour le calcul. En négligeant les quantités de l'ordre e_1^2, on obtiendra

$$279.\quad (-1)^n.a = (2n+1).\frac{\pi}{\omega}.$$

En substituant et négligeant toujours e_1^2 la formule (277.) donnera

$$280.\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^x \frac{\partial x}{\sqrt{[(1-x^2)(1+e^2x^2)]}} = \frac{\omega}{(2n+1)\pi}.\text{arc. sin.}(y), \\ \displaystyle y = (2n+1)\frac{\pi}{\omega}.x\,\frac{\left\{1-\frac{x^2}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2n+1}\right)}\right\}\ldots\ldots\left\{1-\frac{x^2}{\varphi^2\left(\frac{n\omega}{2n+1}\right)}\right\}}{\left\{1+e^2\varphi^2\left(\frac{\omega}{2n+1}\right)x^2\right\}\ldots\ldots\left\{1+e^2\varphi^2\left(\frac{n\omega}{2n+1}\right)x^2\right\}}. \end{cases}$$

B. Dans le cas $\alpha=\frac{2\mu\varpi i}{2n+1}$, on trouvera de la même manière la formule suivante

$$281.\quad \int_0^x \frac{\partial x}{\sqrt{[(1-x^2)(1+e^2x^2)]}} = a'.\int_0^y \frac{\partial y}{\sqrt{[(1-y^2)(1+e_1^2y^2)]}},$$

où

$$e_1 = \frac{1}{e^{2n-1}.\left\{\varphi\left(\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{\varpi i}{2}\right)\varphi\left(\frac{3}{2n+1}\cdot\frac{\varpi i}{2}\right)\ldots\varphi\left(\frac{2n-1}{2n+1}\cdot\frac{\varpi i}{2}\right)\right\}^4},$$

$$a' = \frac{1}{e^n\left\{\varphi\left(\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{\varpi}{2}i\right).\varphi\left(\frac{2}{2n+1}\cdot\frac{\varpi}{2}i\right)\varphi\left(\frac{3}{2n+1}\cdot\frac{\varpi}{2}i\right)\ldots\ldots\varphi\left(\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{\varpi}{2}i\right)\right\}},$$

$$y = \frac{e^{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{e_1}}.x\,\frac{\left\{x^2-\varphi^2\left(\frac{\varpi i}{2n+1}\right)\right\}\left\{x^2-\varphi^2\left(\frac{2\varpi i}{2n+1}\right)\right\}\ldots\ldots\left\{x^2-\varphi^2\left(\frac{n\varpi i}{2n+1}\right)\right\}}{\left\{1+e^2\varphi^2\left(\frac{\varpi i}{2n+1}\right)x^2\right\}\left\{1+e^2\varphi^2\left(\frac{2\varpi i}{2n+1}\right)x^2\right\}\ldots\ldots\left\{1+e^2\varphi^2\left(\frac{n\varpi i}{2n+1}\right).x^2\right\}},$$

La formule précédente a lieu pour toutes les valeurs de x moindres que l'unité.

49.

Pour avoir une théorie complète de la transformation des fonctions elliptiques, il faudroit connoître toutes les transformations possibles; or je suis parvenu à démontrer, qu'on les obtient toutes en combinant celle de M. Legendre avec celles, contenues dans la formule ci-dessus, même en cherchant la relation la plus générale entre un nombre quelconque de fonctions elliptiques.

Ce théorème dont les conséquences embrassent presque toute la théorie des fonctions elliptiques, m'a conduit à un très grand nombre de belles proprietés de ces fonctions.

§. X.

Sur l'intégration de l'équation separée

$$\frac{\partial y}{\sqrt{[(1-y^2)(1+\mu y^2)]}} = a.\frac{\partial x}{\sqrt{[(1-x^2)(1+\mu x^2)]}}.$$

50.

On peut toujours comme on sait présenter l'intégrale complète de cette équation sous une forme algébrique, lorsque la quantité constante a est un nombre rationel, quelle que soit d'ailleurs la valeur réelle ou imaginaire de μ. Mais si a n'est pas un nombre rationel, cela n'a pas lieu. A cet égard je suis parvenu aux théorèmes suivans:

Théorème I. En supposant a réel, et l'équation intégrable algébriquement, il faut nécessairement que a soit un nombre rationel.

Théorème II. En supposant a imaginaire, et l'équation intégrable algébriquement, il faut nécessairement que a soit de la forme $m \pm \sqrt{-1}.\sqrt{n}$, où m et n sont des nombres rationels. Dans ce cas la quantité μ n'est pas arbitraire; il faut qu'elle satisfasse à une équation qui a une infinité de racines réelles et imaginaires. Chaque valeur de μ satisfait à la question.

La démonstration de ces théorèmes fait partie d'une théorie très étendue des fonctions elliptiques, dont je m'occupe actuellement, et qui paroitra aussitôt qu'il me sera possible. Je me borne ici à considerer un cas particulier, qu'on peut tirer des formules du paragraphe précédent.

Si dans la formule (270.) on pose

$$e_1 = \frac{1}{e},$$

et xi à la place de x, il viendra

$$282.\quad \frac{\partial y}{\sqrt{[(1-y^2)(1+e^2y^2)]}} = a\sqrt{-1}\cdot\frac{\partial x}{\sqrt{[(1-x^2)(1+e^2x^2)]}}.$$

où

$$283.\quad y = \pm\sqrt{-1}.e^{n+1}.x\frac{\left\{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2n+1}\right)-x^2\right\}.....\left\{\varphi^2\left(\frac{n\omega}{2n+1}\right)-x^2\right\}}{\left\{1+e^2\varphi^2\left(\frac{\omega}{2n+1}\right)-x^2\right\}.....\left\{1+e^2\varphi\left(\frac{n\omega}{2n+1}\right)x^2\right\}}$$

φ est déterminé par l'équation (269′.) qui deviendra

$$284.\quad \begin{cases} 1 = e^{n+1}.\left\{\varphi\left(\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{\omega}{2}\right).....\varphi\left(\frac{2n-1}{2n+1}\cdot\frac{\omega}{2}\right)\right\}^2 \\ \text{et } a \text{ par:} \\ a = \left\{\frac{\varphi\left(\frac{\omega}{2n+1}\right).....\varphi\left(\frac{n\omega}{2n+1}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{\omega}{2}\right).....\varphi\left(\frac{2n-1}{2n+1}\cdot\frac{\omega}{2}\right)}\right\}^2\cdot\frac{1}{e}. \end{cases}$$

Donc on connoit une intégrale particulière de l'équation (282.) et par conséquent on en pourra trouver l'intégrale complète.

Dans le cas que nous considérons, la valeur de a est $\sqrt{(2n+1)}$; ce qu'on démontrera aisément comme il suit:

En mettant dans l'équation (282.) $y = z\sqrt{-1}$, et intégrant entre les limites zéro et $\varphi\left(\frac{\omega}{4n+2}\right)$, il viendra

$$\frac{\varpi}{2} = \int_0^{\frac{1}{e}}\frac{\partial z}{\sqrt{[(1+z^2)(1-e^2z^2)]}} = a\cdot\frac{\omega}{4n+2},$$

en remarquant que les limites de z seront zéro et $\frac{1}{e}$. En faisant de même $x = z\sqrt{-1}$, et intégrant entre les limites zéro et $\frac{1}{e}$, on trouvera que les limites de y seront zéro et l'unité et par conséquent

$$\int_0^1\frac{\partial y}{\sqrt{[(1-y^2)(1+e^2y^2)]}} = \frac{\omega}{2} = a.\int_0^{\frac{1}{e}}\frac{\partial z}{\sqrt{[(1+z^2)(1-e^2z^2)]}} = a\cdot\frac{\varpi}{2}.$$

Donc on a

$$\frac{\varpi}{2} = \frac{a}{2n+1}\cdot\frac{\omega}{2}$$

et

$$\frac{\omega}{2} = a\cdot\frac{\varpi}{2},$$

d'où l'on tire

$$285.\quad a = \sqrt{(2n+1)},$$

$$286.\quad \frac{\omega}{\varpi} = \sqrt{(2n+1)}.$$

Donc l'équation différentielle deviendra:

$$287. \quad \frac{\partial y}{\sqrt{[(1-y^2)(1+e^2y^2)]}} = \sqrt{-1}.\sqrt{(2n+1)}.\frac{\partial x}{\sqrt{[(1-x^2)(1+e^2x^2)]}}.$$

51.

Pour donner un exemple, considérons le cas où $n=1$ et $n=2$.

A. Si $n=1$, on aura:

$$\frac{\partial y}{\sqrt{[(1-y^2)(1+e^2y^2)]}} = \sqrt{-3}.\frac{\partial x}{\sqrt{[(1-x^2)(1+e^2x^2)]}},$$

$$y = \sqrt{-1}.e.x.\frac{\varphi^2\left(\frac{\omega}{3}\right)-x^2}{1+e^2.\varphi^2\left(\frac{\omega}{3}\right).x^2}.$$

e est déterminé par l'équation:

$$1 = e^2\left\{\varphi\left(\frac{1}{3}.\frac{\omega}{2}\right)\right\}^2.$$

On a

$$\varphi\left(\frac{\omega}{3}\right) = \varphi\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\omega}{3}\right) = \varphi\left(\frac{\omega}{2}\right).\frac{f\left(\frac{\omega}{3}\right)}{F\left(\frac{\omega}{3}\right)} = \frac{\sqrt{\left[1-\varphi^2\left(\frac{\omega}{3}\right)\right]}}{\sqrt{\left[1+e^2\varphi^2\left(\frac{\omega}{3}\right)\right]}},$$

donc

$$1 = e^2.\frac{1-\varphi^2\left(\frac{\omega}{3}\right)}{1+e^2\varphi^2\left(\frac{\omega}{3}\right)} = \frac{e^2-e^2\varphi^2\left(\frac{\omega}{3}\right)}{1+e^2\varphi^2\left(\frac{\omega}{3}\right)}.$$

Maintenant on trouvera en combinant les deux équations et remettant pour a sa valeur $\sqrt{3}$:

$$\sqrt{3} = e.\varphi^2\left(\frac{\omega}{3}\right),$$

donc

$$\varphi^2\left(\frac{\omega}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{e},$$

et par suite

$$1 = \frac{e^2-e\sqrt{3}}{1+e\sqrt{3}},$$

de là

$$e^2-2\sqrt{3}.e = 1$$

et

$$e = \sqrt{3}+2.$$

Ayant trouvé e, on aura

$$\varphi^2\left(\frac{\omega}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}-3.$$

Donc on aura l'équation différentielle:

$$288. \quad \frac{\partial y}{\sqrt{[(1-y^2)(1+(2+\sqrt{3})^2y^2)]}} = \sqrt{-3}.\frac{\partial x}{\sqrt{[(1-x^2)(1+(2+\sqrt{3})^2x^2)]}},$$

qui sera satisfaite par l'intégrale algébrique:

$$y = \sqrt{-1}\,.\,x\,\frac{\sqrt{3}-(2+\sqrt{3})\,.\,x^2}{1+\sqrt{3}\,(2+\sqrt{3})\,.\,x^2}.$$

Si l'on pose $x\sqrt{(2-\sqrt{3})}$ au lieu de x, et $y\sqrt{(2-\sqrt{3})}.\sqrt{-1}$ au lieu de y, on obtiendra l'équation:

$$289.\quad \frac{\partial y}{\sqrt{[(1-2\sqrt{3}\,.\,y^2-y^4)]}} = \sqrt{3}\,.\,\frac{\partial x}{\sqrt{[(1+2\sqrt{3}\,.\,x^2-x^4)]}},$$

qui sera satisfaite par

$$y = x\,.\,\frac{\sqrt{3}-x^2}{1+\sqrt{3}\,.\,x^2}.$$

B. Si $n = 2$, on aura l'équation différentielle

$$\frac{\partial y}{\sqrt{[(1-y^2)\,(1+e^2\,y^2)]}} = \sqrt{-5}\,.\,\frac{\partial x}{\sqrt{[(1-x^2)\,(1+e^2\,x^2)]}},$$

où

$$y = \sqrt{-1}\,.\,e^2\,.\,x\,\frac{\varphi^2\left(\frac{\omega}{5}\right)-x^2}{1+e^2\,.\,\varphi^2\left(\frac{\omega}{5}\right).x^2}\,.\,\frac{\varphi^2\left(\frac{2\,\omega}{5}\right)-x^2}{1+e^2\,.\,\varphi^2\left(\frac{2\,\omega}{5}\right).x^2},$$

$$290.\quad 1 = e^3\,.\,\varphi^2\left(\frac{\omega}{10}\right).\varphi^2\left(\frac{3\,\omega}{10}\right);\quad \sqrt{5} = e^2\varphi^2\left(\frac{\omega}{5}\right).\varphi^2\left(\frac{2\,\omega}{5}\right).$$

On a

$$291.\quad \begin{cases} \varphi^2\left(\frac{\omega}{10}\right) = \varphi^2\left(\frac{\omega}{2}-\frac{2\,\omega}{5}\right) = \dfrac{f^2\left(\frac{2\,\omega}{5}\right)}{F^2\left(\frac{2\,\omega}{5}\right)}, \\ \varphi^2\left(\frac{3\,\omega}{10}\right) = \varphi^2\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\omega}{5}\right) = \dfrac{f^2\left(\frac{\omega}{5}\right)}{F^2\left(\frac{\omega}{5}\right)}, \end{cases}$$

$$\frac{f\left(\frac{2\,\omega}{5}+\frac{\omega}{5}\right)}{F\left(\frac{2\,\omega}{5}+\frac{\omega}{5}\right)} = \frac{f\left(\frac{3\,\omega}{5}\right)}{F\left(\frac{3\,\omega}{5}\right)} = \frac{f\left(\frac{2\,\omega}{5}\right).f\left(\frac{\omega}{5}\right)-\varphi\left(\frac{2\,\omega}{5}\right)\varphi\left(\frac{\omega}{5}\right)F\left(\frac{2\,\omega}{5}\right)F\left(\frac{\omega}{5}\right)}{F\left(\frac{2\,\omega}{5}\right).F\left(\frac{\omega}{5}\right)+e^2\varphi\left(\frac{2\,\omega}{5}\right)\varphi\left(\frac{\omega}{5}\right)f\left(\frac{2\,\omega}{5}\right)f\left(\frac{\omega}{5}\right)},$$

$$\frac{f\left(\frac{2\,\omega}{5}-\frac{\omega}{5}\right)}{F\left(\frac{2\,\omega}{5}-\frac{\omega}{5}\right)} = \frac{f\left(\frac{\omega}{5}\right)}{F\left(\frac{\omega}{5}\right)} = \frac{f\left(\frac{2\,\omega}{5}\right)f\left(\frac{\omega}{5}\right)+\varphi\left(\frac{2\,\omega}{5}\right)\varphi\left(\frac{\omega}{5}\right).F\left(\frac{2\,\omega}{5}\right)F\left(\frac{\omega}{5}\right)}{F\left(\frac{2\,\omega}{5}\right)f\left(\frac{\omega}{5}\right)-e^2\varphi\left(\frac{2\,\omega}{5}\right)\varphi\left(\frac{\omega}{5}\right)f\left(\frac{2\,\omega}{5}\right)F\left(\frac{\omega}{5}\right)},$$

En multipliant ces valeurs de $\dfrac{f\left(\frac{3\,\omega}{5}\right)}{F\left(\frac{3\,\omega}{5}\right)}$ et $\dfrac{f\left(\frac{\omega}{5}\right)}{F\left(\frac{\omega}{5}\right)}$ entre elles, et remarquant que

$$f\left(\frac{3\,\omega}{5}\right) = f\left(\frac{2\,\omega}{5}\right),$$

$$F\left(\frac{3\,\omega}{5}\right) = F\left(\frac{2\,\omega}{5}\right),$$

on obtiendra

$$P = \frac{P^2 - \varphi^2\left(\frac{\omega}{5}\right)\varphi^2\left(\frac{2\omega}{5}\right)}{1 - e^4.\varphi^2\left(\frac{\omega}{5}\right).\varphi^2\left(\frac{2\omega}{5}\right).P^2},$$

où l'on a fait pour abréger

$$P = \frac{f\left(\frac{2\omega}{5}\right).f\left(\frac{\omega}{5}\right)}{F\left(\frac{2\omega}{5}\right).F\left(\frac{\omega}{5}\right)}.$$

Celà posé, les équations (290., 291.) donneront

$$1 = e^3.P^2, \quad \varphi^2\left(\frac{\omega}{5}\right).\varphi^2\left(\frac{2\omega}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}}{e^2},$$

donc, en substituant

$$\frac{1}{e\sqrt{e}} = \frac{\frac{1}{e^3} - \frac{\sqrt{5}}{e^2}}{1 - \frac{\sqrt{5}}{e}} = \frac{1}{e^2}.\frac{1 - e\sqrt{5}}{e - \sqrt{5}},$$

et de là

$$\sqrt{e} = \frac{1 - e\sqrt{5}}{e - \sqrt{5}},$$

$$e^3 - 1 - (5 + 2\sqrt{5})e(e - 1) = 0.$$

Les racines de cette équation sont

$$e = 1, \quad e = 2\sqrt{5} - 2\sqrt{(2 + \sqrt{5})}, \quad e = 2 + \sqrt{5} + 2\sqrt{(2 + \sqrt{5})}.$$

La dernière de ces racines

$$e = 2 + \sqrt{5} + 2\sqrt{(2 + \sqrt{5})} = \left[\frac{\sqrt{5} + 1}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2}\right)}\right]^2$$

répond à la question, car l'équation

$$1 = e^3.\varphi^2\left(\frac{\omega}{10}\right).\varphi^2\left(\frac{3\omega}{10}\right)$$

fait voir que e doit être plus grand que l'unité. Connoissant e, on trouve la valeur des quantités $\varphi\left(\frac{\omega}{5}\right)$ et $\varphi\left(\frac{2\omega}{5}\right)$ comme il suit:

Nous avons

$$1 = e^3.P^2 = e^3.\frac{f^2\left(\frac{\omega}{5}\right)f^2\left(\frac{2\omega}{5}\right)}{F^2\left(\frac{\omega}{5}\right)F^2\left(\frac{2\omega}{5}\right)};$$

or en faisant $\varphi\left(\frac{\omega}{5}\right) = \alpha$ et $\varphi\left(\frac{2\omega}{5}\right) = \beta$, on aura

$$f^2\left(\frac{\omega}{5}\right) = 1 - \alpha^2; \quad f^2\left(\frac{2\omega}{5}\right) = 1 - \beta^2,$$

$$F^2\left(\frac{\omega}{5}\right) = 1 + e^2\alpha^2; \quad F^2\left(\frac{2\omega}{5}\right) = 1 + e^2\beta^2,$$

donc:

$$(1+e^2\alpha^2)(1+e^2\beta^2) = e^3(1-\alpha^2)(1-\beta^2),$$
$$1+e^2(\alpha^2+\beta^2)+e^4\alpha^2\beta^2 = e^3-e^3(\alpha^2+\beta^2)+e^3\alpha^2\beta^2,$$
$$e^3-1-e^3(e-1).\alpha^2\beta^2 = e^2(e+1).(\alpha^2+\beta^2);$$

or nous avons trouvé plus haut $\alpha^2\beta^2 = \frac{\sqrt{5}}{e^2}$, donc:

$$e^3-1-e(e-1)\sqrt{5} = e^2(e+1)\{\alpha^2+\beta^2\}.$$

Donc on connoit $\alpha^2.\beta^2$ et $\alpha^2+\beta^2$ et par suite α^2 et β^2 par la résolution d'une équation du second degré. On a donc aussi la valeur de y, qui satisfait à l'équation:

$$292.\quad \frac{\partial y}{\sqrt{[(1-y^2)(1+(2+\sqrt{5}+2\sqrt{(2+\sqrt{5})})^2.y^2)]}} = \sqrt{-5}\cdot\frac{\partial x}{\sqrt{[(1-x^2)(1+(2+\sqrt{5}+2\sqrt{(2+\sqrt{5})})^2.x^2)]}}.$$

Si l'on pose $\frac{x}{\sqrt{e}}$ au lieu de x, et $\frac{y\sqrt{-1}}{\sqrt{e}}$ au lieu de y, on obtiendra l'équation

$$293.\quad \frac{\partial y}{\sqrt{[1-4\sqrt{(2+\sqrt{5})}.y^2-y^4]}} = \sqrt{5}\cdot\frac{\partial x}{\sqrt{[1+4\sqrt{(2+\sqrt{5})}.x^2-x^4]}},$$

où

$$y = x.\frac{\sqrt{5}-\sqrt{(10+2\sqrt{5})}.x^2+x^4}{1+\sqrt{(10+2\sqrt{5})}.x^2+x^4}.$$

52.

Dans les deux cas que nous venons de considerer, il n'étoit pas difficile de trouver la valeur de la quantité e, mais la valeur de n étant plus grande, on parviendra à des équations algébriques, qui peut être ne seront pas resolubles algébriquement.

Néanmoins on peut dans tous les cas exprimer la valeur de e par des séries, et comme leur forme est très remarquable, je vais les rapporter ici:

En faisant dans la formule (206.) du VIIme §. $\alpha = 1$, on aura, en remarquant que $c = 1$, $\varphi\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1}{c}$,

$$e\omega = 4\pi\left\{\frac{\varrho^2}{\varrho^2+1}+\frac{\varrho^3}{\varrho^6+1}+\frac{\varrho^5}{\varrho^{10}+1}+\ldots\right\},$$

où

$$\varrho = h^{\frac{\varpi}{\omega}\cdot\frac{\pi}{2}}.$$

En faisant de même dans la formule (204.): $\alpha = \frac{\varpi}{2}i$, on aura $\varphi\left(\frac{\varpi}{2}i\right) = \frac{i}{c}$; $\varepsilon = h^{\frac{\pi}{2}i} = \cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2} = i$, donc

$$\frac{i}{e} = \frac{2}{e}\cdot\frac{\pi}{\varpi}\cdot\left\{\frac{i-\frac{1}{i}}{r-r^{-1}} - \frac{i^3-i^{-3}}{r^3-r^{-3}} + \ldots\right\},$$

c'est-à-dire

$$\varpi = 4\pi\cdot\left\{\frac{r}{r^2+1} + \frac{r^3}{r^6+1} + \frac{r^5}{r^{10}+1} + \ldots\right\},$$

où

$$\mathrm{r} = h^{\frac{\omega}{\varpi}\cdot\frac{\pi}{2}}.$$

Maintenant dans le cas que nous considérons, on a

$$\frac{\omega}{\varpi} = \sqrt{(2n+1)},$$

et par conséquent

$$292.\quad \omega = 4\pi\sqrt{(2n+1)}\cdot\left\{\frac{h^{\frac{\pi}{2}\sqrt{(2n+1)}}}{h^{\pi\sqrt{(2n+1)}}+1} + \frac{h^{\frac{3\pi}{2}\sqrt{(2n+1)}}}{h^{3\pi\sqrt{(2n+1)}}+1} + \ldots\right\}.$$

Cette formule donne la valeur de

$$\omega = \int_0^1 \frac{\partial x}{\sqrt{[(1-x^2)(1+e^2x^2)]}}.$$

Ensuite on aura la valeur de e par la formule qui, en substituant pour ϱ sa valeur $h^{\frac{\varpi}{\omega}\cdot\frac{\pi}{2}} = h^{\frac{1}{\sqrt{(2n+1)}}\cdot\frac{\pi}{2}}$, donne

$$293.\quad e = \frac{4\pi}{\omega}\left\{\frac{h^{\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{(2n+1)}}}}{h^{\frac{\pi}{\sqrt{(2n+1)}}}+1} + \frac{h^{\frac{3\pi}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{(2n+1)}}}}{h^{\frac{3\pi}{\sqrt{(2n+1)}}}+1} + \ldots\right\}.$$

h est le nombre 2,7182818....

Addition au mémoire précédent.

Ayant terminé le mémoire précédent sur les fonctions elliptiques, une note sur les mêmes fonctions par Mr. C. G. T. Jacobi, inserée dans le No. 123. année 1827. du recueil de Mr. Schumacher, qui a pour titre „*Astronomische Nachrichten*," m'est venu sous les yeux. Mr. Jacobi donne le théorème suivant:

Soit p un nombre impair et θ un angle tel qu'on ait, en désignant l'intégrale $\int\frac{\partial\theta}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\theta)}}$ prise de 0 jusqu'à θ, par $F(k,\theta)$:

$$F(k,\theta') = \frac{1}{p}.F(k,90^\circ);$$

et en général $\theta^{(m)}$ un angle tel, qu'on ait

$$F(k, \theta^{(m)}) = \frac{m}{p} . F(k, 90^0):$$

soit déterminé encore l'angle ψ par l'équation

$$\text{tang}\,(45^\circ - \tfrac{1}{2}\psi) = \frac{\text{tang}\,\frac{1}{2}(\theta' - \theta)}{\text{tang}\,\frac{1}{2}(\theta' + \theta)} \cdot \frac{\text{tang}\,\frac{1}{2}(\theta''' + \theta)}{\text{tang}\,\frac{1}{2}(\theta''' - \theta)} \cdots \frac{\text{tang}\,\frac{1}{2}(\theta^{(p-2)} \pm \theta)}{\text{tang}\,\frac{1}{2}(\theta^{(p-2)} \mp \theta)} \text{tang}\,(45^\circ \mp \tfrac{1}{2}\theta),$$

on aura:

$$F(k, \theta) = \mu . F(\lambda, \psi).$$

Il faut admettre le signe supérieur si p est de la forme $4n+1$, et le signe inférieur, si p est de la forme $4n-1$. ψ doit être pris entre $\frac{m}{2}\pi$ et $\frac{m+1}{2}\pi$, si θ tombe entre $\theta^{(m)}$ et $\theta^{(m+1)}$. Les constantes μ et λ se déterminent de différentes manières. On a p. ex.

$$\mu = \frac{1}{2(\text{cosec}\,\theta' - \text{cosec}\,\theta''' + \ldots \mp \cos\theta^{(p-2)} \pm \frac{1}{2})},$$

$$\lambda = 2k\mu(\sin\theta' - \sin\theta''' + \ldots \mp \sin\theta^{(p-2)} \pm \tfrac{1}{2}).$$

Ce théorème élégant, que M. Jacobi donne sans démonstration est contenu comme cas particulier dans la formule (227.) du mémoire précédent, et au fond il est le même que celui de la formule (270.)

Nous allons démontrer cela.

En faisant dans l'intégrale

$$\alpha = \int_0^x \frac{\partial x}{\sqrt{[(1-x^2)(1-k^2x^2)]}};$$

$$x = \sin\theta,$$

on aura

$$\alpha = \int_0^\theta \frac{\partial\theta}{\sqrt{[(1-k^2\sin^2\theta)]}},$$

mais

$$x = \varphi\alpha,$$

donc:

$$\alpha = F(k, \theta) \text{ donne } \sin\theta = \varphi\alpha.$$

Si $\theta = 90^\circ$, on a $x = 1$, donc

$$\frac{\omega}{2} = F(k, 90^\circ).$$

Donc en faisant $\theta = \theta^{(m)}$, on aura

$$F(k, \theta^{(m)}) = \frac{m}{p} . \frac{\omega}{2} \text{ et } \sin\theta^{(m)} = \varphi\left(\frac{m}{p} . \frac{\omega}{2}\right).$$

Cela posé, faisons dans (269'. et 270.):

$$e_1^2 = -\lambda^2, \quad e^2 = -k^2, \quad \mu = \frac{(-1)^n}{a},$$

$$x = (-1)^n . \sin\theta, \quad y = \sin\psi, \quad 2n+1 = p,$$

il viendra:

$$(1.)\quad \int \frac{\partial\theta}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\theta)}} = \pm\mu\int \frac{\partial\psi}{\sqrt{(1-\lambda^2.\sin^2\psi)}} + C,$$

où les quantités μ, λ, ψ sont déterminés par les équations

$$\lambda = k^{2n+1}.\{\sin\theta'.\sin\theta''.....\sin\theta^{(2n-1)}\}^2,$$

$$\mu = \left\{\frac{\sin\theta'\sin\theta'''.....\sin\theta^{(2n-1)}}{\sin\theta''\sin\theta^{IV}.....\sin\theta^{(2n)}}\right\}^2,$$

$$\sin\psi = \frac{k^{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\lambda}}.\sin\theta\,\frac{\{\sin^2\theta''-\sin^2\theta\}\{\sin^2\theta^{IV}-\sin^2\theta\}....\{\sin^2\theta^{(2n)}-\sin^2\theta\}}{\{1-k^2\sin^2\theta'\sin^2\theta\}\{1-k^2\sin^2\theta^{IV}\sin^2\theta\}....\{1-k^2\sin^2\theta^{(2n)}\sin^2\theta\}}.$$

Nous supposons k moindre que l'unité, car dans le cas contraire ω sera une quantité imaginaire.

Celà posé, considérons les équations 249. En remarquant que $c_1 = c = 1$, on en tire

$$\sqrt{\left(\frac{1-y}{1+y}\right)} = \frac{t}{t_1}.\sqrt{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)},$$

où

$$\frac{t}{t_1} = \frac{\varphi\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right)-x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right)+x}.\frac{\varphi\left(\frac{\omega}{2}+2\alpha\right)-x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2}+2\alpha\right)+x}....\frac{\varphi\left(\frac{\omega}{2}+n\alpha\right)-x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2}+n\alpha\right)+x},$$

c'est-à-dire en faisant $\alpha = \frac{2m\alpha}{2n+1}$ et $m = -1$:

$$\frac{t}{t_1} = \frac{\varphi\left(\frac{2n-1}{2n+1}.\frac{\omega}{2}\right)+x}{\varphi\left(\frac{2n-1}{2n+1}.\frac{\omega}{2}\right)-x}.\frac{\varphi\left(\frac{2n-3}{2n+1}.\frac{\omega}{2}\right)-x}{\varphi\left(\frac{2n-3}{2n+1}.\frac{\omega}{2}\right)+x}....\frac{(-1)^n.\varphi\left(\frac{1}{2n+1}.\frac{\omega}{2}\right)-x}{(-1)^n.\varphi\left(\frac{1}{2n+1}.\frac{\omega}{2}\right)+x}.$$

Maintenant on a

$$x = (-1)^n.\sin\theta,\quad \text{et}\quad \varphi\left(\frac{m}{2n+1}.\frac{\omega}{2}\right) = \sin\theta^{(m)},$$

donc en substituant:

$$\sqrt{\left(\frac{1-\sin\psi}{1+\sin\psi}\right)} = \sqrt{\left(\frac{1-(-1)^n.\sin\theta}{1+(-1)^n.\sin\theta}\right)}.\frac{\sin\theta'-\sin\theta}{\sin\theta'+\sin\theta}.\frac{\sin\theta'''+\sin\theta}{\sin\theta'''-\sin\theta}....\frac{\sin\theta^{(2n-1)}+(-1)^n\sin\theta}{\sin\theta^{(2n-1)}-(-1)^n\sin\theta},$$

et de là

$$\operatorname{tang}(45°-\tfrac{1}{2}\psi) = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\theta'-\theta)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\theta+\theta)}.\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\theta'''+\theta)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\theta'''-\theta)}....\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\theta^{(2n-1)}+(-1)^n\theta}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\theta^{(2n-1)}-(-1)^n\theta}\operatorname{tang}[45°-(-1)^n\theta].$$

C'est précisément la formule de Mr. Jacobi.

Dans la formule (1.), on peut toujours supposer le second membre positif. En effet, en différentiant, on aura

$$\pm\partial\psi = \frac{\sqrt{(1-\lambda^2\sin^2\psi)}}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\theta)}}.\partial\theta.$$

En supposant θ toujours croissant, le second membre sera toujours positif. Donc en déterminant la valeur ψ de sorte qu'elle soit croissante et décroissante en même tems avec θ, on doit prendre le signe supérieur. On a donc

$$\int_0 \frac{\partial\theta}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\theta)}} = \mu\int_0 \frac{\partial\psi}{\sqrt{(1-\lambda^2\sin^2\psi)}},$$

ou bien

$$F(k,\theta) = \mu\,.\,F(\lambda,\psi).$$

De la remarque que ψ doit être croissant et décroissant en même tems avec θ, et en ayant égard à la formule, on tirera aisément la conséquence que ψ doit tomber entre $\frac{m}{2}\pi$ et $\frac{m+1}{2}\pi$, si θ tombe entre $\theta^{(m)}$ et $\theta^{(m+1)}$

Quant aux quantités λ et μ, il est évident qu'elles ont nécessairement les mêmes valeurs que celles de Mr. Jacobi. Mais les expressions que j'ai données seront plus commodes pour l'application, et font voir clairement que λ est extrèmement petit, si h est un peu grand. Au reste on peut sans difficulté démontrer leur identité à l'aide de la formule 257.

15.
Note sur la décomposition d'un nombre donné en quatre quarrés.

(Par Mr. *C. G. J. Jacobi*, prof. en phil. à Königsberg.)

Soit n un nombre impair quelconque, on sait que $4n$ peut être décomposé en quatre quarrés impairs.

S'il s'agit de tous les quatre nombres possibles a, b, c, d, tels que $a^2+b^2+c^2+d^2=4n$, une même décomposition en quatre quarrés différents entre eux, donnera $24=1.2.3.4$ manières de déterminer a, b, c, d. Si deux de ces quarrés sont égaux, ce nombre se réduit à $12=\frac{1.2.3.4}{1.2}$. Si encore les deux autres sont égaux, le nombre sera $6=\frac{1.2.3.4}{1.2.1.2}$, et il sera $4=\frac{1.2.3.4}{1.2.3}$, si trois des quatre quarrés sont égaux; enfin il sera 1, si les quarrés sont égaux tous les quatre.

Celà posé, je tire de la théorie des fonctions elliptiques le théorème suivant:

Soit n un nombre impair quelconque, si l'on peut trouver de m manières quatre nombres impairs a, b, c, d tels que $a^2+b^2+c^2+d^2=4n$, en ayant attention de compter une même solution autant de fois que les quatre quarrés peuvent être permutés entre eux, m sera égal à la somme des facteurs du nombre n. Donc si, par exemple, n est un nombre premier, on aura $m=n+1$.

Soit par exemple $n=15$, on a $4.15=60=1+1+3^2+7^2=5^2+5^2+1+3^2$. Puisque deux quarrés dans ces deux solutions sont égaux entre eux, on a $m=12+12=24$.

Ce théorème remarquable paroit être assez difficile à démontrer par les méthodes connues de la théorie des nombres. La démonstration fournie par la théorie des fonctions elliptiques est entièrement analytique.

1828. 24. Avril.

16.
Note sur les fonctions elliptiques.

(Par Mr. *C. G. J. Jacobi*, prof. en phil. à Königsberg. *))

(Extrait d'une lettre de l'auteur au rédacteur de ce journal sous le date de 2. Avril 1828.)

Je commence par rappeler ma notation dans la mémoire. Soit

$$\int_0^{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\sqrt{(1-k^2 \sin \varphi^2)}} = \mu,$$

je désigne l'amplitudo φ par $\varphi = am\,\mu$. Puis je suppose

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial \varphi}{\sqrt{(1-k^2 \sin \varphi^2)}} = K, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial \varphi}{\sqrt{(1-k'k' \sin \varphi^2)}} = K',$$

où $k^2 + k'^2 = 1$, k' étant le complément de k.

Celà posé si l'on fait $e^{\frac{-K'\pi}{K}} = q$, je trouve entre autres

1. $$\sin am \frac{2Kx}{\pi} = \frac{2}{\sqrt{k}} \cdot \frac{q^{\frac{1}{4}} \sin x - q^{\frac{9}{4}} \sin 3x + q^{\frac{25}{4}} \sin 5x - q^{\frac{49}{4}} \sin 7x + \text{cet.}}{1 - 2q \cos 2x + 2q^4 \cos 4x - 2q^9 \cos 6x + 2q^{16} \cos 8x - \text{cet.}}.$$

Voilà encore d'autres formules:

2. $$\cos am \frac{2Kx}{\pi} = 2\sqrt{\left(\frac{k'}{k}\right)} \cdot \frac{q^{\frac{1}{4}} \cos x + q^{\frac{9}{4}} \cos 3x + q^{\frac{25}{4}} \cos 5x + q^{\frac{49}{4}} \cos 7x + \text{cet.}}{1 - 2q \cos 2x + 2q^4 \cos 4x - 2q^8 \cos 6x + 2q^{16} \cos 8x - \text{cet.}},$$

3. $$\sqrt{\left(1 - k^2 \sin^2 am \frac{2Kx}{\pi}\right)} = \sqrt{(k')} \cdot \frac{1 + 2q \cos 2x + 2q^4 \cos 4x + 2q^9 \cos 6x + \text{cet.}}{1 - 2q \cos 2x + 2q^4 \cos 4x - 2q^9 \cos 6x + \text{cet.}},$$

4. $$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} am \frac{2Kx}{\pi} = \frac{\sin \frac{x}{2} + q \sin \frac{3x}{2} - q^3 \sin \frac{5x}{2} - q^6 \sin \frac{7x}{2} + q^{10} \sin \frac{9x}{2} - \text{ce.}}{\cos \frac{x}{2} - q \cos \frac{3x}{2} - q^3 \cos \frac{5x}{2} + q^6 \cos \frac{7x}{2} + q^{10} \cos \frac{9x}{2} - \text{cet.}},$$

---

*) J'ai lu dans le bulletin des sciences de Mr. le Baron de Ferussae, année 1828. cah. 3. page 162., qu'on attribue à trois Messieurs Jacobi, les articles inserés sous ce nom dans le présent journal. Il n'y en a que deux. Ce sont Mr. M. H. Jacobi à Potsdam, et Mr. J. G. Jacobi, docteur et professeur en philosophie à l'université de Königsberg dans la Prusse occidentale (il faut distinguer cette ville de celle du même nom dans le département de Francfort sur l'Oder, qui n'a pas d'université). Le premier de ces deux géomètres est l'auteur du mémoire No. 25. tome II. de ce journal, page 276. Tous les autres mémoires et notes dans ce journal qui portent le nom de Jacobi, ont pour auteur Monsieur le docteur et professeur J. G. Jacobi à Königsberg, qui est en même tems l'auteur des beaux travaux sur les fonctions elliptiques, insérés dans le journal de Mr. Schumacher et mentionnés si honorablement par Mr. Legendre. Je devoit cette notice au public et à Mr. Jacobi.

Note du redacteur.

Les exposans des coefficiens des trois premières formules sont les nombres quarrés, ceux de la dernière formule les nombres trigonaux. Donc les séries convergent si rapidement, que leur calcul est très aisé.

De $q = e^{-\frac{K'\pi}{k}}$ on tire les séries suivantes pour k et K:

$$\sqrt{\left(\frac{2K}{\pi}\right)} = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + 2q^{25} + \text{cet.}$$

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{k} = \frac{q^{\frac{1}{4}} + q^{\frac{9}{4}} + q^{\frac{25}{4}} + q^{\frac{49}{4}} + \text{cet.}}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + 2q^{25} + \text{cet.}}.$$

Je passe sous silence d'autres formules. Dans l'état actuel des choses on peut dire qu'une série soit sommée, si elle a été réduite aux fonctions elliptiques.

L'analyse se trouve extrèmement enrichie par là. Euler, par exemple, remarque dans son *introd.*, chapitre *de partitione numerorum* que le produit $(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)\ldots$ est égal à

$$1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - q^7 - q^{12} - q^{15} + q^{22} \ldots,$$

où les exposans sont les nombres pentagonaux, résultat qu'il a démontré dans les *acta petrop.*, qui m'a toujours paru très remarquable et qui étoit un fait isolé dans l'analyse. Cette série peut être sommée par les fonctions elliptiques. Si $q = e^{\frac{-K'\pi}{K}}$, je trouve

$$\sqrt[24]{\frac{k^2}{q}}\sqrt[3]{2k'}\sqrt{\frac{K}{\pi}}.$$

Il existe encore nombre de résultats semblables.

D'ici on peut jeter un beau coup d'oeil sur la théorie de la transformation. Je ferois voir dans un mémoire plus étendu, non encore fini à mon grand regret, qu'un module donné peut toujours être transformé en $n+1$ autres, au moyen d'une substitution qui se rapporte au nombre n, ce nombre étant premier (voyez ma première lettre à Mr. Schumacher, no. 123. de son journal d'astronomie). Je trouve ces $n+1$ modules et les expressions qui s'y rapportent, en mettant

$q^n,\ q^{\frac{1}{n}},\ \alpha q^{\frac{1}{n}},\ \alpha^2 q^{\frac{1}{n}},\ \alpha^3 q^{\frac{1}{n}},\ \ldots\ldots\ \alpha^{n-1} q^{\frac{1}{n}}$ au lieu de q, où $\alpha^n = 1$.

Deux seulement de ces modules sont réels. Ils sont

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{\lambda} = \frac{q^{\frac{n}{4}} + q^{\frac{9n}{4}} + q^{\frac{25n}{4}} + q^{\frac{49n}{4}} + \ldots}{1 + 2q^n + 2q^{4n} + 2q^{9n} + 2q^{16n} + \ldots}, \qquad \tfrac{1}{2}\sqrt{\lambda} = \frac{q^{\frac{1}{4n}} + q^{\frac{9}{4n}} + q^{\frac{25}{4n}} + q^{\frac{49}{4n}} + \ldots}{1 + 2q^{\frac{1}{n}} + 2q^{\frac{4}{n}} + 2q^{\frac{9}{n}} + 2q^{\frac{16}{n}} + \ldots},$$

où λ est le module transformé. Si n n'est pas premier, il y en a encore plusieurs.

Le résultat suivant entre autres me semble remarquable. Il existe toujours une équation différentielle du troisième ordre entre deux modules k et λ, tels qu'ils peuvent être transformés l'un dans l'autre. Voici cette équation:

$$3\left(\frac{\partial^2\lambda}{\partial k^2}\right)^2 - 2\frac{\partial\lambda}{\partial k}\cdot\frac{\partial^3\lambda}{\partial k^3} + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial k}\right)^2\left\{\left(\frac{1+k^2}{k-k^3}\right)^2 - \left(\frac{1+\lambda^2}{\lambda-\lambda^3}\right)\left(\frac{\partial\lambda}{\partial k}\right)^2\right\} = 0,$$

ou ∂k est constant. On voit que cette équation différentielle admet un nombre infini de solutions algébriques, savoir toutes les équations algébriques entre les modules qui se rapportent aux transformations de divers ordres. Mais ce ne sont que de solutions particulières. Ce sont les transcendantes elliptiques, qui offrent la solution générale. Si l'on suppose

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial\varphi}{\sqrt{(1-\lambda^2\sin\varphi^2)}} = A, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial\varphi}{\sqrt{(1-\lambda'^2\sin\varphi^2)}} = A',$$

où $\lambda^2+\lambda'^2=1$, comme ci dessus, on a

$$\frac{A'}{A} = \frac{mK+m'K'}{pk+p'k'},$$

ou m, m', p, p' sont des constantes arbitraires. Ces équations à modules qui d'après ce qui a été dit plus haut, s'élèvent au degré $n+1$, n étant un nombre premier, ont trois propriétés essentielles. Ils restent invariables

1) si l'on change k et λ,
2) en posant k' et λ' au lieu de k et λ,
3) en mettant $\frac{1}{k}$ et $\frac{1}{\lambda}$ au lieu de k et λ.

Il est d'ailleurs remarquable, qu'elles prennent la forme la plus simple pour la racine quatrième des modules. Si par exemple on met $\sqrt[4]{k}=u$, $\sqrt[4]{\lambda}=v$, on trouve

$$u^4-v^4-2uv(1-u^2v^2)=0, \text{ pour } n=3,$$
$$u^6-v^6+5u^2v^2(u^2-v^2)-4uv(1-u^4v^4=0, \text{ pour } n=5.$$

Donc il faut que ces équations satisfassent à l'équation différentielle rapportée ci-dessus.

J'ajoute encore une remarque.

Mr. Abel a proposé tome II. page 286. de ce journal le théorème suivant:

„Si l'équation différentielle séparée

$$\frac{a\,\partial x}{\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4)}} = \frac{\partial y}{\sqrt{(\alpha+\beta y+\gamma y^2+\delta y^3+\varepsilon y^4)}},$$

„où α, β, γ, δ, ε sont réelles, est algébriquement intégrable, il faut né-„cessairement, que la quantité a soit un nombre rationel."

On voit sans peine que ce théorème est semblable à celui de la trigonométrie analytique, savoir que n doit être un nombre rationel, si l'on veut que $\sin nx$ puisse être exprimé algébriquement par $\sin x$. Mais il faut étendre ce théorème beaucoup plus pour les fonctions elliptiques. Il existe un nombre infini d'échelles de modules pour lesquelles a peut aussi avoir la forme $a+b\sqrt{-1}$. Ce sont tous ceux, où le module par la transformation se change dans son complément. Un de ces modules p. ex. est $k=\sqrt{\frac{1}{2}}$. Cette nouvelle méthode de la multiplication est encore remarquable, parcequ'elle a lieu dans les cas, où la transformation rentre dans la multiplication, c'est-à-dire où le module transformé devient égal à celui d'où l'on est parti. Par exemple pour $n=5$, $k=\sqrt{\frac{1}{2}}$, $\mu=\sqrt[8]{\frac{1}{2}}$, on trouve que l'équation

$$u^6-v^6+5u^2v^2(u^2-v^2)-4uv(1-u^4v^4)=0$$

a la racine $v=(1+\sqrt{-1})u^5$, d'où l'on tire $v^8=\lambda^2=\frac{1}{2}$, de sorte qu'on a ici $\lambda^2=k^2$. Tout cela découle immédiatement des principes établis par Mr. Abel.

17.
Geometrische Sätze.

(Von Herrn *Th. Clausen* zu Altona.)

1.

„Aus einem beliebigen Puncte E (Fig. 2.) der Peripherie eines Kreises, der mit dem um ein Dreieck beschriebenen concentrisch ist, fälle man auf die 3 Seiten des Dreiecks die Senkrechten EA, EB, ED; das Verhältnifs der Dreiecke abc und ABD zu finden."

Es bedeute a, a' etc. die Länge der Bögen zwischen einem beliebigen Anfangspuncte und den mit den resp. Buchstaben bezeichneten Puncten. Der Halbmesser des um das Dreieck beschriebenen Kreises sei $= 1$; der Halbmesser des Kreises, worin der Punct E liegt, sei $= k$. Die aus dem Mittelpuncte des Kreises auf die Seiten des Dreiecks gefällten Senkrechten schneiden den äufsern Kreis in den Puncten a', b', c', so ist:

$$a' = \frac{a+b}{2}; \quad a = +a' - b' + c';$$

$$b' = \frac{b+c}{2}; \quad b = +a' + b' - c';$$

$$c' = \frac{c+a}{2}; \quad c = -a' + b' + c';$$

Der Inhalt des Dreiecks abc sei $= I$, so ist

$$I = \tfrac{1}{2}\{\sin(a-c) + \sin(b-a) + \sin(c-b)\},$$
$$I = \tfrac{1}{2}\{\sin 2(a'-b') + \sin 2(b'-c') + \sin 2(c'-a')\}.$$

Man sieht noch leicht, dafs:

$$EA = \cos(b-a') - k.\cos(d-a');$$
$$EB = \cos(c-b') - k.\cos(d-b');$$
$$EC = \cos(a-c') - k.\cos(d-c');$$

und dafs also der doppelte Inhalt des Dreiecks $ABD = 2i$, oder die Summe der doppelten Inhalte der Dreiecke AEB, BED, DEA

$$\begin{aligned} 2i = {} & \{\cos(b'-c') - k.\cos(d-a')\}.\{\cos(c'-a') - k.\cos(d-b')\}\sin(b'-a') \\ & + \{\cos(c'-a') - k.\cos(d-b')\}.\{\cos(a'-b') - k.\cos(d-c')\}\sin(c'-b') \\ & + \{\cos(a'-b') - k.\cos(d-c')\}.\{\cos(b'-c') - k.\cos(d-a')\}\sin(a'-c'), \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
2i = {} & \cos(b'-c')\cos(c'-a')\sin(b'-a') \\
& + \cos(c'-a')\cos(a'-b')\sin(c'-b') \\
& + \cos(a'-b')\cos(b'-c')\sin(a'-c') \\
& - k\left\{\begin{array}{l} \sin(b'-a')[\cos(d-a')\cos(c'-a') + \cos(d-b')\cos(b'-c')] \\ + \sin(c'-b')[\cos(d-b')\cos(a'-b') + \cos(d-c')\cos(c'-a')] \\ + \sin(a'-c')[\cos(d-c')\cos(b'-c') + \cos(d-a')\cos(a'-b')] \end{array}\right\} \\
& + k^2\left\{\begin{array}{l} \cos(d-a')\cos(d-b')\sin(b'-a') \\ + \cos(d-b')\cos(d-c')\sin(c'-b') \\ + \cos(d-c')\cos(d-a')\sin(a'-c') \end{array}\right\}
\end{aligned}
$$

und nach einer leichten Reduction:

$$
\begin{aligned}
2i = {} & \tfrac{1}{2}\{\cos(c'-a')\sin(c'-a') + \cos(a'-b')\sin(a'-b') + \cos(b'-c')\sin(b'-c')\} \\
& - k\{\cos(d-a')\sin(b'-c') + \cos(d-b')\sin(c'-a') + \cos(d-c')\sin(a'-b')\} \\
& + k^2\left\{\begin{array}{l} \cos(d-a')\cos(d-b')\sin(b'-a') \\ + \cos(d-b')\cos(d-c')\sin(c'-b') \\ + \cos(d-c')\cos(d-a')\sin(a'-c') \end{array}\right\}.
\end{aligned}
$$

Es ist aber allgemein:

$$\cos A \sin(C-B) + \cos B \sin(A-C) + \cos C \sin(B-A) = 0,$$

$$\cos(A+B)\sin(A-B) + \cos(B+C)\sin(B-C) + \cos(C+A)\sin(C-A) = 0,$$

$$
\begin{aligned}
& \cos(A-B)\sin(A-B) + \cos(B-C)\sin(B-C) + \cos(C-A)\sin(C-A) \\
& \quad = \tfrac{1}{2}\{\sin 2(A-B) + \sin 2(B-C) + \sin 2(C-A)\};
\end{aligned}
$$

folglich

$$
\begin{aligned}
& \cos A \cos B \sin(A-B) + \cos B \cos C \sin(B-C) + \cos C \cos A \sin(C-A) \\
& \quad = \tfrac{1}{4}\{\sin 2(A-B) + \sin 2(B-C) + \sin 2(C-A)\}.
\end{aligned}
$$

Dadurch verwandelt sich der Ausdruck von i in

$$2i = \tfrac{1}{2}I - \tfrac{1}{2}k^2 I,$$

oder

$$i = \tfrac{1}{4}(1-k^2)I.$$

2.

„In einem Dreiecke ABC (Fig. 3.) sei $AF = k.AB$, $BD = k.BC$, $CE = k.CA$: den Inhalt der verschiedenen durch die Durchschnitte der Linien AD, BE, CF entstandenen Dreiecke zu finden."

Seien die Winkel

$$CAB = a,$$
$$ABC = b,$$
$$ECA = c,$$

und der Durchmesser des umschriebenen Kreises $= 1$, so ist:

$$AB = \sin c; \quad AF = k.\sin c;$$
$$BC = \sin a; \quad BD = k.\sin a;$$
$$CA = \sin b; \quad CE = k.\sin b;$$

$$\text{tang}\, DAB = \frac{BD \sin ABC}{AB - BD\cos ABC} = \frac{k \sin a \sin b}{\sin c - k \sin a \cos b},$$

$$\text{tang}\, AFC = \frac{AC \sin BAC}{AF - AC\cos BAC} = \frac{\sin a \sin b}{k \sin c - \cos a \sin b}.$$

Es ist aber

$$AI = \frac{AF \sin AFI}{\sin(DAB + AFC)},$$

$$2.\Delta AFI = AF.AI \sin DAB = \frac{AF^2 \sin DAB \sin AFC}{\sin(DAB + AFC)}$$

$$= AF^2 \frac{\text{tang}\, DAB \,\text{tang}\, AFC}{\text{tang}\, DAB + \text{tang}\, AFC}$$

$$= \frac{k^3 \sin a^2 \sin b^2 \sin c^2}{\sin a \sin b \sin c - (\sin a \cos a \sin b^2 + \sin a^2 \sin b \cos b)k + \sin a \sin b \sin c . k^2}.$$

Da aber $c = 180 - a - b$, so ist $\sin c = \sin a \cos b + \cos a \sin b$, und also

$$2\Delta AFI = \frac{k^3}{1-k+k^2} \sin a \sin b \sin c = 2.\frac{k^3}{1-k+k^2}\Delta ABC,$$

oder

$$(1.) \quad \Delta AFI = \frac{k^3}{1-k+k^2}.\Delta ABC \ldots\ldots$$

Da dieser Werth in Beziehung auf die drei Seiten symmetrisch ist; so sind die beiden Dreiecke HEC und GDB dem Dreiecke AFI gleich. Es ist ferner $\Delta AFC = k\Delta ABC$, also

$$(2.) \quad AEHI = CDGH = BGIF = \left(k - \frac{2k^3}{1-k+k^2}\right)\Delta ABC$$
$$= \frac{k-k^2-k^3}{1-k+k^2}.\Delta ABC.$$

$$(3.) \quad \Delta GHI = \left(1 - 3.\frac{k^3}{1-k+k^2} - 3.\frac{k-k^2-k^3}{1-k+k^2}\right)\Delta ABC$$
$$= \left(\frac{1-4k+4k^2}{1-k+k^2}\right)\Delta ABC.$$

Wenn $k = \frac{1}{2}$, so ist der Inhalt des Dreiecks $GHI = 0$, oder die Linien AD, BE, CF schneiden sich in diesem Falle in einem Puncte; welches auch sonst bekannt ist.

18.
Bemerkung über ein Polyëder.

(Von einem Ungenannten.)

Es seien sieben Puncte $p_1, p_2, \ldots p_7$ im Raume gegeben, von welchen dreimal vier in einer Ebene liegen (wie dies bei jeden sieben Eckpuncten eines sechsseitigen und achteckigen Körpers der Fall ist), und zwar liegen $p_1 p_2 p_3 p_5$; $p_1 p_2 p_4 p_6$ und $p_1 p_3 p_4 p_7$ in einer Ebene. Nimmt man diese Ebenen zu Coordinaten-Ebenen, bezeichnet dem gemäfs die Coordinaten

von p_1	durch	0, 0, 0,	von p_5	durch	0, β', α',
p_2	-	0, 0, α,	p_6	-	γ'', 0, α'',
p_3	-	0, β, 0,	p_7	-	γ''', β''', 0,
p_4	-	γ, 0, 0,			

und legt durch diese sieben Puncte eine Fläche der zweiten Ordnung, deren Gleichung, da sie durch den Anfangspunct der Coordinaten geht, allgemein

$$(1.)\quad Az^2 + By^2 + Cx^2 + Dzy + Ezx + Fyx + Gz + Hy + Ix = 0$$

ist; so hat man zur Bestimmung der Coefficienten folgende Gleichungen:

$$C\alpha^2 + I\alpha = 0, \qquad C\alpha'^2 + B\beta'^2 + F\alpha'\beta' + H\beta' + I\alpha' = 0,$$
$$B\beta^2 + H\beta = 0, \qquad A\gamma''^2 + C\alpha''^2 + E\alpha''\gamma'' + G\gamma'' + I\alpha'' = 0,$$
$$A\gamma^2 + G\gamma = 0, \qquad A\gamma'''^2 + B\beta'''^2 + D\beta'''\gamma''' + G\gamma''' + H\beta''' = 0,$$

woraus

$$I = -C\alpha, \qquad F = \frac{B(\beta-\beta')}{\alpha'} + \frac{C(\alpha-\alpha')}{\beta'},$$
$$H = -B\beta, \qquad E = \frac{A(\gamma-\gamma'')}{\alpha''} + \frac{C(\alpha-\alpha'')}{\gamma''},$$
$$G = -A\gamma, \qquad D = \frac{A(\gamma-\gamma''')}{\beta'''} + \frac{B(\beta-\beta''')}{\gamma'''}$$

folgt. Die Gleichung (1.) wird daher

$$(2.)\quad \left[z + \frac{\gamma-\gamma'''}{\beta'''}y + \frac{\gamma-\gamma''}{\alpha''}x - \gamma\right]Az + \left[y + \frac{\beta-\beta'''}{\gamma'''}z + \frac{\beta-\beta'}{\alpha'}x - \beta\right]By$$
$$+ \left[x + \frac{\alpha-\alpha''}{\gamma''}z + \frac{\alpha-\alpha'}{\beta'}y - \alpha\right]Cx = 0.$$

Legt man nun ferner durch die Puncte $p_4 p_6 p_7$, ferner $p_3 p_5 p_7$, ferner $p_2 p_5 p_6$ Ebenen, so findet man, dafs ihre Gleichungen

$$(3.)\quad \begin{cases} z + \frac{\gamma-\gamma'''}{\beta'''}y + \frac{\gamma-\gamma''}{\alpha''}x - \gamma = 0, \\ y + \frac{\beta-\beta'''}{\gamma'''}z + \frac{\beta-\beta'}{\alpha'}x - \beta = 0, \\ x + \frac{\alpha-\alpha''}{\gamma''}z + \frac{\alpha-\alpha'}{\beta'}y - \alpha = 0 \end{cases}$$

sind. Die Coordinaten des Durchschnittspuncts p_8 dieser drei Ebenen befriedigen aber diese Gleichungen zu gleicher Zeit, und reduciren also, wie man sieht, die Coefficienten von Az, By und Cx in der Gleichung (2.) auf Null. Es geht demnach die Fläche (2.) durch diesen Durchschnittspunct p_8, welches folgenden Lehrsatz giebt:

Alle Flächen der zweiten Ordnung, welche durch sieben Eckpuncte eines von sechs Ebenen begrenzten achteckigen Körpers (*Hexaëdre-octogone*) gehen, gehen auch durch den achten Eckpunct dieses Körpers.

Hieraus fliefst, als ein besonderer Fall, der nachfolgende Satz:

Wenn man auf einer Kugelfläche, oder in einer Ebene, drei Kreise k_1, k_2, k_3 beschreibt, die sich in einem und demselben Puncte p_1, und aufserdem zu zweien, nämlich k_1 und k_2 in p_2, k_1 und k_3 in p_3 und k_2 und k_3 in p_4, schneiden; wenn man ferner auf einer jeden dieser Kreislinien einen Punct, auf k_1, p_5, auf k_2, p_6 und auf k_3, p_7 beliebig annimmt; so schneiden sich die drei, respective durch die Puncte p_2, p_5 und p_6; p_3, p_5 und p_7; und p_4, p_6 und p_7 gehende Kreise in einem und demselben Puncte p_8.

19.
Bemerkungen zu der zweiten Aufgabe*) in der Abhandlung No. 17. in diesem Hefte.

(Von Herrn *J. Steiner* zu Berlin.)

1) Diese Aufgabe gehört zu einer Abtheilung von Elementar-Aufgaben, die die Pestalozzische Schule wegen mancherlei pädagogischer Vorzüge sehr in Betracht zog, und die der Director der Gewerbschule zu Berlin, Herr Kloeden, besonders sehr ausgebildet hat, und bei seinem Unterricht mit dem besten Erfolg ausübt. Nach dieser Elementarübung wird die obige Aufgabe ohne Hülfe trigonometrischer Functionen gelöset; auch kann sie allgemeiner gestellt werden, so dafs die obige nur als ein einzelner Fall erscheint, nämlich wie folgt:

2) „Es seien die Seiten des gegebenen Dreiecks ABC (Fig. 4.) auf irgend eine Weise getheilt, z. B. so, dafs $AF=\alpha.AB$; $BD=\beta.BC$; $CE=\gamma.CA$. Man soll den Flächeninhalt eines jeden der sieben Stücke angeben, in welche das Dreieck durch die drei Geraden AD, BE, CF getheilt wird."

Wenn die Gerade EG mit AB parallel, so ist $CE:CA=EG:AF$, und daher

$$EG=\gamma.AF=\gamma.\frac{\alpha}{1-\alpha}.BF,$$

und da aus denselben Gründen $EG:BF=EH:HB$, so ist eben so

$$EH=\gamma\frac{\alpha}{1-\alpha}.HB,$$

und daher

$$EB\,(=EH+HB)=\left(1+\gamma\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)HB=\frac{1-\alpha+\alpha\gamma}{1-\alpha}HB,$$

folglich

$$\frac{EH}{EB}=\frac{\alpha\gamma}{1-\alpha+\alpha\gamma},$$

und da die Dreiecke c und CEB sich wie ihre Grundlinien EH, EB verhalten, so ist

$$c=\frac{\alpha\gamma}{1-\alpha+\alpha\gamma}.CEB.$$

Wird nun der Inhalt des gegebenen Dreiecks durch Δ dargestellt, so ist $CEB=\gamma.\Delta$, und daher:

*) In Hinsicht der ersten Aufgabe kann verglichen werden Bd. II. S. 265. d. Journ.

$$1.\quad c = \frac{\alpha\gamma^2}{1-\alpha+\alpha\gamma}\cdot\Delta,$$

und vermöge der Analogie hat man eben so:

$$2.\quad b = \frac{\gamma\beta^2}{1-\gamma+\gamma\beta}\cdot\Delta,$$

$$3.\quad a = \frac{\beta\alpha^2}{1-\beta+\beta\alpha}\cdot\Delta.$$

Da z. B. das Viereck $d = AFC - c - a$, so hat man ferner (weil $AFC = \alpha.\Delta$):

$$4.\quad d = \alpha\left(1-\frac{\gamma^2}{1-\alpha+\alpha\gamma}-\frac{\beta\alpha}{1-\beta+\beta\alpha}\right)\cdot\Delta,$$

desgleichen

$$5.\quad e = \beta\left(1-\frac{\alpha^2}{1-\beta+\beta\alpha}-\frac{\gamma\beta}{1-\gamma+\gamma\beta}\right)\cdot\Delta,$$

$$6.\quad f = \gamma\left(1-\frac{\beta^2}{1-\gamma+\gamma\beta}-\frac{\alpha\gamma}{1-\alpha+\alpha\gamma}\right)\cdot\Delta.$$

Endlich ist das Dreieck $g = \Delta - AFC - BDA - CEB + a + b + c$, daher

$$7.\quad g = \left(1-\alpha-\beta-\gamma+\frac{\beta\alpha^2}{1-\beta+\beta\alpha}+\frac{\gamma\beta^2}{1-\gamma+\gamma\beta}+\frac{\alpha\gamma^2}{1-\alpha+\alpha\gamma}\right)\cdot\Delta$$
$$= \left(1-\frac{1-\alpha}{1-\alpha+\alpha\gamma}-\frac{1-\beta}{1-\beta+\alpha\beta}-\frac{1-\gamma}{1-\gamma+\beta\gamma}\right)\cdot\Delta$$

Schneiden die drei Geraden AD, BE, CF einander in einem Puncte, so ist $g = 0$, und für diesen Fall hat man also die Bedingungsgleichung

$$8.\quad \frac{1-\alpha}{1-\alpha+\alpha\gamma}+\frac{1-\beta}{1-\beta+\alpha\beta}+\frac{1-\gamma}{1-\gamma+\beta\gamma} = 1,$$

oder auch

$$9.\quad \alpha\beta\gamma = (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma).$$

3) Der angeführte Satz entspringt aus dem vorstehenden, wenn man $\alpha = \beta = \gamma$ setzt. Für diesen besonderen Fall hat man:

$$10.\quad a = b = c = \frac{\alpha^3}{1-\alpha+\alpha^2}\cdot\Delta \quad (1.,\ 2.,\ 3.),$$

$$11.\quad d = e = f = \frac{\alpha(1-\alpha-\alpha^2)}{1-\alpha+\alpha^2}\cdot\Delta \quad (4.,\ 5.,\ 6.),$$

$$12.\quad g = \left(1-3\alpha+3\frac{\alpha^3}{1-\alpha+\alpha^2}\right)\cdot\Delta \quad (7.)$$
$$= \frac{1-4\alpha+4\alpha^2}{1-\alpha+\alpha^2}\cdot\Delta.$$

---

4) Neulich wurden im XVIII. Bande der *Annales de mathematiques* des Herrn Gergonne einige Aufgaben untersucht, welche den vor-

stehenden ähnlich sind, sich eben so leicht lösen lassen, und aus denen ich die vorzüglichsten Resultate hierher setzen will.

Wenn man nemlich im Innern eines Dreiecks mit dessen Seiten drei Geraden parallel zieht *), so dafs die Fläche desselben in 7 Stücke getheilt wird, nemlich in ein dem gegebenen ähnliches und ähnlich liegendes Dreieck Δ, in drei Parallelogramme a, b, c und in drei, diesen respective gegenüberliegende Paralleltrapeze α, β, γ, so findet Herr Vallès folgende Gleichungen:

$$1.\quad \begin{cases} a = 2[\sqrt{(\Delta+\beta)}-\sqrt{\Delta}]\,[\sqrt{(\Delta+\gamma)}-\sqrt{\Delta}], \\ b = 2[\sqrt{(\Delta+\alpha)}-\sqrt{\Delta}]\,[\sqrt{(\Delta+\gamma)}-\sqrt{\Delta}], \\ c = 2[\sqrt{(\Delta+\alpha)}-\sqrt{\Delta}]\,[\sqrt{(\Delta+\beta)}-\sqrt{\Delta}], \end{cases}$$

$$2.\quad \begin{cases} 2a\alpha = bc + 2\sqrt{(2abc\Delta)}, \\ 2b\beta = ac + 2\sqrt{(2abc\Delta)}, \\ 2c\gamma = ab + 2\sqrt{(2abc\Delta)}, \end{cases}$$

$$3.\quad 4[\sqrt{(\Delta+\alpha)}-\sqrt{\Delta}]\,[\sqrt{(\Delta+\beta)}-\sqrt{\Delta}]\,[\sqrt{(\Delta+\gamma)}-\sqrt{\Delta}] = \sqrt{(2abc)},$$

$$4.\quad a[\sqrt{(\Delta+\alpha)}-\sqrt{\Delta}] = b[\sqrt{(\Delta+\beta)}-\sqrt{\Delta}] = c[\sqrt{(\Delta+\gamma)}-\sqrt{\Delta}],$$

$$5.\quad 2a\alpha - bc = 2b\beta - ac = 2c\gamma - ab. \quad (2.)$$

Setzt man $\Delta = 0$, d. h., nimmt man an, die drei Geraden schneiden einander in einem Puncte, so hat man z. B.

$$6.\quad a^2 = 4\beta\gamma;\quad b^2 = 4\alpha\gamma;\quad c^2 = 4\alpha\beta,$$

$$7.\quad abc = 8\alpha\beta\gamma.$$

Wenn man ähnlicher Weise im Innern einer dreiseitigen Pyramide mit deren Seitenflächen vier Ebenen parallel legt, so dafs die Pyramide in 14 Theile getheilt wird, nemlich 1) in eine der gegebenen ähnliche und ähnlich liegende Pyramide p; 2) in vier Parallelepipeden a, b, c, d; 3) in vier den letzteren respective gegenüberliegende, mit ihren Grundflächen parallel abgestumpfte dreiseitige Pyramiden α, β, γ, δ; und endlich 4) in sechs abgestumpfte Parallelepipeden, welche rücksichtlich ihrer Lage zwischen den Parallelepipeden (2.) durch $[ab]$, $[ac]$, $[ad]$, $[bc]$, $[bd]$, $[cd]$ bezeichnet werden sollen; so hat man:

$$\text{I.}\quad \begin{cases} a = 6[\sqrt[3]{(p+\beta)}-\sqrt[3]{p}]\,[\sqrt[3]{(p+\gamma)}-\sqrt[3]{p}]\,[\sqrt[3]{(p+\delta)}-\sqrt[3]{p}], \\ \text{für } b,\ c,\ d \text{ analog.} \end{cases}$$

*) Zöge man drei Geraden, statt parallel mit den Seiten, so, dafs sie die Seiten in irgend gegebenen Verhältnissen schnitten, so würde dieser Fall den gegenwärtigen und den obigen (2.) als besondere Fälle in sich enthalten, und nach Art des letzteren leicht gelöset werden können.

II. $\left\{\begin{array}{l}[ab] = 3[\sqrt[3]{(p+\gamma)} - \sqrt[3]{p}][\sqrt[3]{(p+\delta)} - \sqrt[3]{p}][\sqrt[3]{(p+\gamma)} + \sqrt[3]{(p+\delta)}], \\ \text{für } [ac], [ad], \ldots\ldots \text{ analog.}\end{array}\right.$

III. $\left\{\begin{array}{l}12a^2\alpha = 2bcd + \sqrt[3]{(36a^2b^2c^2d^2p)} + 6a\sqrt[3]{(36abcdp^2)}, \\ \text{für } \beta, \gamma, \delta \text{ analog. Danach findet man } \alpha, \beta, \gamma, \delta.\end{array}\right.$

IV. $\left\{\begin{array}{l}2ab[cd] = cd(a+b) + 2\sqrt[3]{(6a^2b^2c^2d^2p)}, \\ \text{für } [ab], [ac], \ldots\ldots \text{ analog.}\end{array}\right.$

V. $$36[\sqrt[3]{(p+\alpha)} - \sqrt[3]{p}][\sqrt[3]{(p+\beta)} - \sqrt[3]{p}][\sqrt[3]{(p+\gamma)} - \sqrt[3]{p}][\sqrt[3]{(p+\delta)} - \sqrt[3]{p}] = \sqrt[3]{(36a^2b^2c^2d^2)}.$$

VI. $$a[\sqrt[3]{(p+\alpha)} - \sqrt[3]{p}] = b[\sqrt[3]{(p+\beta)} - \sqrt[3]{p}] = c[\sqrt[3]{(p+\gamma)} - \sqrt[3]{p}] = d[\sqrt[3]{(p+\delta)} - \sqrt[3]{p}].$$

VII. $$ab[cd] + cd[ab] = ac[bd] + bd[ac] = ad[bc] + bc[ad].$$

Setzt man $p = 0$, d. h., nimmt man an, die vier genannten Ebenen schneiden einander in einem Punct, wodurch sich α, β, γ, δ in Pyramiden verwandeln, die der gegebenen ähnlich sind, so hat man z. B.

VIII. $a^3 = 216\beta\gamma\delta$; $b^3 = 216\alpha\gamma\delta$; $c^3 = 216\alpha\beta\delta$; $d^3 = 216\alpha\beta\gamma$.

IX. $[ab] = 3(\sqrt[3]{\gamma} + \sqrt[3]{\delta})\sqrt[3]{(\gamma\delta)}$, für die übrigen analog.

X. $abcd = 1296\alpha\beta\gamma\delta$.

IX. $6a^2\alpha = bcd$; $6b^2\beta = acd$; etc.

XII. $a^3\alpha = b^3\beta = c^3\gamma = d^3\delta$.

20.
Anmerkungen zu dem Aufsatze No. 18.

(Von Herrn *J. Steiner* zu Berlin.)

Aus dem hier bewiesenen Satze schliefst man folgenden analogen Satz, nämlich:

„Dafs jede Fläche zweiter Ordnung, welche sieben Seitenflächen eines von acht Ebenen begrenzten sechseckigen Körpers berührt, auch zugleich die achte Seitenfläche berühre."

Denn nach einer gewissen Regel, welche die französischen Geometer „*théorie des polaires réciproques*" nennen (von der ich an einem anderen Orte handeln werde), und nach welcher die Dualität solcher Sätze erschlossen wird, folgt auch dieser Satz unmittelbar aus jenem. Der gegenwärtige kann aber auch aufserdem, wie folgt, aus jenem hergeleitet werden.

In jeder Ecke des genannten Körpers stofsen vier Seitenflächen zusammen. Die in irgend einer Ecke zusammenstofsenden Seitenflächen sollen der Ordnung nach durch A_1, A_2, A_3, A_4 und die ihnen gegenüberliegenden Seitenflächen durch A_5, A_6, A_7, A_8 bezeichnet werden. Die Ecken des Körpers lassen sich dadurch, mit Rücksicht auf die Seitenflächen, die darin zusammenstofsen, durch $E(1234)$, $E(1278)$, $E(2358)$, $E(3465)$, $E(4176)$, $E(5678)$ bezeichnen. Endlich sollen die Puncte, in welchen irgend eine Fläche F zweiter Ordnung, z. B. die sieben Seitenflächen A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7 berührt, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7 heifsen.

Man weifs: „dafs die Berührungspuncte aller Ebenen, welche durch einen und denselben Punct gehen und eine Fläche zweiter Ordnung berühren, auf die Peripherie eines Kegelschnitts beschränkt sind, und dafs umgekehrt: alle Ebenen, deren Berührungspuncte mit einer Fläche zweiter Ordnung auf einen Kegelschnitt beschränkt sind, einander in einem und demselben Puncte schneiden."

Daher folgt also, dafs vermöge der Ecken $E(1234)$, $E(3465)$, $E(4176)$, sowohl die vier Puncte p_1, p_2, p_3, p_4; als p_3, p_4, p_6, p_5; als p_4, p_1, p_7, p_6

in einer Ebene (in einem ebenen Schnitt der Fläche F) liegen; und daher giebt es, nach dem oben erwähnten Satze, noch einen bestimmten achten Punct p_8, welcher ebenfalls in der Fläche F liegt, und zwar so, dafs er sowohl mit den drei Puncten p_1, p_2, p_7; als p_2, p_3, p_5; als p_5, p_6, p_7 in einem ebenen Schnitt der Fläche liegt. Aus dem Letzteren folgt ferner, nach dem vorstehenden Hülfssatz, dafs die in p_8 an die Fläche F gelegte Berührungsebene sowohl durch den Durchschnittspunct der drei Ebenen A_1, A_2, A_7; als A_2, A_3, A_5; als A_5, A_6, A_7 gehen mufs, d. h., dafs sie durch die Ecken $E(1278)$, $E(2358)$, $E(5678)$ gehen mufs, folglich fällt sie mit der Seitenfläche A_8 zusammen, und folglich wird auch diese Seitenfläche A_8 von der Fläche F berührt, w. z. b. w.

Ich erwähne bei dieser Gelegenheit noch folgender zwei interessanten Sätze, welche Herr Bobillier im XVII. Bande der *Annales* des Herrn Gergonne, durch eine sehr einfache und geschickt geführte Rechnung bewiesen hat, nämlich:

I. „Die Mittelpuncte aller Flächen zweiter Ordnung, welche sieben gegebene Ebenen berühren, liegen in einer bestimmten Ebene."

II. „Die Mittelpuncte aller Flächen zweiter Ordnung, welche acht gegebene Ebenen berühren, liegen in einer bestimmten Geraden."

In einer späteren Abhandlung desselben Verfassers (Bd. XVIII. S. 253.) fliefsen diese Sätze als sehr specielle Fälle aus allgemeineren Sätzen über algebraische Flächen aller Ordnungen. Den Untersuchungen des Herrn Bobillier geht ein Memoire von Herrn Gergonne, betitelt: *Recherches sur quelques lois générales qui regissent les lignes et surfaces algébriques de tous les ordres"* voran (Bd. XVII. S. 214. und 229.). Diese Arbeiten sind ihrer Allgemeinheit und Einfachheit wegen in Beziehung auf geschickte analytische Behandlung geometrischer Gegenstände von grofsem Interesse, und verdienen deshalb besondere Berücksichtigung.

21.
Aufgaben und Lehrsätze,
erstere aufzulösen, letztere zu beweisen.

(Von Herrn *J. Steiner* zu Berlin.)

11. **Lehrsatz.** Setzt man zur Abkürzung

$$z(z+1)(z+2)\ldots\ldots(z+r-1) = z^{r|1},$$

so hat man für die Summe gleich hoher Potenzen der natürlichen Zahlen folgende Ausdrücke*), nämlich:

I. $$1^{2n+1}+2^{2n+1}+3^{2n+1}+4^{2n+1}+\ldots\ldots+x^{2n+1} = {}^1\Sigma x^{2n+1}$$

$$= \frac{1}{2n+2}(x-n)^{2n+2|1}+1^2\left|\frac{1}{2n}(x-n+1)^{2n|1}+\begin{matrix}1^2 & . & 1^2\\ & & 1^2 & . & 2^2\\ & & 1^2 & . & 3^2\\ & & & \vdots & \\ & & (n-1)^2 & . & (n-1)^2\end{matrix}\right|\frac{1}{2n-2}(x-n+2)^{2n-2|1}$$

$$+\begin{matrix}1^2 & . & 1^2 & . & 1^2\\ 1^2 & . & 1^2 & . & 2^2\\ & & \vdots & & \\ (n-2)^2 & . & (n-2)^2 & . & (n-2)^2\end{matrix}\left|\frac{1}{2n-4}(x-n+3)^{2n-4|1}+\ldots+\begin{matrix}(1^2)^{n-1}\\ (1^2)^{n-2}(2^2)^1\\ (1^2)^{n-3}(2^2)^2\\ \vdots\\ (2^2)^{n-1}\end{matrix}\right|\frac{1}{4}(x-1)^{4|1}+(1^2)^n\frac{1}{2}x^{2|1}$$

und

II. $$1^{2n+2}+2^{2n+2}+3^{2n+2}+4^{2n+2}+\ldots\ldots+x^{2n+2} = {}^1\Sigma x^{2n+2}$$

$$= \frac{2x+1}{2}\left[\frac{1}{2n+3}(x-n)^{2n+2|1}+1^2\left|\frac{1}{2n+1}(x-n+1)^{2n|1}+\begin{matrix}1^2 & . & 1^2\\ & & 1^2 & . & 2^2\\ & & 1^2 & . & 3^2\\ & & & \vdots & \\ & & (n-1)^2 & . & (n-1)^2\end{matrix}\right|\frac{1}{2n-1}(x-n+2)^{2n-2|1}\right.$$

$$\left.+\ldots\ldots+\begin{matrix}(1^2)^{n-1}\\ (1^2)^{n-2}.(2^2)^1\\ (1^2)^{n-3}.(2^2)^2\\ \vdots\\ (2^2)^{n-1}\end{matrix}\right|\frac{1}{5}(x-1)^{4|1}+(1^2)^n\frac{1}{3}(x)^{2|1}\Big].$$

*) Der Herr Professor Schweins giebt in seiner Analysis eilf verschiedene Summirungsweisen dieser Reihe; auch die vorliegende Summirungsweise gewinnt man nach der daselbst von dem genialen Verfasser angewandten sehr allgemeinen Summirungsmethode.

(Anm. des Herrn J. Steiner.)

Leitet man von der gegebenen Reihe (I., II.) neue Summenreihen ab, so hat man für die Summe der $r$ten abgeleiteten Reihe:

III. $$^{r}\Sigma x^{2n+1} = \frac{1}{(2n+2)^{r|1}}(x-n)^{2n+r+1|1} + \begin{vmatrix} 1^2 & \frac{1}{(2n)^{r|1}}(x-n+1)^{2n+r-1|1} \\ 2^2 & \\ 3^2 & \\ \vdots & \\ n^2 & \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} 1^2 \cdot 1^2 & \frac{1}{(2n-2)^{r|1}}(x-n+2)^{2n+r-3|1} + \ldots + (1^2)^{n-1} & \frac{1}{(4)^{r|1}}(x-1)^{r+3|1} + (1^2)^n \cdot \frac{1}{(2)^{r|1}}(x)^{r+1|1} \\ 1^2 \cdot 2^2 & (1^2)^{n-2}\cdot(2^2)^1 & \\ 1^2 \cdot 3^2 & \vdots & \\ \vdots & (2^2)^{n-1} & \\ (n-1)^2(n-1)^2 & & \end{vmatrix}$$

und

IV. $$^{r}\Sigma x^{2n+2} = \frac{2x+r}{2}\left[\frac{1}{(2n+3)^{r|1}}(x-n)^{2n+r+1|1} + \begin{vmatrix} 1^2 & \frac{1}{(2n+1)^{r|1}}(x-n+1)^{2n+r-1|1} \\ 2^2 & \\ 3^2 & \\ \vdots & \\ n^2 & \end{vmatrix}\right.$$

$$\left. + \begin{vmatrix} 1^2 \cdot 1^2 & \frac{1}{(2n-1)^{r|1}}(x-n+2)^{2n+r-3|1} + \ldots + (1^2)^{n-1} & \frac{1}{(5)^{r|1}}(x-1)^{r+3|1} + (1^2)^n \cdot \frac{1}{(3)^{r|1}}(x)^{r+1|1} \\ 1^2 \cdot 2^2 & (1^2)^{n-2}\cdot(2^2)^1 & \\ \vdots & \vdots & \\ (n-1)^2(n-1)^2 & (2^2)^{n-1} & \end{vmatrix}\right].$$

Die Gröfsen n, r sind als ganze positive Zahlen vorausgesetzt.

12. Lehrsatz. „Zieht man in einem gegebenen Kreise Sehnen, die sämmtlich parallel sind, beschreibt über jeder, als Durchmesser genommen, einen Kreis, so wird jeder von diesen Kreisen (wozu auch der gegebene gehört) von einer bestimmten Ellipse eingeschlossen und in zwei Puncten berührt. Die Ellipse hat den mit den genannten Sehnen parallelen Durchmesser AB des gegebenen Kreises zur kleinen Axe, deren Quadrat gerade die Hälfte des Quadrats der grofsen Axe ist. Diejenigen Kreise jedoch, deren Durchmesser kleiner sind als $AB\sqrt{\frac{1}{2}}$, liegen innerhalb der Ellipse, ohne von ihr berührt zu werden."

13. Lehrsatz. „Zieht man irgend eine Gerade AB, welche ein Paar gegenüber liegende Kanten einer gegebenen dreiseitigen Pyramide schneidet, und legt durch irgend einen Punct P derselben (AB) zwei

andere Geraden *CD*, *EF*, welche respective die beiden übrigen gegenüber stehenden Kantenpaare schneiden, so geht die Ebene der letzteren Geraden *CD*, *EF* beständig durch eine bestimmte Gerade A_1B_1, welche ebenfalls das erste Kantenpaar schneidet, der Punct *P* mag sich in der fixen Geraden *AB* bewegen, wie man will; und ferner: legt man durch *AB* irgend eine Ebene, deren Durchschnittspuncte mit dem zweiten und dritten Kantenpaar C_1, D_1 und E_1, F_1 heifsen mögen, so fällt der Durchschnittspunct der Geraden C_1D_1, E_1F_1 beständig in die Gerade A_1B_1, die Ebene mag sich um die fixe Gerade *AB* drehen, wie man will."

14. Lehrsatz. „Nimmt man in der Peripherie eines Kegelschnitts irgend sechs beliebige Puncte *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* (Fig. 5.) an, so können sie auf drei Arten als drei und drei einander gegenüberliegend betrachtet werden, nämlich *A*, *B*, *C* und *F*, *E*, *D*; *B*, *C*, *D* und *A*, *F*, *E*; *C*, *D*, *E* und *B*, *A*, *F*. In jedem Falle bestimmen sie, paarweise genommen, wie sie einander gegenüber liegen, drei Vierecke, z. B. im ersten Falle *ABEF*, *ACDF*, *BCDE*. Die Durchschnittspuncte (*G*, *H*, *I*) der Diagonalen dieser drei Vierecke liegen in einer Geraden (*GHI*), und die auf diese Weise entstehenden drei Geraden *GHI*, *KLM*, *NOP* schneiden einander in einem einzigen Punct *Q*."

Dieser Satz ist nur ein Theil eines umfassenderen Satzes.

15. Lehrsatz. Zieht man in einem convexen Vieleck alle mögliche Diagonalen und verlängert alle Seiten, so dafs alle diese Geraden wo möglich einander paarweise schneiden: so entstehen, im Allgemeinen, innerhalb des Vielecks gerade halb so viele Durchschnittspuncte als aufserhalb. Z. B. beim 20Eck innerhalb 4845 und aufserhalb 9690.

16. Lehrsatz. Bekanntlich können die Seiten eines Dreiecks oder ihre Verlängerungen von vier Kreisen berührt werden. Ist das Dreieck ein rechtwinkliges, so ist der Radius des Kreises über der Hypotenuse so grofs als die Summe der Radien der drei übrigen Kreise; und ferner: bei dem bekannten Pythagorischen Dreieck, dessen Seiten, durch irgend eine Längeneinheit gemessen, 3, 4, 5 sind, sind die Radien jener Kreise, durch die nämliche Einheit gemessen 1, 2, 3, 6.

17. Lehrsatz. Sind *A*, *B*, *C* diejenigen drei Kreise, von denen jeder eine Seite eines gegebenen Dreiecks und die Verlängerung der beiden übrigen (Seiten) berührt, und man beschreibt drei andere Kreise *a*, *b*, *c* so, dafs jeder zwei der drei ersteren äufserlich und den dritten in-

nerlich (einschliefsend) berührt, so schneiden die drei letzteren einander in einem bestimmten Punct P, und die Geraden, welche diesen Punct mit den Mittelpuncten der drei ersteren Kreise verbinden, sind respective zu den Seiten des Dreiecks senkrecht.

18. Lehrsatz. Sind A, B, C, D diejenigen vier Kugeln, von denen jede eine Seitenfläche einer gegebenen dreiseitigen Pyramide und die Verlängerungen der drei übrigen berührt, und man beschreibt vier andere Kugeln a, b, c, d so, dafs jede drei der vier ersteren äufserlich und die vierte innerlich berührt, so schneiden die vier letzteren einander in einem bestimmten Punct P, und die Geraden, welche diesen Punct mit den Mittelpuncten der vier ersteren Kugeln (A, B, C, D) verbinden, sind respective zu den Seitenflächen der Pyramide senkrecht.

Dieser und der vorige Satz sind nur Theile von umfassenderen Sätzen.

19. Lehrsatz. Es seien M_2, M_1 (Fig. 6.) irgend zwei Kreise (deren Durchmesser AB, CD), EF sei ihre Linie der gleichen Potenzen (siehe Bd. I. S. 165. d. Journ.), und M sei die Mitte ihrer gröfsten Entfernung AD von einander; beschreibt man irgend einen Kreis M, d. h. GHI oder $G_1H_1I_1$, und hierauf zwei andere Kreise m_2, m_1 so, dafs beide zugleich innerhalb oder aufserhalb des Kreises M liegen und ihn berühren, und dafs sie überdies die Gerade EF und respective die gegebenen Kreise M_2, M_1 berühren, so sind die zwei Kreise m_2, m_1 allemal einander gleich.*)

20. Lehrsatz. Drei unendliche Geraden, die ein Dreieck ABC einschliefsen, theilen die Ebene in der sie liegen, in sieben Theile, nämlich in die Fläche E des Dreiecks, in drei Winkelräume E_1, E_2, E_3 und in drei über den Seiten des Dreiecks liegende Räume H_1, H_2, H_3. Zieht man aus den Ecken des Dreiecks durch irgend einen Punct P drei Gerade APA_2, BPB_2, CPC_2 die den gegenüber liegenden Seiten in A_2, B_2, C_2 begegnen, so liegen diese drei Puncte A_2, B_2, C_2 mit den Mitten A_1, B_1, C_1 der Seiten, allemal in irgend einem Kegelschnitt, und zwar in einer *a*) Ellipse, *b*) Hyperbel, oder *c*) Parabel, je nachdem der Punct

*) Archimedes hat denjenigen besonderen Fall dieses Satzes bewiesen, wo die gegebenen Kreise M_2, M_1 einander (in B, C) berühren, und wo AD als Durchmesser des Kreises M angenommen wird. Ein arabischer Scholiast Alkauhi hat den Archimedischen Satz so weit verallgemeinert, dafs er die erste Einschränkung aufhob (siehe Archim. Werke, übersetzt von Nizze, S. 256., Wahlsatz 5.). In dem lezteren Falle findet folgende besondere Eigenschaft statt: „Ist K (Fig 7.) der äufsere Aehnlichkeitspunct der gegebenen Kreise M_2, M_1, so berührt sowohl der Kreis m, dessen Durchmesser MK ist, als derjenige Kreis $M(G_1H_1I_1)$, welcher die äufsere gemeinschaftliche Tangente KN_1N_2 der gegebenen Kreise berührt, die beiden Kreise m_2, m_1."
(Anm. des Herrn J. Steiner.)

P *a*) in einem der vier Räume E, E_1, E_2, E_3, *b*) in einem der drei Räume H_1, H_2, H_3, oder *c*) unendlich entfernt liegt (d. h. die Geraden AA_2, BB_2, CC_2 sind parallel).

Dieser Satz ist ein besonderer Fall eines allgemeineren Satzes. Auch giebt es einen, diesem entgegengesetzten Satz.

21. Lehrsetz. Berühren die Seiten irgend eines Dreiecks eine gegebene Parabel, so schneiden die drei Geraden, welche die Berührungspuncte mit den gegenüber liegenden Ecken verbinden, einander in irgend einem Punct *P;* und ferner: die Schwerpuncte aller Dreiecke, denen ein und derselbe Punct *P* in dieser Beziehung zugehört, liegen in einer bestimmten Geraden, und die um die Dreiecke beschriebenen Ellipsen, welche die respectiven Schwerpuncte zu Mittelpuncten haben, sind ähnlich und ähnlich liegend, und schneiden einander im Puncte *P.*"

22. Lehrsatz. Beschreibt man um ein gegebenes Dreieck *ABC* (Fig. 8.) irgend einen Kegelschnitt, zieht aus den Ecken des ersteren durch irgend einen Peripheriepunct *D* des letzteren die Geraden ADA_1, BDB_1, CDC_1, die den gegenüber liegenden Seiten in A_1, B_1, C_1 begegnen, so liegen die drei Puncte α, β, γ, in welche die entsprechenden Seiten der beiden Dreiecke ABC, $A_1B_1C_1$ einander schneiden, allemal in irgend einer Geraden, und diese Gerade $\alpha\beta\gamma$ geht beständig durch einen bestimmten fixen Punct *Q;* und zieht man ferner aus den Ecken des gegebenen Dreiecks *ABC* durch die Mitten *a*, *b*, *c* der Seiten des Dreiecks $A_1B_1C_1$ die Geraden Aa, Bb, Cc, so treffen diese einander allemal in irgend einem Punct *P*, und der Ort dieses Puncts ist eine bestimmte Gerade.

23. Lehrsatz. Beschreibt man irgend einen Kegelschnitt *DEF* (Fig. 9.), welcher die Seiten eines gegebenen Dreiecks berührt, legt an denselben irgend eine Tangente $A_1B_1C_1$, welche die Seiten des Dreiecks in A_1, B_1, C_1 schneidet, und zieht die Geraden AA_1, BB_1, CC_1, wodurch das Dreieck $\alpha\beta\gamma$ entsteht, so schneiden die drei Geraden $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ einander allemal in irgend einem Puncte *Q*, und der Ort dieses Puncts ist eine bestimmte Gerade; und zieht man ferner aus den Ecken des Dreiecks $\alpha\beta\gamma$ durch die Mitten *a*, *b*, *c* der Seiten des gegebenen Dreiecks *ABC* die Geraden αa, βb, γc, so treffen diese einander in irgend einem Punct *P*, und der Ort dieses Puncts ist ein bestimmter Kegelschnitt, welcher durch die drei Berührungspuncte *D*, *E*, *F* geht.

24. Lehrsatz. Schneidet man die drei Diagonalen AB, CD, EF eines gegebenen vollständigen Vierecks, gebildet durch die vier Geraden AE, AF, ED, CF (Fig. 10.), mit irgend einer Geraden ace (oder bdf) in den Puncten a, c, e (oder b, d, f), und bestimmt hierauf in jeder Diagonale den entsprechenden harmonischen Punct b, d, f (oder a, c, e), d. h. so, dafs z. B. $Aa : aB = Ab : Bb$, so liegen diese drei neuen Puncte allemal in irgend einer Geraden bdf (oder ace); und ferner: dreht sich die schneidende Gerade ace um irgend einen Punct P, so bewegt sich die zugehörige (harmonische) Gerade bdf so, dafs sie beständig irgend einen bestimmten Kegelschnitt berührt, der zugleich von den drei Diagonalen AB, CD, EF berührt wird; und auch umgekehrt.

25. Lehrsatz. Ein vollständiges Viereck von vier Puncten A, B, C, D (Fig. 11.) hat drei Paar einander gegenüber liegende Seiten (oder Diagonalen) AB und CD, AC und DB, AD und CB, die einander respective in den Puncten a, b, c schneiden. Zieht man aus irgend einem Puncte p nach jenen Puncten a, b, c die Geraden pa, pb, pc, und bestimmt hierauf bei jedem Puncte (a, b, c) die entsprechende vierte harmonische Gerade aq, bq, cq, d. h., eine solche Gerade, dafs die durch denselben Punct gehenden vier Geraden (z. B. aA, ap, aD, aq) ein harmonisches System bilden (d. h., dafs sie jede Gerade, welche sie schneiden, harmonisch theilen), so treffen diese drei Geraden aq, bq, cq einander allemal in irgend einem Punct q; und ferner: bewegt sich der Punct p in irgend einer Geraden, so beschreibt der Punct q irgend einen Kegelschnitt, der allemal durch die drei Puncte a, b, c geht; und auch umgekehrt.

26. Aufgabe. Zwischen den Radien von fünf Kugeln, von denen jede zwei einander berühren, eine Relation zu finden. (Siehe Bd. I. S. 275. d. Journ.)

27. Aufgabe. Wenn vier gegebene Puncte in einer Ebene so liegen, dafs kein anderer Kegelschnitt als Hyperbeln durch dieselben gehen kann [wie z. B. die Puncte A, E, F, B (Fig. 10.)], so soll unter allen diesen Hyperbeln diejenige gefunden werden, welche am meisten von der gleichseitigen abweicht.

(Von Herrn *N. H. Abel* zu Christiania in Norwegen.)

28. Aufgabe. Kann $\alpha^{\mu-1} - 1$, wenn μ eine Primzahl und α eine ganze Zahl und kleiner als μ und gröfser als 1 ist, durch μ^2 theilbar sein?

22.

Mémoire sur les centres de moyennes harmoniques;

pour faire suite au traité des propriétés projectives des figures, et servir d'introduction à la Théorie générale des propriétés projectives des courbes et surfaces géométriques. *)

Présenté à l'Académie royale des Sciences de l'institut de France le 8. Mars 1824, et approuvé le 22. Janvier 1826, par une commission composée de M. M. Legendre, Ampère et Cauchy rapporteur.

(Par Mr. *J. V. Poncelet*, Capitaine au Corps Royal du Génie.)

Discours préliminaire.

Dans le Traité que j'ai publié **) l'année dernière sur les propriétés projectives des figures, je me suis moins attaché à faire un recueil de théorèmes et de problèmes de Géométrie, qu'à poser des principes généraux et féconds, à l'aide desquels ou pût aborder les uns et les autres pour ainsi dire sans hésitation, et à la manière dont cela se pratique dans l'application de l'Algèbre à la Géométrie, dite Analyse des Coordonnées. Je crois avoir mis, en effet, tout lecteur géométre en état de découvrir, par lui-même, et de démontrer au besoin, cette foule de propositions qui appartiennent aux figures composées, en général, de points, de droites, de sections coniques, de plans et de surfaces du second ordre quelconques, propositions qu'à cause de leur élégante simplicité et de leur utilité dans les arts, les anciens, aussi bien que les modernes, ont cultivées avec une sorte de prédilection, et qui pour la plupart et jusqu'à ces derniers temps, avoient été traitées par des méthodes si restreintes, si différentes les unes des autres et souvent si pénibles, qu'il étoit comme impossible d'en saisir l'ensemble et d'en deviner la commune origine.

Qu'il me soit permis ici de fixer un instant l'attention de l'Académie sur quelques uns de ces principes généraux, qu'on n'a point encore

*) Ce mémoire n'a été publié jusqu'ici. Note du red.

**) Ce Mémoire, redigé dans le courant de l'année 1823, a été remis à Mr. Arago vers la fin de Novembre, même année, lors de son séjour à Metz. On peut voir, à la page 349. du Tome XVI. des *Annales de Mathématiques*, publiées par M. Gergonne, le rapport qui en a été fait à l'Académie royale des sciences, par M. Cauchy. Note de l'auteur.

assez appréciés peut-être, et qui me paroissent aussi neufs qu'importans en Géométrie; cet exposé succint répandra quelque jour sur l'objet des recherches qui m'occupent actuellement, et m'y conduira de la manière la plus naturelle et la plus philosophique.

Parmi ces principes, je placerai en première ligne, par l'étendue des conséquences qui en dérivent, ceux qui se rattachent à la doctrine des projections, et à l'aide desquels on transforme des figures très générales en d'autres tout à fait particulières et vice versa; de telle sorte que les propriétés des unes étant connues, on en conclut, sur le champ, les propriétés des autres, du moins celles de ces propriétés dont la nature est assez générale pour se conserver dans les diverses projections centrales de la figure, et que, pour cette raison, j'ai nommées projectives dans l'ouvrage déjà cité.

Le caractère de ces sortes de propriétés n'étoit pas difficile à établir pour ce qui concerne les relations purement descriptives ou graphiques; il se reconnoit toujours au simple énoncé, et j'ai donné d'ailleurs les loix des modifications qu'il éprouve dans les cas particuliers où certains objets s'éloignent à l'infini, ou prennent des situations déterminées, telles que celles du parallèlisme et de l'asymptotisme.

Quant aux relations purement métriques ou concernant les rapports de mesure de lignes, leurs caractère de projectibilité, si je puis m'exprimer ainsi, ne pouvoit être présenté d'une manière entièrement générale, à cause de la complication des expressions, et j'ai dû me borner à l'établir pour une classe particulière de relations métriques, et cependant encore très étendue, puisqu'elle comprend tout ce qu'on connoît actuellement sur les propriétés projectives des figures, et qu'elle en indique une infinité d'autres qui ne le sont pas encore. J'ai même lieu de croire qu'il n'est aucune relation métrique projective, qui ne puisse être ramenée à cette classe particulière par des transformations convenables de calcul *). Mais cette restriction même est un grand avantage, puisqu'indépendamment du caractère de simplicité qu'elle imprime aux relations métriques, elle les rend encore aptes à demeurer applicables, non plus seulement aux projections ou perspectives ordinaires de la figure, mais aux projections sphériques faites du centre de la sphère et

*) Voyez la note II. à la fin de ce Mémoire.

pour lesquelles les simples distances sont remplacées par les sinus des arcs de grands cercles correspondans, et à cette espèce de projection beaucoup plus générale que j'ai nommée, faute d'expressions convenables, perspective dans un plan ou plane, et perspective dans l'espace ou en relief; genre de projections sur lesquelles on n'avoit encore rien donné, rien écrit, et qui mérite cependant toute l'attention des géomètres, et particulièrement celle des sculpteurs, qui manquent encore de préceptes rigoureux et généraux pour le tracé de cette espèce de tableaux qu'on est convenu de nommer bas-reliefs.

En effet, je crois avoir établi ces préceptes dans le supplément placé à la fin de mon ouvrage, et, de la même manière que j'avois montré, dès la première partie, comment, par la projection centrale ordinaire, on peut ramener les figures composées de sections coniques et de lignes concourantes, en d'autres beaucoup plus élémentaires composées uniquement de cercles et de droites parallèles, j'ai aussi établi, dans ce supplément, les moyens d'étendre aux surfaces du second ordre en général, et à l'aide de la perspective-relief, les propositions qui concernent simplement les sphères et systèmes de sphères; et je crois en avoir montré d'assez belles applications pour faire saisir l'esprit général de la méthode, et en faire apprécier toute l'utilité et l'importance.

Un autre principe très étendu, auquel peut-être on n'avoit pas assez accordé d'attention dans la Géométrie rationnelle, c'est le principe de continuité, en vertu duquel on donne aux différentes propositions de la Géométrie, l'extension et la généralité qui leur manquent d'ordinaire, d'après la manière restreinte dont il arrive souvent qu'on envisage les figures et les résultats des raisonnemens qu'on leur applique. L'admission et l'emploi de la loi de continuité m'étoient tout-à-fait indispensables pour donner aux principes de la doctrine des projections et aux diverses conséquences qui en dérivent, la certitude et l'étendue nécessaires, outre qu'ils offroient les moyens d'interprêter et d'introduire ouvertement en Géométrie, la considération des infinis et des imaginaires qui jouent un rôle si important et si nécessaire dans l'analyse algébrique, et on peut le dire, dans toutes les applications du calcul. La conséquence de l'admission de la continuité a été la théorie des sécantes et des cordes idéales et, de tout objet qui, sans cesser d'exister effectivement dans les transformations d'une même figure, a pourtant

cessé de dépendre d'une manière purement géometrique, d'autres objets auxquels il se rapportoit, et qui le définissoient ou le construisoient dans la figure primitive.

Enfin, je signalerai un dernier principe, que je n'ai pas dû ni voulu exposer avec toute sa généralité qui lui est propre, dans le Traité des propriétés projectives, et qui constitue ce que j'ai nommé la Théorie des polaires réciproques, par analogie à ce que les géometres avoient déjà appelé le pôle et la polaire des lignes et des surfaces du second ordre.

Au premier aperçu, on pourroit croire que le principe dont il s'agit est moins général et moins vaste que les précédens, en ce qu'il ne constitueroit qu'une théorie particulière relative aux lignes et aux surfaces du second ordre; mais on se tromperoit étrangement; car il est tel qu'au simple énoncé d'une proposition suffisamment générale de l'étendue, ou pour m'énoncer avec plus de précision, d'une relation projective et de situation, on est toujours en état d'en assigner, sur le champ, une autre toute différente, toute aussi générale et qu'il seroit souvent très difficile d'établir par des moyens directs, à moins toute fois que la proposée ne soit elle-même la réciproque, ce dont il y a des exemples.

J'ai exposé les premiers élémens de cette doctrine, ainsi généralisée, dans un numéro des Annales de Mathématiques *), en partant de quelques théorêmes déjà précédemment établis par les géomètres sur les pôles et polaires des lignes et surfaces du second ordre, théorêmes qui sont d'ailleurs une conséquence très simple des principes généraux de la projection centrale combinés avec la loi de continuité; et je ne connois que le Rédacteur de ce recueil, Mr. Gergonne, qui s'en soit servi depuis **) pour établir la proposition réciproque d'un fort beau théorême dû à Mr. Coriolis, répétiteur à l'école polytechnique, lequel s'étoit contenté simplement d'en faire insérer l'énoncé dans ces mêmes Annales.

Il me seroit impossible de donner ici une idée tant soit peu générale de la théorie des polaires réciproques, sans entrer dans des détails qui excéderoient les bornes que je me suis prescrites et que je ne dois pas dépasser quant à présent; je me contenterai donc de renvoyer aux ouvrages cités, en remarquant toute fois que je n'en ai présenté là qu'une

*) Tome VIII, année 1818, page 201.

**) ibid. Tome XI, année 1821, page 335.

indication très rapide, fort incomplette et qui suffisoit a l'objet des recherches que j'y avois en vue. Je n'y ai même fait mention uniquement que de ce qui concerne la réciprocité des relations graphiques ou descriptives qui subsistent entre la figure primitive et sa dérivée; or il est très facile d'étendre toute cette doctrine aux relations purement métriques qui rentrent dans la classe de celles que j'ai nommé projectives, et c'est ce que je me propose de faire bientôt, quand j'en viendrai à exposer les propriétés des lignes et des surfaces courbes géométriques, dont la démonstration repose nécessairement sur la théorie des polaires réciproques.

C'est là aussi que j'aurai occasion de développer, avec toute l'étendue qui leur est propre, les principes de la Théorie des transversales établis par Mr. Carnot dans la Géométrie de position, et que jusqu'ici on n'avoit guère appliqués qu'aux systèmes de lignes droites et aux sections coniques. J'ai dû me borner, dans le Traité des propriétés projectives, à faire voir comment les principes fondamentaux et déjà connus de cette théorie pourroient se démontrer directement à l'aide des considérations de la perspective ou projection centrale, et je devois éviter d'en déduire des conséquences des applications dont l'exposé eût pu paroître étranger au but général de l'ouvrage et m'eut entrainé dans des développemens trop considérables. Je ne saurois d'ailleurs me proposer, quant à présent, de présenter à l'académie, une notice, même sommaire, des résultats auxquels je suis ainsi parvenu; cette notice seroit ici prématurée et conviendra mieux à l'époque où je serai en situation de lui offrir le travail lui-même; mon but actuel est seulement de mettre sous ses yeux, un aperçu général des efforts que j'ai faits jusqu'àprésent et que je me propose encore de faire, pour agarandir le domaine, déjà si vaste, de la Géométrie rationnelle, et surtout pour lui créer des ressources, des méthodes universelles qui paraissent encore lui manquer, et sembleroient plus particulièrement appartenir à la Géométrie analytique.

En effet, on a dû s'apercevoir facilement, d'après ce qui précède, que la doctrine des propriétés projectives, celle de la perspective en relief, le principe ou la loi de continuité, enfin la Théorie des polaires réciproques et la Théorie des transversales étendue aux lignes et surfaces courbes, ne forment pas simplement des clas-

ses, plus ou moins étendues, de problêmes et de théorêmes, mais constituent proprement, pour la Géométrie pure, des principes, des méthodes d'investigation et d'invention, des moyens d'extension et d'exposition, dans le genre de ceux qu'on a nommés principes d'exhaustion, méthode des infiniment petits etc.

Dans la théorie des lignes et des surfaces géométriques, que je me propose de faire paraître par portions et successivement, je n'adopterai aucune de ces méthodes d'une manière exclusive; je les mettrai toutes indifféremment à contribution selon l'avantage qu'elles pourront offrir dans chaque cas, et je montrerai ainsi l'étendue des ressources qui leur sont propres, et des conséquences que l'on en peut déduire. Mais, comme la théorie des courbes et des surfaces géometriques est étroitement liée à la doctrine du centre des moyennes harmoniques, qui est proprement une généralisation de celle du centre des moyennes distances; que cette doctrine n'est point connue et n'a été enseignée nulle part, je débute par un premier mémoire qui en renferme les principes les plus utiles et les plus remarquables, et dont je me contenterai de donner ici une notion aussi succincte qu'il me sera possible de le faire.

La proportion harmonique, comme on sait, tire son nom des trois principaux accords de la musique, et elle fait la base de l'échelle diatonique. Transportée dans le domaine de la Géométrie par les anciens et les modernes, elle les a déjà conduits à d'interressantes propriétés des lignes, dont la plupart sont exposées dans le Traité des propriétés projectives; elle semble, en un mot, devoir jouer un rôle brillant et nécessaire dans toutes les questions et propriétés qui ne concernent que la direction indéfinie des lignes et non leur mesure: il est facile, en effet, de démontrer qu'elle remplace partout, en projection, la division en parties égales, qui se présente si fréquemment dans la plupart des figures régulières de la Géométrie.

Supposons qu'à partir d'un même point et sur une même droite, on porte, dans le même sens, trois distances, dont la 1ere moins la 2eme, soit à la 2eme moins la 3eme, comme la 1ere est à la 3eme, ces trois distances seront en proportion harmonique; et, si l'on porte, à partir du même point et toujours dans le même sens, un nombre quelconque de distances, telles que trois quelconques d'entr'elles, qui sont consécutives, forment une proportion harmonique, la suite de toutes ces distances for-

mera ce qu'on nomme une progression harmonique; or on démontre qu'il en sera encore ainsi pour toutes les projections centrales ou perspectives de la figure sur une droite arbitraire. Maintenant, si l'on suppose l'origine commune des segmens harmoniques à l'infini, soit dans la figure primitive, soit dans la projection, les points restans formeront une échelle de parties égales; et pour le dire en passant, c'est cette même propriété qui, dans l'art du dessin, a fait donner à la division en parties harmoniques, le nom d'échelle perspective ou fuyante.

Mr. Brianchon, dans ses applications de la théorie des transversales, a donné quelques uns des propriétés de l'échelle et de la progression harmonique, et j'en indique, dans mon mémoire, plusieurs autres qui étoient indispensables pour établir la théorie du centre des moyennes harmoniques, et qui sont la conséquence assez simple d'une remarque faite par Mac-Laurin, sur la proportion harmonique; savoir: que, „dans une telle proportion, la valeur inverse ou réci-„proque de la seconde des trois distances auxquelles elle se rapporte, „est moyenne arithmétique entre les réciproques de la première et „de la troisième;" il en résulte, en effet, que lorsque des distances ou segmens, comptés d'un même point et sur une même droite, sont en progression harmonique, les réciproques de ces distances sont, de leur côté, en progression arithmétique; ce qui justifie completement la première de ces dénominations, et fournit, à l'instant, le moyen de calculer un terme quelconque de la suite dont le rang est assigné.

Mac-Laurin, qui n'avoit point à examiner les propriétés de la progression harmonique, s'est contenté de déduire de sa remarque, la définition suivante de la moyenne harmonique: „La moyenne harmo-„nique entre un nombre quelconque de quantités est telle que sa recipro-„que est moyenne arithmétique entre toutes celles des autres, prise avec „un signe convenable *)." Il en a déduit en outre, une construction assez simple pour déterminer cette moyenne harmonique ou cette somme de réciproques, dans le cas de plusieurs distances ou segmens rangés sur une même droite et comptés d'un même point; son but étoit d'arriver, par là, à un théorême fort beau de Côtes sur les courbes algébriques et à quelques autres analogues sur la courbure de ces lignes, qui se

*) Voyez le *Traité des courbes géométriques*, par Mac-Laurin.

présentent comme des corollaires très particuliers du résultat de mon travail.

Tel est le point d'où je suis parti pour établir la doctrine du centre de moyennes harmoniques, qui fait le sujet du mémoire que j'ai l'honneur de présenter à l'Académie, et voici maintenant à quoi je suis parvenu.

J'ai commencé par transformer la relation qui définit la moyenne harmonique, d'après Mac-Laurin, en une autre plus générale et qui fût immédiatement projective dans le sens que j'ai précédemment indiqué; j'ai de suite été conduit à reconnoître que le point qui répond a cette moyenne, en supposant toujours les distances ou segmens comptés sur une même droite et d'une même origine, devenoit proprement le centre de moyennes distances des points appartenans aux autres, toutes les fois qu'on venoit à supposer l'origine commune à l'infini, soit dans la figure primitive, soit dans ses projections; rapprochement qui étoit impossible d'après la définition de Mac-Laurin, et qui m'a conduit à nommer, par analogie, le point en question, centre de moyennes harmoniques des points proposés, par rapport à l'origine commune d'où se mesurent les segmens harmoniques.

Dès lors je me suis trouvé en état de traduire, en les généralisant, soit les définitions, soit les propriétés qui concernent le centre des moyennes distances d'un nombre quelconque de points situés arbitrairement dans un plan ou dans l'espace; et pour le faire, je n'ai eu besoin constamment que de me servir des principes établis dans le Traité des propriétés projectives. J'ai obtenu, de cette manière, ce que j'ai déjà nommé précédemment la Théorie du centre des moyennes harmoniques. Mais ce n'est pas tout, comme les Géomètre sont parvenus, dans ces derniers temps, à étendre la Théorie du centre des moyennes distances au cas où les moyennes arithmétiques sont prises relativement à des coefficiens numériques quelconques, j'en ai fait tout autant pour celle du centre de moyennes harmoniques, et je suis arrivé ainsi à des conséquences qui offrent un nouveau champ de spéculations et de découvertes aux géomètres, et qui, dans des mains plus habiles, ne tarderont peut-être pas à produire des applications aussi heureuses qu'utiles.

Quoiqu'il en soit, j'ai exposé dans la dernière partie de mon mémoire, quelques unes des propriétés qui découlent de la Théorie du centre

des moyennes harmoniques, pour les systêmes de points, de droites et de plans, et, afin de ne pas en multiplier inutilement le nombre, je me suis borné à celles dont la nature générale permet de les appliquer immédiatement aux courbes et aux surfaces géométriques d'un ordre quelconque; mettant ainsi ceux qui liront ce Mémoire en état de pressentir cette extension, et de se familiariser, peu à peu, avec ce qu'elle pourroit, au premier aspect, avoir de trop difficile ou de trop abstrait.

De la division harmonique des lignes droites, des progressions, des échelles et des moyennes harmoniques.

Il existe entre la division harmonique et la division en parties égales, une analogie très grande, qui conduit à une foule de conséquences et de rapprochemens curieux: avant de l'exposer dans toute sa généralité, il convient de l'éxaminer dans le cas le plus simple, celui d'une droite ou distance, portant uniquement un point de division entre ses extrémités; mais, attendu que les propriété relatives à ce cas sont généralement connues des géomètres, je ne ferai que rappeler celles qui me sont nécessaires, et renverrai pour plus de développement au „Traité des propriétés projectives des figures."

1. Soit AB (Fig. 1.) une droite ou distance quelconque; prenons sur cette droite et son prolongement, les points Q et P, tels qu'on ait

$$\frac{PA}{PB} = \frac{QA}{QB} = \frac{PQ-PA}{PB-PQ},$$

la distance AB sera divisée harmoniquement en P et Q, et cette définition devra s'étendre au cas même où l'un quelconque des points proposés sera supposé à l'infini; mais alors le rapport des segments qui lui appartiennent dans la relation ci-dessus sera l'unité; donc il en sera de même du rapport des deux autres segmens restans. Que P, par exemple, passe à l'infini, on aura, d'après cette définition, $QA = QB$; et parconséquent le point Q, conjugué à P, divisera en parties égales la distance AB. Ainsi la division en parties harmoniques d'une droite, n'est qu'une extension de la division en parties égales, ou plutôt celle-ci est comprise implicitement dans l'autre, pourvu qu'on restitue le point de division qui est passé à l'infini, et qui est conjugué au point milieu. On admet

d'ailleurs que les droites qui renferment un même point situé à l'infini sont parallèles.

2. Cela posé, projetons, d'un point quelconque S, les quatre points A, B, P, Q ainsi définis, sur une droite arbitraire $P'B'$, on prouve aisément que les noveaux points A', B', P', Q' conservent entr'eux la relation harmonique

$$\frac{P'A'}{P'B'} = \frac{Q'A'}{Q'B'} = \frac{P'Q' - P'A'}{P'B' - P'Q'};$$

c'est-à-dire que cette relation est projective (voyez plus loin, l'art. 18.). Or, d'après ce qui précède, cela doit s'étendre au cas même pour lequel l'un quelconque des points proposés, ou l'un quelconque des points de la projection, passe à l'infini; ce qui exige alors que la transversale qui porte ce point soit parallèle à la projetante; donc la divivision harmonique se changeant, pour cette transversale, en division de parties égales, on voit que l'une de ces divisions est la perspective ou projection centrale de l'autre, et peut servir directement à la construire.

3. Mais on peut pousser plus loin ce rapprochement, en mettant la relation harmonique sous une forme d'abord indiquée par Mac-Laurin (Traité des courbes géométriques.).

En effet, de la proportion,

$$\frac{PA}{PB} = \frac{PQ - PA}{PB - PQ},$$

on tire immédiatement

$$2PA.PB = PB.PQ + PA.PQ,$$

ou, en divisant tout par $2PA.PB.PQ$,

$$\frac{1}{PQ} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{PA} + \frac{1}{PB}\right);$$

relation entièrement analogue à celle qui a lieu pour la division en parties égales, lorsqu'on remplace le point P par un point quelconque p (Fig. 2.), et les rapports $\frac{1}{PQ}$, $\frac{1}{PA}$, $\frac{1}{PB}$ par les simples segments pQ, pA, pB; on a effectivement, en supposant que Q soit le milieu de AB:

$$pQ = \tfrac{1}{2}(pA + pB).$$

4. En nommant, avec Mac-Laurin, réciproque d'une ligne son rapport inverse à l'unité de mesure, la relation ci-dessus pour la division harmonique, exprimera que la réciproque de PQ est moyenne arithmétique entre les réciproques des segmens PA et PB; c'est pourquoi, quand une ligne

AB (Fig. 1.) est divisée harmoniquement aux points P et Q, ou que les segmens PA, PQ et PB, relatifs au point P, sont en proportion harmonique, on dit que le segment PQ est moyen harmonique entre les deux autres PA et PB; et comme, dans le cas ci-dessus de la division en parties égales, le point Q est nommé le centre des moyennes distances de A et de B, nous pourrons dire également que, dans celui de la division harmonique, le point Q est le centre des moyennes harmoniques des points A et B; et cela non d'une manière absolue, mais seulement par rapport au point P qui sert d'origine commune aux segmens harmoniques.

5. De plus, d'après ce qui a été observé ci-dessus (2.), en mettant la figure en projection ou perspective sur une droite quelconque $P'B'$ (Fig. 1.), le point Q', qui répond à celui dont il s'agit, sera encore un centre de moyenne harmonique par rapport aux points A' et B' de la projection, et relativement au point P' qui sert d'origine aux nouveaux segmens: ainsi, dans le faisceau des projetantes SA, SB, SP, SQ, on pourra nommer la droite SQ l'axe des moyennes harmoniques de SA et SB, par rapport à la droite SP, qui sera l'axe des origines harmoniques: la transversale $P'B'$ étant d'ailleurs prise parallèlement à ce dernier axe, tous ses points Q' deviendront des centres de moyennes distances d'après l'art. 2. déjà cité.

6. Pour completter l'analogie entre les deux relations

$$\frac{1}{PQ} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{PA} + \frac{1}{PB}\right), \quad pQ = \tfrac{1}{2}(pA + pB),$$

on peut remarquer qu'elles éprouvent dans leurs termes, les mêmes variations de signes pour les mêmes changemens de positions des points qui leur correspondent.

Supposons, par exemple, que, dans le cas de la division harmonique (Fig. 1.), le point P passe, d'un mouvement continu, de la gauche à la droite de A, à l'instant où la distance PA deviendra nulle, le segment QA devra (1.) l'être aussi, de même que PQ; par conséquent le point Q passera, à son tour, de la droite à la gauche du point A, et les distances PA, PQ, ayant changé de sens, devront changer en même temps de signe dans la relation ci-dessus, qui deviendra ainsi

$$-\frac{1}{PQ} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{PA} + \frac{1}{PB}\right) \text{ ou } \frac{1}{PQ} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{PA} - \frac{1}{PB}\right)$$

pour le cas où le point P auroit pris la place du point Q, et réciproque-

d'ailleurs que les droites qui renferment un même point situé à l'infini sont parallèles.

2. Cela posé, projetons, d'un point quelconque S, les quatre points A, B, P, Q ainsi définis, sur une droite arbitraire $P'B'$, on prouve aisément que les noveaux points A', B', P', Q' conservent entr'eux la relation harmonique

$$\frac{P'A'}{P'B'} = \frac{Q'A'}{Q'B'} = \frac{P'Q' - P'A'}{P'B' - P'Q'};$$

c'est-à-dire que cette relation est projective (voyez plus loin, l'art. 18.). Or, d'après ce qui précède, cela doit s'étendre au cas même pour lequel l'un quelconque des points proposés, ou l'un quelconque des points de la projection, passe à l'infini; ce qui exige alors que la transversale qui porte ce point soit parallèle à la projetante; donc la divivision harmonique se changeant, pour cette transversale, en division de parties égales, on voit que l'une de ces divisions est la perspective ou projection centrale de l'autre, et peut servir directement à la construire.

3. Mais on peut pousser plus loin ce rapprochement, en mettant la relation harmonique sous une forme d'abord indiquée par Mac-Laurin (Traité des courbes géométriques.).

En effet, de la proportion,

$$\frac{PA}{PB} = \frac{PQ - PA}{PB - PQ},$$

on tire immédiatement

$$2PA.PB = PB.PQ + PA.PQ,$$

ou, en divisant tout par $2PA.PB.PQ$,

$$\frac{1}{PQ} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{PA} + \frac{1}{PB}\right);$$

relation entièrement analogue à celle qui a lieu pour la division en parties égales, lorsqu'on remplace le point P par un point quelconque p (Fig. 2.), et les rapports $\frac{1}{PQ}$, $\frac{1}{PA}$, $\frac{1}{PB}$ par les simples segments pQ, pA, pB; on a effectivement, en supposant que Q soit le milieu de AB:

$$pQ = \tfrac{1}{2}(pA + pB).$$

4. En nommant, avec Mac-Laurin, réciproque d'une ligne son rapport inverse à l'unité de mesure, la relation ci-dessus pour la division harmonique, exprimera que la réciproque de PQ est moyenne arithmétique entre les réciproques des segmens PA et PB; c'est pourquoi, quand une ligne

AB (Fig. 1.) est divisée harmoniquement aux points P et Q, ou que les segmens PA, PQ et PB, relatifs au point P, sont en proportion harmonique, on dit que le segment PQ est moyen harmonique entre les deux autres PA et PB; et comme, dans le cas ci-dessus de la division en parties égales, le point Q est nommé le centre des moyennes distances de A et de B, nous pourrons dire également que, dans celui de la division harmonique, le point Q est le centre des moyennes harmoniques des points A et B; et cela non d'une manière absolue, mais seulement par rapport au point P qui sert d'origine commune aux segmens harmoniques.

5. De plus, d'après ce qui a été observé ci-dessus (2.), en mettant la figure en projection ou perspective sur une droite quelconque $P'B'$ (Fig. 1.), le point Q', qui répond à celui dont il s'agit, sera encore un centre de moyenne harmonique par rapport aux points A' et B' de la projection, et relativement au point P' qui sert d'origine aux nouveaux segmens: ainsi, dans le faisceau des projetantes SA, SB, SP, SQ, on pourra nommer la droite SQ l'axe des moyennes harmoniques de SA et SB, par rapport à la droite SP, qui sera l'axe des origines harmoniques: la transversale $P'B'$ étant d'ailleurs prise parallèlement à ce dernier axe, tous ses points Q' deviendront des centres de moyennes distances d'après l'art. 2. déjà cité.

6. Pour completter l'analogie entre les deux relations

$$\frac{1}{PQ} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{PA} + \frac{1}{PB}\right), \quad pQ = \tfrac{1}{2}(pA + pB),$$

on peut remarquer qu'elles éprouvent dans leurs termes, les mêmes variations de signes pour les mêmes changemens de positions des points qui leur correspondent.

Supposons, par exemple, que, dans le cas de la division harmonique (Fig. 1.), le point P passe, d'un mouvement continu, de la gauche à la droite de A, à l'instant où la distance PA deviendra nulle, le segment QA devra (1.) l'être aussi, de même que PQ; par conséquent le point Q passera, à son tour, de la droite à la gauche du point A, et les distances PA, PQ, ayant changé de sens, devront changer en même temps de signe dans la relation ci-dessus, qui deviendra ainsi

$$-\frac{1}{PQ} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{PA} + \frac{1}{PB}\right) \text{ ou } \frac{1}{PQ} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{PA} - \frac{1}{PB}\right)$$

pour le cas où le point P auroit pris la place du point Q, et réciproque-

nient. C'est en effet, ce dont on peut s'assurer directement à l'aide de la relation primitive; car, en la mettant sous cette forme

$$\frac{QA}{QB} = \frac{PQ - QA}{PQ + QB},$$

on en tire

$$\frac{1}{QP} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{QA} - \frac{1}{QB}\right)$$

résultat qui tient d'ailleurs à ce que, d'après la définition ci-dessus (1.) les points Q et P joissent de propriétés réciproques à l'égard de A et de B.

D'après cela, on voit que la règle des signes, pour la relation harmonique, est que, en considérant toujours comme positif le terme $\frac{1}{PQ}$, les termes $\frac{1}{PA}$, $\frac{1}{PB}$ qui entrent dans le second membre de cette relation, devront être affectés du signe + ou du signe —, selon que, par rapport à l'origine P, les points aux quels ils répondent seront placés du même coté que le point Q ou d'un côté différent; or c'est ce qui a lieu précisement (Fig. 2.) dans la relation

$$pQ = \tfrac{1}{2}(pA + pB).$$

Donc la même règle des signes est applicable à ces deux espèces de relations, et par conséquent elles conserveront une forme semblable pour la même disposition des points à l'égard des origines P et p auxquelles elles se rapportent; seulement, en conservant ses points A et B, on ne sauroit changer, dans le cas de la division harmonique, l'origine P sans que le point Q ne change en même temps, au lieu qu'il reste fixe dans celui de la division en parties égales.

7. Les choses ainsi entendues, supposons (Fig. 1.) qu'on divise en deux parties égales, au point Q, la distance PQ moyenne harmonique entre PA et PB, on aura donc,

$$\frac{2}{PQ} = \frac{1}{PQ_1} = \frac{1}{PA} + \frac{1}{PB};$$

et parconséquent, si l'on mène par le point P une suite de transversales PAB, $PA''B''$ . . . . dans l'angle ASB, puis qu'on prenne, sur chacune d'elles, des points Q_1, Q_1'' . . . . tels qu'on ait, en égard à la règle des signes posée ci-dessus,

$$\frac{1}{PQ_1} = \frac{1}{PA} + \frac{1}{PB}, \quad \frac{1}{PQ_1''} = \frac{1}{PA''} + \frac{1}{PB''} \ldots\ldots$$

les points ainsi définis seront (2. et 5.) sur une droite Q, Q'', parallèle

à l'axe SQ des moyennes harmoniques des côtés de l'angle ASB, et passant par ses points a et b où chacune des parallèles Pa, Pb à l'un de ses côtés, rencontre l'autre. Car, pour ces positions particulières de la transversale PAB, ou $PA''B''$, le point Q_1, ou Q_1'', se confond avec l'un des points correspondans A ou B, d'après la relation ci-dessus, attendu que l'un des segmens correspondans devient infini.

Or delà résulte un moyen, indiqué par Mac-Laurin, pour construire directement le point Q, lorsqu'on connoit les points, P, A et B. Quant au centre Q des moyennes harmoniques, il est plus simple et plus élégant de le déterminer à l'aide du procédé suivant, qui n'exige que l'emploi de la ligne droite ou de la règle: ayant mené par l'origine P des segmens harmoniques, une transversale arbitraire $PA''B''$ dans l'angle des projetantes SA, SB, on joindra, par de nouvelles droites AB'', BA'', les points ainsi obtenus sur ces projetantes avec les points donnés A, B, et le point S' de leur intersection appartiendra à la projetante SQ du point Q cherché. Il est visible, en effet, que, si l'on substitue l'angle $AS'B$ à l'angle ASB, et la droite PS' à la droite PS, l'axe des moyennes harmoniques (5.) de cet angle, par rapport à P, et qui renferme nécessairement Q et Q'', devra aussi passer par le sommet S', et se confondre par conséquent avec celui SQ de l'angle ASB; on concluroit d'ailleurs la même chose en observant que la figure peut être mise en projection ou perspective, sur un nouveau plan, de façon que P passe à l'infini, ou que les droites PAB, $PA''B''$ deviennent parrallèles, et c'est ainsi que nous avons démontré cette proposition généralement connue, a l'art. 154. du Traité des propriétés projectives.

8. Considérons maintenant une droite af (Fig. 3.), divisée en un nombre quelconque de parties égales aux points b, c, d, e . . . .; le point à l'infini de cette droite pourra être regardé (1.) comme l'origine commune des segmens harmoniques relatifs à trois points de division consécutifs quelconques, en y comprenant les points extrêmes a et f; donc (2.) si l'on projette le systême de tous ces points sur une droite arbitraire $a'f'$, en a', b', c', d', e', f', il en sera de même du point p' qui est la projection du point à l'infini de af, à l'égard de trois points de division consécutifs quelconques de $a'f'$; c'est-à-dire que les segmens relatifs à p' et à ces points formeront une proportion harmonique; donc la suite de tous les segmens pa', pb', pc', pd' . . . . pf' formera une pro-

portion harmonique continue; et l'on pourra dire, avec Mr. Brianchon (Application de la théorie des transversales etc. §. 68.) que ces segmens forment une progression harmonique.

Pour justifier encore davantage cette expression, nous remarquerons que, d'après l'art. 2. et les articles suivans, il doit régner entre les réciproques des segmens qui répondent au point p' et aux différens points de division de $a'f'$, la même relation qu'entre les simples distances d'un point quelconque p de af, aux différens points de division a, b, c . . . . f; mais ces dernières forment une progression arithmétique, donc il en est de même des réciproques qui leur correspondent.

En effet, on aura pour la droite af et le point arbitraire p,

$$2pb = pa + pc, \quad 2pc = pb + pd, \quad 2pd = pc + pe, \quad \ldots .$$

ou

$$pb - pa = pc - pb = pd - pb = pe - pd \ldots .,$$

comme aussi l'on a (3.), pour la droite af' par rapport à l'origine des divisions harmoniques p',

$$\frac{2}{p'b'} = \frac{1}{p'a'} + \frac{1}{p'c'}, \quad \frac{2}{p'c'} = \frac{1}{p'b'} + \frac{1}{p'd'}, \quad \frac{2}{p'd'} = \frac{1}{p'c'} + \frac{1}{p'e'}, \quad \ldots .$$

ou

$$\frac{1}{p'b'} - \frac{1}{p'a'} = \frac{1}{p'c'} - \frac{1}{p'b'} = \frac{1}{p'd'} - \frac{1}{p'b'} = \frac{1}{p'e'} - \frac{1}{p'd'} \ldots .$$

9. Il résulte de ce rapprochement, en particulier, qu'on pourra calculer un terme quelconque de la progression harmonique, par les mêmes règles que l'on calcule un terme de la progression arithmétique, au moyen des extrêmes, quand son rang et assigné.

Supposons, par exemple, que la droite af soit divisée en $m+n$ parties égales aux points b, c, d, ..., et qu'il y ait parconséquent $m+n+1$ segmens pa, pb, pc, ... pf correspondans au point arbitraire p; proposons nous de rechercher le segment pd du point d qui appartient à la n^e partie à compter de a, nous aurons, dans le cas dont il s'agit, des divisions égales,

$$pd = pa + ad = pa + \frac{n}{m+n}af = pa + \frac{n}{m+n}(pf - pa)$$

ou

$$pd = \frac{m}{m+n}pa + \frac{n}{m+n}pf = \frac{1}{m+n}(mpa + npf);$$

donc on aura aussi, dans le cas de la division harmonique, c'est-à-dire pour la perspective $a'f'$,

$$\frac{1}{p'd'} = \frac{1}{m+n}\left(\frac{m}{p'a'} + \frac{n}{p'f'}\right),$$

relation qui, en vertu de la continuité, doit même s'étendre au cas où les nombres m et n sont incommensurables entr'eux, et qui servira immédiatement à résoudre tous les problêmes analogues à ceux où il s'agit de diviser des distances en parties proportionnelles à des nombres donnés. On voit, en outre, qu'elle a une forme tout-à-fait semblable à celle (3.) qui concerne la simple division harmonique de $a'f'$ en p' et d'; si l'on y suppose en effet, m et n égaux à l'unité, on retombera sur celle dont il s'agit. C'est pourquoi on pourroit dire que le segment $p'd'$, relatif au point de division d', est moyen harmonique entre les segmens $p'a'$ et $p'f'$ pour les coëfficiens m et n, et que le point d' lui-même est le centre des moyennes harmoniques de a' et f' relativement à p' et à ces mêmes coëfficiens.

Enfin il résulte encore de ce qui précède que les points extrêmes a' et f' d'une échelle harmonique étant donnés, ainsi que le nombre des parties dont elle se compose et l'origine p' des segmens harmoniques, on pourra construire successivement, à l'aide du calcul, et sans recourir à l'échelle des divisions égales af, l'échelle harmonique dont il s'agit, à laquelle son grand usage dans la perspective a fait donner le nom d'Echelle perpective ou fuyante *).

10. On déduiroit beaucoup d'autres conséquences remarquables de ce qui précède; nous nous contenterons d'observer que, pour se oonstruire une échelle harmonique sur un dessin, ou pour diviser une ligne $a'f'$ en un certain nombre de parties harmoniques par rapport à un point quelconque p' pris pour origine, et qu'on nomme quelque fois point de fuite dans les Traités de perspective, il n'est point indispensable de recourir au calcul, comme nous venons de le faire, ni même de construire d'abord une échelle ordinaire de parties égales comme l'indique la Fig. 3.; des opérations purement linéaires ou qui s'exécutent avec la régle seule, suffisent pour atteindre le même but.

Remarquons d'abord que, quand une droite $a'f'$ est divisée en parties harmoniques aux points b', c', d', e', ..., par rapport à un point

*) Je ne crois pas que ces dernières propriétés de l'échelle harmonique aient encore été remarquées des géomètres; elle en possède quelques autres intéressantes, auxquelles les précédentes nous conduiroient aisément, mais dont l'examen nous écarteroit de notre objet. On peut consulter, à cet égard, le Mémoire de Mr. Brianchon, déjà cité art. 8. ci-dessus.

p' qui sert d'origine aux segmens harmoniques, la même chose aura lieu encore (2. et 8.) dans toutes ses projections centrales ou perspectives sur une autre droite quelconque; c'est-à-dire que, quel que soit le centre de projection s que l'on ait choisi en particulier, si l'on coupe le faisceau des projetantes sp', sa', sb', ... sf' qui lui correspondent par une droite arbitraire, le système de points qui en résulte, forme encore une échelle harmonique, ayant pour origine le point répondant à p'; c'est-à-dire, en un mot, que l'échelle harmonique est projective. Si, de plus, on prend pour transversale une droite af parallèle à la projetante sp', ou que l'origine des segmens harmoniques passe à l'infini dans la projection, l'échelle harmonique se changera en une échelle ordinaire de parties égales (2. et 8.).

11. Supposons donc (Fig. 4.) que a' et b' étant les deux premiers points de division d'une échelle harmonique, et p l'origine des segmens harmoniques ou le point de fuite, il s'agisse de construire successivement toutes les autres parties de l'échelle, prolongée de part et d'autre de a' jusqu'à l'infini: on tirera arbitrairement les deux droites pe'', ps'' par le point p, et l'on joindra, par d'autres droites $a''b'$, $a''a'$, un point quelconque a'' de pe'' aux points donnés a' et b', ces droites iront déterminer sur ps'' deux points s' et s'', dont on se servira ainsi qu'il suit pour construire l'échelle harmonique $a'b'c'd'$.....

On tirera $s''b'$ qui rencontrera pe'' en b''; traçant $s'b''$, elle ira rencontrer pf' au 3e point de division harmonique c'; traçant ensuite $c's''$, elle rencontrera pe'' en c'', et $s'c''$ ira construire le 4e point de division d'; il est évident que l'on pourra poursuivre cette opération à volonté, soit à droite, soit à gauche du point a', ce qui donnera l'échelle harmonique demandée a', b', c', d', ... *).

En effet, si l'on met la figure en projection sur un nouveau plan parallèle à $ps's''$, c'est à dire tel que cette droite passe à l'infini, les quadrilatères $a'b'a''b''$, $b'c'b''a''$, ... seront des parallèlogrammes, et par conséquent la droite $a'f'$ sera une échelle ordinaire de parties éga-

*) Ces constructions sont entièrement analogues à celles que M. Brianchon a données pour la division d'une distance en parties égales dans les Applications de la Théorie des transversales (voy. §. 51. et 52.); mais, dans ce cas, elle ne peuvent s'effectuer uniquement avec la règle ou des alignemens.

les pour la nouvelle figure, de sorte qu'elle en est une de parties harmoniques pour l'ancienne.

12. Supposons maintenant que, s'étant donné une distance quelconque af, il s'agisse de la diviser en un certain nombre de parties harmoniques relativement au point quelconque p pris pour origine: on tracera arbitrairement une droite pf' passant par p, et l'on construira, comme ci-dessus, une échelle harmonique quelconque $a'b'c'd'\ldots f'$ par rapport à ce point, mais dont le nombre des divisions soit précisément celui des parties qn'on veut obtenir sur af. Cela posé, on tracera les droites aa', ff' qui, par leur intersection, donneront le point s, dont on se servira pour projeter les points de division de l'échelle $a'f'$ sur af. Il est évident, en effet, qu'à cause que la relation harmonique est projective, les points b, c, ... ainsi obtenus seront les points demandés.

Mais si, le nombre de parties harmoniques de af étant $m+n$, on demandoit simplement le point d qui appartient à la n^e partie, comme dans le problême ci-dessus (9.) résolu à l'aide du calcul, ayant d'ailleurs construit l'échelle harmonique $a'f'$, il n'y auroit autre chose à faire qu'à projeter le n^e point de division d' en d sur af, à partir de s.

Ces dernières considérations, quoiquelles nous aient un peu écarté de notre premier objet, nous seront néanmoins utiles pour ce qui concerne la partie des applications.

Du centre des moyennes harmonique des points quelconques rangés en ligne droïte.

13. Jusqu'ici nous nous sommes bornés à comparer la division en parties égales à celle en parties harmoniques; mais on peut étendre plus loin l'objet des ce définitions, en observant, en général, que toutes les relations ou propriétés qui ont pour fondement la division en parties égales, doivent pouvoir se convertir en des relations ou propriétés analogues de la division harmonique; or de cette nature sont évidemment toutes celles qui concernent les centres de moyennes distances.

Soient, par exemple, a, b, c (Fig. 5.) trois points quelconques situés en ligne droite; soit q le centre de moyennes distances de ces points, p un point quelconque pris pour origine des segmens, on aura, comme on sait,

$$pq = \frac{pa+pb+pc}{3},$$

pourvu qu'on ait égard à la règle des signes posée ci-dessus (6.). Projetons les points a, b, c, q sur une droite quelconque $a'd'$, à partir d'un point arbitraire s et soient a', b', c', q' les points de la projection, on peut se demander quel rôle le point q' jouera par rapport aux points a', b', c'. Or je dis qu'en nommant p' le point qui représente, sur $a'c'$, celui à l'infini de ad, et dont la projetante sp' est ainsi parallèle à ad, on aura

$$\frac{1}{p'q'} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{p'a'} + \frac{1}{p'b'} + \frac{1}{p'c'}\right),$$

toujours en ayant égard à la règle des signes qui vient d'être indiquée.

Pour le prouver, il nous suffira de rechercher la manière dont on peut obtenir les points q et q' au moyen de ceux dont ils dépendent respectivement.

Pour le point q, il faut, comme on sait, prendre le milieu x de ab, puis diviser cx en trois parties égales, et prendre le premier point de division q, à partir de x, pour le point demandé; en effet on aura,

$$2px = pa + pb,$$

$$pq = px + \tfrac{1}{3}(pc - px) = \frac{2px + pc}{3} = \frac{pa + pb + pe}{3},$$

Or, pour obtenir ce qui concerne le point q' de la projection, il suffira évidemment de remplacer la division en parties égales par la division harmonique, en prenant p' pour origine; c'est à dire (3. et 9.) que, dans les relations ci-dessus, il faudra simplement remplacer les segmens qui se rapportent au point arbitraire p, par les réciproques de ceux qui répondent au point p', projection de celui à l'infini de ac; on aura donc,

$$\frac{1}{p'q'} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{p'a'} + \frac{1}{p'b'} + \frac{1}{p'c'}\right):$$

ce qui précède montre aussi, d'après l'article 12., comment il faudroit s'y prendre pour construire directement le point q' avec la règle, et sans recourir à la division en parties égales qu'indique la figure.

14. Le cas où l'on remplaceroit les trois points a, b, c par quatre points quelconques seroit encore plus facile à établir. En effet, s'il s'agittoit d'obtenir leur centre des moyennes distances, il suffiroit évidemment de prendre le milieu ou le centre des moyennes distances de deux quelconques de ces points, puis celui des deux autres, puis enfin le centre des moyennes distances des deux centres partiels ainsi trouvés; ce qui donneroit de suite, en nommant d le quatrième point, et conservant d'ailleurs

les mêmes dénominations que ci-dessus,

$$pq = \frac{pa+pb+pc+pd}{4},$$

et parconséquent, en passant à la projection sur une droite quelconque $a'c'$,

$$\frac{1}{p'q'} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{p'a'}+\frac{1}{p'b'}+\frac{1}{p'c'}+\frac{1}{p'd'}\right).$$

En général, on voit que, quel que soit le nombre m des points a, b, c, d, ... rangés sur une même droite, le centre q des moyennes distances de tous ces points sera unique, et tel qu'en le projetant ainsi que ces points, sur une droite quelconque en q', a', b', c', d', ..., et nommant p' le point qui représente celui à l'infini de la proposée abc, on aura

$$\frac{1}{p'q'} = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{p'a'}+\frac{1}{p'b'}+\frac{1}{p'c'}+\frac{1}{p'd'}+\text{etc.}\right),$$

ou

$$\frac{m}{p'q'} = \frac{1}{p'a'}+\frac{1}{p'b'}+\frac{1}{p'c'}+\frac{1}{p'd'}+\text{etc.},$$

pourvu encore qu'on ait égard à la règle des signes posée art. 6. On voit de plus (12.), comment on pourra construire, avec la règle seule et sans recourir aux centres des moyennes distances, le point q' dont il s'agit, quand tous les autres a', b', c, d', ... seront donnés ainsi que le point p' qui sert d'origine commune aux segmens harmoniques; mais cette construction se faisant d'une manière successive et assez pénible, quand le nombre des points donnés est tant soit peu considérable, nous indiquerons plus tard des moyens généraux et simples pour y parvenir.

15. Mac-Laurin, qui a eu à considérer, dans son Traité des courbes géométriques, quelques unes des propriétés du point q' défini par les relations métriques ci-dessus, et qui n'a point aperçu l'analogie qui regnoit entre ce point et le centre des moyennes distances, ni les moyens de déduire l'un de ces points de l'autre, s'y prenoit d'une manière différente pour construire la valeur de $p'q'$: il déterminoit, à l'aide du procédé de l'article 7., le point dont la distance à p' a pour réciproque la somme des réciproques de $p'a'$ et de $p'b'$, c'est à dire $\frac{1}{p'a'}+\frac{1}{p'b'}$, puis le nouveau point dont la distance à p' a pour réciproque la somme des réciproques du point déjà obtenu et du point c', c'est-à-dire $\frac{1}{p'a'}+\frac{1}{p'b'}+\frac{1}{p'c'}$, puis etc.; car, en nommant Q' le dernier point ainsi

obtenu, on aura

$$\frac{1}{p'Q'} = \frac{1}{p'a'} + \frac{1}{p'b'} + \frac{1}{p'c'} + \text{etc.} = \frac{m}{p'q'},$$

et par conséquent $p'q' = mp'Q'$: cette méthoda a, comme on voit, l'inconvénient d'exiger l'emploi de la règle et du compas réunis, au lieu que la précédente n'exige s'implement que celui de la règle.

Mac-Laurin nomme $p'q'$ la moyenne harmonique des segmens $p'a'$, $p'b'$, $p'c'$, ...; nous pourrons donc dire aussi, par analogie, que le point q', projection du centre des moyennes distances des points a, b, c, ... en nombre m, est lui-même le centre des moyennes harmoniques des points a', b', c', ... de la projection, par rapport à p' qui représente le point à l'infini de pc; or cette définition s'accorde parfaitement avec celle de l'art. 4., dont elle n'est guère que l'extension; et, comme ici le faisceau des projetantes sa', sb', sc', ... conserve les mêmes propriétés à l'égard de sp', sq', quelle que soit la transversale $p'c'$, on pourra dire encore que la projetante sq' est l'axe des moyennes harmoniques du faisceau dont il s'agit; et cela non d'une manière absolue, mais seulement par rapport à la projetante sp' qui, à son tour, conservera le nom d'axe des origines harmoniques, et qui, venant à passer à l'infini avec les points, changera évidemment la projetante sq' en un simple axe des moyennes distances.

16. Les relations qui définissent le centre q' (Fig. 5.) des moyennes harmoniques étant projectives (14.), ou telles qu'elles subsistent dans toutes les projections centrales de la figure, on voit que les définitions et propriétés précédentes seront applicables directement à un faisceau quelconque de droites projetantes qui s'appuieroient sur des points donnés en ligne droite, sur leur centre de moyenne harmonique et sur l'origine relative à ce centre; c'est-à-dire que toute transversale déterminera, dans ce faisceau, un nouveau système de points qui auront entr'eux la même corrélation que les premiers, sauf le cas ou la transversale sera parallèle à l'axe des origines, et pour lequel l'origine des segmens harmoniques passant à l'infini, le centre des moyennes harmoniques se changera évidemment en un centre des moyennes distances.

Enfin on voit que si, par l'origine des segmens harmoniques de plusieurs points situés en ligne droite, on mène une droite ou un axe quelconque, et qu'on abaisse, de ces différens points et de leur centre de mo-

yennes harmoniques des ordonnées sur cet axe, qui soient parallèles entr'elles, et à un autre axe arbitraire, celle qui répond au centre de moyennes harmoniques, sera encore la moyenne harmonique de toutes celles qui répondent aux points proposés; propriété qui est entièrement analogue à celle du centre des moyennes distances, si ce n'est que, pour ce dernier, l'origine étant entièrement arbitraire, il en est de même des axes de projection.

17. Au surplus, on peut partir de la définition générale du centre des moyennes harmoniques, pour établir directement ses diverses propriétés, sans recourir aux considérations précédentes, qui d'ailleurs nous paraissent mériter l'attention des géomètres. Or cette nouvelle manière d'envisager la question va nous conduire à d'autres résultats non moins remarquables que les premiers.

Soient a, b, c, d, ... (Fig. 6.) des points quelconques, en nombre m, rangés sur une même droite, et p un point arbitraire de cette droite pris pour origine des segmens; regardons, d'après la règle de l'art. 6., comme positifs tous les segmens qui sont à droite de p, et comme négatifs ceux qui sont dirigés dans le sens contraire. Cela posé si l'on choisit, sur la droite dont il s'agit, un point q tel que

$$\frac{m}{pq} = \frac{1}{pa} + \frac{1}{pb} + \frac{1}{pc} + \frac{1}{pd} \cdots\cdots,$$

en attribuant à chaque terme le signe qu'il doit avoir d'après le sens du segment qu'il renferme, le point q, ainsi déterminé, sera unique et le centre des moyennes harmoniques des points a, b, c, d, ... relativement à p. Il s'agit, en premier lieu, de prouver que ce point est projectif, c'est-à-dire tel qu'en le mettant en projection, sur une droite quelconque $p'd'$ et à partir d'un point arbitraire s de l'espace, aussi bien que le système de tous les points que l'on considère sur pd, la relation ci-dessus aura toujours lieu entre ces différens points.

Pour y parvenir nous mettrons cette relation sous la forme suivante, afin d'en mieux étudier ses propriétés:

$$\frac{1}{pq} - \frac{1}{pa} + \frac{1}{pq} - \frac{1}{pb} + \frac{1}{pq} - \frac{1}{pc} + \frac{1}{pq} - \frac{1}{pd} + \text{etc.} = 0.$$

Mais

$$\frac{1}{pq} - \frac{1}{pa} = \frac{pa - pq}{pa \cdot pq} = -\frac{aq}{ap \cdot pq}, \quad \frac{1}{pq} - \frac{1}{pb} = -\frac{bq}{bp \cdot pq},$$

$$\frac{1}{pq} - \frac{1}{pc} = \frac{cq}{cp \cdot pq}, \quad \cdots\cdots;$$

donc, substituant et supprimant le facteur pq commun à tous les termes, il viendra

$$-\frac{aq}{ap}-\frac{bq}{bp}+\frac{cq}{cp}+\frac{dq}{dp}+\text{etc.}=0,$$

équation dans laquelle les termes négatifs proviennent uniquement des points a, b, c, ... qu'on a supposés à gauche de q. Mais, d'après la règle de signes admise ci-dessus pour la définition du point q, chaque terme devra conserver le signe qu'il a actuellement, ou en changer, selon que le point a, b, c, ... auquel il se rapporte sera à droite ou à gauche du point p; donc l'équation ci-dessus pourra être remplacée généralement par cette autre

$$\frac{aq}{ap}+\frac{bq}{bp}+\frac{cq}{cp}+\frac{dq}{dp}+\text{etc.}=0,$$

pourvu que, dans chaque position des points du système, on attribue le signe + ou le signe — à un segment quelconque, selon qu'il est situé sur la droite ou sur la gauche de celles des origines p ou q à la quelle il se rapporte, ou ce qui revient au même et ce qui est plus simple encore, pourvu qu'on attribue à chaque terme de la relation ci-dessus le signe + ou le signe —, selon que les deux segmens qui y entrent sont dirigés dans le même sens ou en sens contraire, par rapport à celui des points a, b, c, ... qui leur est commun.

D'après cela, on pourra énoncer ainsi d'une manière générale la rélation dont il s'agit:

L'origine p et le centre q des moyennes harmoniques d'un nombre quelconque de points a, b, c, d, ... rangés en ligne droite, sont tels que, si l'on prend successivement le rapport des distances de chacun de ces points à q et à p, la somme de tous ces rapports sera nulle, en attribuant le signe + ou le signe — à un rapport quelconque, selon que le point correspondant est situé sur l'un des prolongemens de la distance pq, ou entre ses extrémités.

18. Cet énoncé n'est évidemment que l'extension de celui qui se rapporte au cas particulier de l'art. 1. d'où nous sommes partis, et dans le quel ou ne considère que deux points a et b; prouvons maintenant qu'il s'applique à toutes les projections de la figure faite, d'un point quelconque s de l'espace, sur une droite arbitraire $p'd'$ du plan spd, et par

conséquent qu'il en est de même de la relation (17.) d'où nous sommes partis.

En effet, d'après ce qui a été établi art. 9. et suiv. du Traité des propriétés projectives, on a, en nommant P la perpendiculaire abaissée de s sur pd, et p, q, a, b, c, ... les projetantes sp, sq, sa, sb, sc, ..., $aq = \sin(asq)\frac{a.q}{P}$, $bq = \sin(bsq)\frac{b.q}{P}$, $cq = \sin(csq)\frac{c.q}{P}$, ..., $ap = \sin(asp)\frac{a.p}{P}$, $bp = \sin(bsp)\frac{b.p}{P}$, $cp = \sin(csp)\frac{c.p}{P}$, ...

Donc en sustituant ces expressions dans la dernière relation ci-dessus, et supprimant les facteurs communs à tous les termes, on aura la nouvelle relation

$$\frac{\sin asq}{\sin asp} + \frac{\sin bsq}{\sin bsp} + \frac{\sin csq}{\sin csp} + \text{etc.} = 0,$$

qui exprime qu'il y a entre les sinus des angles projetants la même relation qu'entre les segmens qui leur correspondent respectivement. Or de là on conclut aisément, et par réciproque, que, cette relation ayant lieu pour le faisceau des droites projetantes, il faut nécessairement qu'elle subsiste entre les segmens d'une transversale quelconque $p'd'$ prise pour axe de projection des segmens; donc enfin la relation examinée est de sa nature projective, ainsi qu'il s'agissoit de le démontrer directement; c'est-à-dire que, dans le faisceau ci-dessus, les projetantes sp et sq sont des axes (15.) d'origines et de moyennes harmoniques relativement à toutes les autres.

19. Remarquons en passant que, quoique la relation examinée en dernier lieu, subsiste entre les sinus des angles projetans des différens segmens qui y entrent, on ne sauroit pourtant en conclure que celle d'où nous sommes partis (17.) jouisse de la même propriété; or, je dis que cette dernière relation aura encore lieu de la même manière, non plus entre les sinus des angles projetans des différens segmens, mais entre les tangentes trigonométriques de ces angles, c'est-à-dire qu'on aura

$$\frac{m}{\text{tang}\, psq} = \frac{1}{\text{tang}\, psa} + \frac{1}{\text{tang}\, psb} + \frac{1}{\text{tang}\, psc} + \text{etc.}$$

En effet, la relation dont il s'agit étant projective d'après ce qui précède, devra subsister pour une transversale $p'd'$ perpendiculaire à la projetante sp du point p, mais les segmens $p'q'$, $p'a'$, $p'b'$, $p'c'$, ... de

cette transversale, sont évidemment alors proportionnels aux tangentes trigonométriques des angles projetants qui leur correspondent respectivement; donc la relation ci-dessus a lieu entre ces tangentes, comme il s'agissoit de le démontrer, et comme il seroit facile de l'établir de plusieurs autres manières.

20. La transformation que nous avons fait subir, art. 17., à la relation qui définit le centre des moyennes harmoniques, n'est pas la seule qui puisse lui convenir, et il en est d'autres qui ne sont pas moins dignes de remarque, et qui sont tout aussi générales.

En effet, soit A un point quelconque de la direction de pd, pris pour nouvelle origine des segmens, servant à remplacer l'origine p, on aura identiquement

$$pa-pq=Aa-Aq,\quad pb-pq=Ab-Aq,\quad pc-pq=Ac-Aq,$$
$$pd-pc=Ad-Ac,\ \ldots.$$

pourvu qu'on regarde comme positifs les segmens des points placés à la droite de A, et comme négatifs ceux des points placés à la gauche de ce point; donc on aura aussi

$$\frac{1}{pq}-\frac{1}{pa}=\frac{pa-pq}{pa.pq}=\frac{Aa-Aq}{pa.pq}=\frac{Aa}{pa.pq}-\frac{Aq}{pq}.\frac{1}{pa},$$
$$\frac{1}{pq}-\frac{1}{pb}=\frac{Ab}{pb.pq}-\frac{Aq}{pq}.\frac{1}{pb},\quad \frac{1}{pq}-\frac{1}{pc}=\frac{Ac}{pc.pq}-\frac{Aq}{pq}.\frac{1}{pc}+\text{etc.}$$

d'où, en substituant dans la première des transformées de l'art. 17., et multipliant tout par pq,

$$\frac{Aa}{pa}+\frac{Ab}{pb}+\frac{Ac}{pc}+\frac{Ad}{pd}+\text{etc.}=Aq\left(\frac{1}{pa}+\frac{1}{pb}+\frac{1}{pc}+\text{etc.}\right)=\frac{mAq}{pq}$$

relation qui est assujettie à la même règle de signes que celle de l'endroit cité, et qui, de plus, la renferme comme cas particulier, puisqu'elle redonne celle-ci quand on y suppose $Aq=0$, ou qu'on suppose le point A en q. En admettant même que l'origine arbitraire A soit à l'infini, les segmens infinis devant être censés égaux, disparaitront comme facteurs communs à tous les termes, et l'on retombera sur la relation

$$\frac{1}{pa}+\frac{1}{pb}+\frac{1}{pc}+\frac{1}{pd}+\text{etc.}=\frac{m}{pq},$$

d'où nous sommes partis en premier lieu.

Mais la relation générale obtenue en dernier lieu, conduit à beaucoup d'autres relations semblables, sélon qu'on suppose le point A placé en a ou b ou c . . . .; par exemple: si $Aa=0$, on aura

$$\frac{maq}{pq} = \frac{ab}{pb} + \frac{ac}{pc} + \frac{ad}{pd} + \text{etc.},$$

relation dans la quelle il faudra avoir égard à la règle de signes posée ci-devant, en regardant a et p comme les origines des divers segmens.

Elle deviendroit de même, pour $Ab = 0$, $Ac = 0$, etc.

$$\frac{mbq}{pq} = \frac{ba}{pa} + \frac{bc}{pc} + \frac{bd}{pd} + \text{etc.}$$

$$\frac{mcq}{pq} = \frac{ca}{pa} + \frac{cb}{pb} + \frac{cd}{pd} + \text{etc.}$$

d'où l'on en déduiroit une infinité d'autres.

Ces diverses relations, y compris celle d'où elles dérivent, satisfont toutes aux conditions indiquées art. 18.; donc, non seulement elles sont projectives, mais elles ont encore lieu d'une manière semblable entre les sinus des angles projetans qui répondent aux différens segmens.

21. Ce qui précède suffit pour faire apercevoir que le point q, ou le centre des moyennes harmoniques de points rangés en ligne droite, offre, dans ses propriétés, l'analogie la plus grande avec ce que l'on nomme le centre des moyennes distances de points pareils; pour la mettre dans tout son jour, il ne s'agit évidemment (14.) que d'examiner ce qui arrive dans les relations ci-dessus, pour le cas où l'on suppose le point p, qui sert d'origine aux segmens harmoniques, situé à l'infini sur ad. Mais alors tous les segmens qui ce comptent de ce point, sont infinis et doivent être censés égaux comme ne différant entr'eux que d'une quantité finie; donc la relation générale trouvée ci-dessus,

$$\frac{mAq}{pq} = \frac{Aa}{pa} + \frac{Ab}{pb} + \frac{Ac}{pc} + \frac{Ad}{pd} + \text{etc.},$$

se réduira simplement à la suivante

$$mAq = Aa + Ab + Ac + Ad + \text{etc.},$$

dans laquelle les différens termes devront, d'après ce qui précède, être affectés du signe + ou du signe —, selon que le point auquel ils se rapportent sera à droite ou à gauche de l'origine A des segmens, et qui aura lieu quelle que soit la position de cette origine relativement aux points donnée a, b, c, ...; or on reconnoit ici la propriété caractéristique de ce qu'on nomme le centre des moyennes distances.

De plus, puisque la relation générale ci-dessus est de sa nature projective, on voit que l'un de ces systêmes pourra toujours être envisagé comme la projection centrale ou perspective de l'autre, ainsi que

cela a déjà été établi d'une manière différente art. 14. et 16. de ce mémoire. On peut d'ailleurs, comme on va le voir, partir directement de la définition particulière du centre des moyennes distances pour en déduire celle, beaucoup plus générale, qui convient au centre des moyennes harmoniques.

En effet, si nous nommons p le point à l'infini de ad, et q le centre des moyennes distances des points a, b, c, d, ..., nous pourrons, d'après le raisonnement déjà établi ci-dessus, mettre la relation particulière qui définit ce centre q, sous la formule générale,

$$\frac{mAq}{pq} = \frac{Aa}{pa} + \frac{Ab}{pb} + \frac{Ac}{pc} + \frac{Ad}{pd} + \text{etc.};$$

or cette relation, dans la quelle les segmens qui se mesurent du point p, sont infinis et égaux, satisfait aux conditions indiquées art. 18.; donc elle aura lieu à la fois pour toutes les perspectives du système proposé sur des droites arbitraires; et par conséquent, dans ces perspectives, le centre des moyennes distances deviendra le centre des moyennes harmoniques.

22. Supposons maintenant que, dans l'équation générale relative au centre des moyennes harmoniques q, les segmens relatifs à ce centre deviennent infinis, ou si l'on veut, supposons le point q à l'infini, ce qu'on peut toujours obtenir en mettant la figure en projection sur une droite quelconque parallèle à la projetante de se point; le rapport des segmens infinis Aq, pq devenant l'unité, l'on aura pour définir alors le point correspondant p, la nouvelle relation

$$m = \frac{Aa}{pa} + \frac{Ab}{pb} + \frac{Ac}{pc} + \frac{Ad}{pd} + \text{etc.}$$

Mais l'origine A étant entièrement arbitraire, on peut également la supposer à l'infini, confondue avec q, ce qui rèduit la relation ci-dessus à la suivante,

$$\frac{1}{pa} + \frac{1}{pb} + \frac{1}{pc} + \frac{1}{pd} + \text{etc.} = 0,$$

en supprimant les facteurs ou segmens égaux et infinis; or, sous cette forme, elle est une conséquence très simple de celle d'où nous sommes partis (17.) pour la definition du centre q des moyennes harmoniques.

On voit, d'après cela, que les points p et q ne sont pas réciproques, et ne jouissent pas entr'eux des mêmes propriétés à l'égard des points a, b, c, d, ... comme sembleroit l'indiquer le cas particulier où ces derniers points sont au nombre de deux seulement (6.); aussi arrive-t-il

que, bien qu'il ne corresponde nécessairement qu'un seul point q, ou qu'un seul centre des moyennes harmoniques relativement à un même point p pris pour origine (14.), et aux m points donnés a, b, c, d, ..., cependant il existe, en général, $m - 1$ points p répondans à un même point q, choisi à volonté, et aux m points donnés a, b, c, ... C'est ce qu'il est, en effet, aisé de démontrer, avec ou sans calcul; mais, comme cette démonstration exige des développemens qui ne seroient pas ici à leur place, nous nous abstiendrons, pour le moment, de la donner, en renvoyant le lecteur à nos prochains mémoires.

23. Avant de terminer ce sujet, nous remarquerons que les diverses transformations que nous avons fait subir à la relation du No. 17., et qui expriment autant de propriétés du centre des moyennes harmoniques, sont uniquement basées sur ce que le nombre m est précisement égal à celui qui marque le nombre des points donnés a, b, c, ... Pour toute autre valeur de m, ces transformations seroient évidemment impossibles, ou du moins on seroit conduit à d'autres résultats, et la relation cesseroit d'être projective sous sa forme actuelle. Dans ces mêmes circonstances, pour construire le point q défini par cette relation, il faudra nécessairement faire usage de mesures graduées ou du compas, tandis que la construction du centre des moyennes harmoniques n'exige, comme on l'a fait voir (14.), que l'usage de la règle seule.

Supposons, par exemple, qu'il sagisse de construire le point Q (Fig. 6.) tel qu'on ait, en égard à la règle des signes établie ci-dessus:

$$\frac{n}{pQ} = \frac{1}{pa} + \frac{1}{pb} + \frac{1}{pc} + \frac{1}{pd} + \text{etc.},$$

n étant un nombre quelconque. On pourra d'abord construire avec la règle, le centre des moyennes harmoniques q des points donnés a, b, c, d, ... par rapport à l'origine p; ce qui donnera, m étant le nombre de ces points

$$\frac{m}{pq} = \frac{1}{pa} + \frac{1}{pb} + \frac{1}{pc} + \frac{1}{pd} + \text{etc.},$$

d'où

$$\frac{n}{pQ} = \frac{m}{pq} \text{ et } pQ = \frac{n}{m} pq,$$

expression qu'on ne pourra construire qu'à l'aide de mesures graduées ou du compas.

Il est évident qu'on pourroit aussi opérer directement, comme il a été indiqué art. 15.

24. En général, une équation dont les deux membres seroient composés de la somme d'une suite de réciproques assujetties à la règle de signes posée ci-dessus, et d'ailleurs multipliées par des coëfficiens numériques quelconques, sera ou non projective sous sa forme actuelle, et appartiendra ou non à la géométrie de la règle, toutes les fois que la somme des coëfficiens numériques relatifs à chaque terme, sera, abstraction faite des signes de position, ou ne sera pas la même de part et d'autre.

Pour fixer nos idées, supposons d'abord que l'on ait entre les points p, q, a, b, c, ... (Fig. 6.) la relation

$$\frac{m+m'+m''+\ldots.}{pq} = \frac{m}{pa}+\frac{m'}{pb}+\frac{m''}{pc}+\text{ etc.}$$

dans laquelle m, m', m'', ... sont des coëfficiens numériques quelconques, positifs ou négatifs, mais indépendans de la position des points a, b, c, ... q, à l'égard de p; cette équation étant d'ailleurs assujettie à la règle de signes posée art. 6., elle se changera évidemment en ces deux autres, par des transformations analogues à celles des No. 17. et 20.:

$$\frac{maq}{ap}+\frac{m'bq}{bp}+\frac{m''cq}{cp}+\frac{m'''dq}{dp}+\text{ etc.} = 0,$$

$$\frac{mAa}{pa}+\frac{m'Ab}{pb}+\frac{m''Ac}{pc}+\frac{m''Ad}{pd}+\text{ etc.} = (m+m'+m''\ldots.)\frac{Aq}{pq},$$

A étant une nouvelle origine quelconque; et réciproquement, de celle-ci on pourra conclure la relation primitive. Mais ces relations sont projectives (18.), donc il en sera de même de la primitive; je dis en outre qu'elles appartiennent à la géométrie linéaire ou de la règle.

En effet, au moyen de la règle, on trouvera (12.) le point x de ab tel, qu'en supposant ab divisée en $m+m'$ parties harmoniques par rapport à p, ax en contienne m' et bx, m: or on aura, d'après l'art. 9.,

$$\frac{m+m'}{px} = \frac{m}{pa}+\frac{m'}{pb}.$$

Pareillement on trouvera avec la règle, sur cx le point m' qui répond à la m^e partie harmonique de cette distance supposée en contenir $m+m'+m''$, et l'on aura

$$\frac{m+m'+m''}{px'} = \frac{m+m'}{px}+\frac{m'}{pc'} = \frac{m}{pa}+\frac{m'}{pb}+\frac{m''}{pc}$$

et ainsi de suite. Donc on arrivera à un dernier point de division X tel qu'on aura:

$$\frac{m+m'+m''+\ldots.}{pX} = \frac{m}{pa} + \frac{m'}{pb} + \frac{m''}{pc} + \ldots.,$$

et qui ne sera par conséquent que le point q lui-même, le quel se trouvera ainsi construit linéairement ou avec la règle seule.

25. Supposons maintenant (Fig. 7.) qu'on ait la relation harmonique quelconque

$$\frac{n}{pq} + \frac{n'}{pr} + \frac{n''}{ps} + \ldots. = \frac{m}{pa} + \frac{m'}{pb} + \frac{m''}{pc} + \ldots.$$

relativement à des points a, b, c, ..., q, r, s situés en ligne droite, et à l'origine p des segmens harmoniques.

Daprès ce qui précède, on pourra d'abord remplacer tous les points a, b, c, ... par un point X, constructible à l'aide de la règle, et tel qu'on ait

$$\frac{m+m'+m''+\ldots.}{pX} = \frac{m}{pa} + \frac{m'}{pb} + \frac{m''}{pc} + \ldots.;$$

on en trouvera, de la même manière, un autre Y tel qu'on ait

$$\frac{n+n'+n''+\ldots.}{pY} = \frac{n}{pq} + \frac{n'}{pr} + \frac{n''}{ps} + \ldots.;$$

donc, d'après la relation proposée, il viendra

$$\frac{n+n'+n''+\ldots.}{pY} = \frac{m+m'+m''+\ldots.}{pX}.$$

Si donc $n+n'+n''+\ldots. = m+m'+m''+\ldots.$ le point X devra se confondre avec le point Y, et parconséquent la relation d'où l'on est parti, appartiendra uniquement à la géométrie de la règle et sera d'ailleurs projective d'après ce qui précède, tandis qu'elle exigera, pour être construite, la règle et le compas dans toute autre supposition.

26. Ces diverses considérations nous permettent de généraliser la définition du centre des moyennes harmoniques, à peu près comme l'ont déjà fait MM. Carnot et Simon L'huilier de Genève, à l'égard du centre des moyennes distances: en posant, par exemple, pour la définition de ce point, l'équation

$$\frac{m+m'+m''+\ldots.}{pq} = \frac{m}{pa} + \frac{m'}{pb} + \frac{m''}{pc} + \text{etc.},$$

q pourra encore être appelé le centre des moyennes harmoniques de a, b, c, ... relativement à p, mais pour des coëfficiens numériques quelconques positifs m, m', m'', ... Quant au cas où quelques uns de ces coëfficiens seroient négatifs indépendamment des signes de posi-

tion des segmens auxquels ils se rapportent, on pourroit nommer le point correspondant q l'ex-centre des moyennes harmoniques, comme l'a fait, d'une manière analogue, Mr. L'huilier pour le cas des simples distances. En effet, la relation ci-dessus conduisant à cette autre, d'après ce qui a été observé plus haut (24),

$$(m+m'+m''+\ldots)\frac{Aq}{pq}=\frac{mAa}{pa}+\frac{m'Ab}{pb}+\frac{m''Ac}{pc}+\text{etc.},$$

on retombera directement sur les définitions du centre et de l'ex-centre des moyennes distances, définis par M. L'huilier, en supposant (21.) que le point p passe à l'infini.

27. Je crois inutile de pousser plus loin ces rapprochemens entièrement analogues à ceux qui ont été établis, dans ce qui précède, pour le cas particulier où les coëfficiens m, m', m'', ... sont simplement égaux à l'unité; et je ferai seulement remarquer que les diverses définitions et propositions établies jusqu'à présent, pour ce cas particulier, doivent s'étendre, de la même manière, au cas général: ainsi, par exemple, le point p sera toujours l'origine des segmens harmoniques; et si, d'un point quelconque s de l'espace, on mène aux différens points que l'on considère des projetantes sp, sq, sa, sb, sc, ... celles qui appartiennent à p et à q devront continuer à s'appeler (15.) les axes des origines et des moyennes harmoniques de toutes les autres etc.

Dans le paragraphe suivant, je montrerai comment on peut étendre toute cette doctrine du centre des moyennes harmoniques, au cas où l'on considère des points quelconques situés dans un plan ou dans l'espace.

Du centre des moyennes harmoniques d'un système de points quelconques situés ou non dans un même plan.

28. Nous n'avons encore envisagé, jusqu'àprésent, que les propriétés relatives au centre des moyennes harmoniques de points rangés en ligne droite; mais ce que nous avons dit pour ce cas particulier va nous conduire, sans peine, à ce qui concerne le système d'un nombre quelconque de points situés à volonté sur un plan ou dans l'espace; car tout consiste simplement à partir de la définition ordinaire du centre des moyennes distances pour en déduire, à l'aide de la perspective ou projection centrale, celle qui convient au centre des moyennes harmoniques en général, et même les diverses propriétés qui peuvent lui appartenir. Il est

entendu d'ailleurs que, dans tout ce qui va suivre, le centre des moyennes distances et celui des moyennes harmoniques seront pris par rapport à des coëfficiens numériques quelconques, répondans respectivement aux points proposés suivant les définitions admises No. 26.

Considérons d'abord le cas où le système des points proposés A, B, C, D, ... (Fig. 8.) appartient à un même plan, et soit Q le centre des moyennes distances de ces points: l'une des propriétés essentielles du point Q c'est que, si l'on fait la projection du système sur une droite arbitraire bd, et par des parallèles Aa, Bb, Cc, ... à un axe quelconque, la projetante Qq de Q, sera l'axe des moyennes distances (15. et 27.) de celles des autres points du système, de sorte que, pour la transversale arbitraire bd, le point Q qui appartient à cet axe, sera le centre des moyennes distances des points a, b, c, d, ... relatifs aux diverses projetantes, ou, en d'autres termes, il sera (21.), par rapport au point à l'infini de bd, le centre des moyennes harmoniques, de ces mêmes points.

Cela posé, voyons ce qui se passe dans la perspective de la figure sur un nouveau plan arbitraire: tout système de projetantes parallèles Aa, Bb, Cc, ... sera devenu (Fig. 9.) un faisceau de droites convergentes en un même point S, et tous les points de concours S seront rangés sur une même droite PS, projection ou perspective de tous les points à l'infini du premier plan (Traité de propriétés projectives, No. 106.); le point p où la droite PS ira rencontrer la transversale arbitraire bd qui lui correspond, représentera donc aussi le point à l'infini de bd dans la figure primitive 8., de sorte que le point q sera devenu (26.) le centre des moyennes harmoniques des points a, b, c, ... par rapport à p. Mais la droite bd est arbitraire; donc, pour tout faisceau de projetantes, semblable à celui qui précède, la projetante SQ de Q sera (27.) l'axe des moyennes harmoniques de celles SA, SB, SC, ... des points proposés, par rapport à la droite invariable SP, qui, ici, sert d'axe commun des origines.

29. D'après cela, on peut dire que le point Q est le centre des moyennes harmoniques des points proposés A, B, C, ...; et cela non d'une manière absolue, mais seulement par rapport à la droite particulière PS, qu'on peut appeler l'axe des origines harmoniques. Or il s'agit de prouver maintenant qu'un système quelconque de points

A, B, C, ... (Fig. 9.) étant donné sur un plan, aussi bien qu'une droite *PS* prise pour axe des origines harmoniques, on peut toujours déterminer un point *Q*, et seulement un point *Q*, qui jouisse, par rapport à cette droite, des propriétes qui viennent d'être examinées, ou qui soit le centre des moyennes harmoniques des points proposés *A, B, C, ...* relativement à cette droite.

Qu'on mette, en effet, la figure en perspective sur un plan quelconque parallèle à la droite *PS*, c'est-à-dire tel que cette droite passe à l'infini dans la nouvelle figure; il est clair, d'après ce qui précède, que s'il existe, pour la figure primitive, un ou plusieurs points qui soient des centres de moyennes harmoniques par rapport aux proposés et à *PS*, tous ces centres devront se changer à la fois, en des centres de moyennes distances pour la nouvelle figure; mais un systême de points quelconques ne sauroit avoir plus d'un centre de moyennes distances, et possède cependant toujours un tel point; donc pareillement le systême des points proposés a toujours un centre de moyennes harmoniques par rapport à une droite donnée à volonté sur son plan, et ne sauroit avoir qu'un seul point pareil pour chaque position donnée de cette droite, ce qui donne lieu à la proposition suivante.

Une droite, prise pour axe des origines, étant donnée à volonté dans le plan d'un systême de points quelconques, il existe un autre point et seulement un point, qu'on peut nommer le centre des moyennes harmoniques des premiers par rapport à la droite proposée, et dont la propriété est telle que, si d'un point quelconque de cette droite, on mène des projetantes aux points donnés, l'axe (27.) des moyennes harmoniques de toutes ces projetantes, par rapport à la droite donnée, ira toujours passer par le point fixe ou centre des moyennes harmoniques dont il sagit.

30. Les propriétés ci-dessus du centre des moyennes harmoniques de points quelconques situés sur un plan, se rapportent évidemment (24.) à celles que nous avons nommées projectives; donc si, d'un point quelconque de l'espace, on fait la projection ou perspective de la figure sur un nouveau plan quelconque, le centre des moyennes harmoniques des points proposés ne cessera pas d'être un centre de moyennes harmoniques en projection, par rapport à la droite qui représente l'axe des ori-

gines harmoniques du premier système; on pourra donc dire aussi que, dans l'espace, la projetante de ce point est l'axe des moyennes harmoniques des projetantes qui appartiennent aux points proposés, et cela non d'une manière absolue, mais relativement au plan projetant de la droite d'où se comptent les segmens harmoniques, plan qu'on peut aussi nommer pour cette raison, plan des origines harmoniques.

Ces définitions sont évidemment des extensions de celles de l'art. 27. relatives aux faisceaux de droites convergentes tracées dans un même plan, et elles donnent lieu à l'énoncé qui suit:

Un système de points quelconques étant situé dans un même plan, et un plan quelconque étant donné à volonté dans l'espace, si, d'un point choisi arbitrairement dans ce dernier plan, on mène des droites ou *projetantes* aux différens points du premier, puis qu'on détermine, par rapport au second plan considéré comme plan des origines, l'axe des moyennes harmoniques de ces droites, tous ses axes semblables iront passer par un même point, qui sera (29.) le centre des moyennes harmoniques des proposés, relativement à la droite d'intersection de son plan et du plan des origines.

31. Maintenant il ne nous sera pas difficile d'étendre ces considérations au cas où les points proposés A, B, C, D, ... (Fig. 9.) au lieu d'être sur un même plan, sont situés d'une manière quelconque dans l'espace.

Remarquons d'abord qu'un système pareil a toujours un centre de moyennes distances et n'en a qu'un seul dont la propriété est que, „si „l'on projette par des parallèles quelconques, tous les points pro- „posés sur un plan arbitraire, la projection de ce centre sera encore le „centre des moyennes distances de la projection des autres points du „système; c'est-à-dire que la projetante qui lui est relative sera l'axe „des moyennes distances de celles des autres points de la figure."

Mais, d'après les principes que nous avons établis dans le Traité des propriétés projectives (Supplément. No. 5. 6. et suiv.), la figure qu'on vient de considérer peut toujours être censée la perspective en relief d'une autre, dans la quelle tous les points à l'infini de l'espace, relatifs à la première, sont remplacés par ceux d'un plan unique; de sorte que les différens faisceaux de projetantes parallèles de cette figure,

sont devenus des faisceaux de droites convergeants en des points de ce plan. De plus, dans la nouvelle figure, les centres et axes de moyennes distances sont devenus (30.) des centres et axes de moyennes harmoniques par rapport au plan dont il s'agit ou aux droites qui le concernent; et d'un autre côté, quelle que soit la situation d'un plan à l'égard d'un systême de points quelconques donnés dans l'espace, on peut toujours, d'après les principes cités, considérer ce systême comme la perspective en relief d'un autre pour lequel le plan dont il s'agit est passé à l'infini; donc enfin:

Un systême de points quelconques, et un plan étant donnés dans l'espace, il existe toujours un autre point et un seul point, qu'on peut nommer *centre des moyennes harmoniques* des proposés par rapport au plan que l'on considère en particulier, et dont la propriété est telle que, si on le projette ainsi que tous les proposés sur un nouveau plan arbitraire et à partir d'un point quelconque du premier pris pour centre de projection, il demeure dans cette projection un centre de moyennes harmonique relativement à la droite d'intersection des deux plans; c'est-à-dire que la projetante qui le renferme est (30.) l'axe des moyenes harmoniques de toutes les autres, relativement au plan qui contient tous les centres de projection, et qui est encore ici le *plan des origines harmoniques.*

32. S'il étoit permis de se servir du compas ou du tracé des parallèles, ce qui précède montre assez comment on devroit opérer pour obtenir le centre des moyennes harmoniques d'un systême de points quelconques situés dans un plan ou en général dans l'espace; car, en mettant le systême de ces points en perspective de façon que la droite ou le plan des origines harmoniques, qu'on s'est donné arbitrairement, passe à l'infini, tout reviendrait a déterminer le centre des moyennes distances des points de la nouvelle figure et à le projeter sur la première.

Mais, si l'on veut simplement opérer avec la règle, il faudra s'y prendre d'une autre manière.

Par exemple, si les points proposés A, B, C, D, ... (Fig. 9.) sont dans un même plan, ainsi que la droite PS qui sert d'origine aux segmens harmoniques, il faudra, de deux points différens S, S' de cette

droite, faire la perspective ou projection centrale des proposés sur deux droites arbitraires telles que pd par exemple; cherchant ensuite, par les procèdés du No. 24., et pour chaque droite pd, le centre des moyennes harmoniques q des points a, b, c, d, ... de la projection, et cela par rapport au point p qui appartient à l'axe PS des origines harmoniques, les projetantes qS des centres partiels ainsi obtenus, iront se couper au centre unique (29.) Q des moyennes harmoniques que l'on cherche.

Si les points proposés A, B, C, ... étoient situés d'une manière quelconque dans l'espace, il suffiroit évidemment de remplacer, dans les opérations ci-dessus, l'axe PS des origines harmoniques et les transversales arbitraires pd par des plans.

33. Mais on peut aussi opérer directement sur les points proposés, sans recourir à la projection, ainsi que cela se pratique lorsqu'il s'agit de trouver le centre des moyennes distances; et cette méthode aura en même temps l'avantage d'être plus expéditive que la précédente.

Pour cela, il suffit d'observer, d'après ce qui précède, que l'un de ces systèmes peut toujours être envisagé comme la perspective de l'autre, et qu'il n'y a de différence entre eux, qu'en ce que, pour le cas des moyennes distances, le point, la droite, le plan qui servent d'origine aux segmens harmoniques, sont situés entièrement à l'infini, de sorte que les systêmes de lignes qni y convergent sont des systêmes de parallèles, tandisque les divisions harmoniques sont remplacées par les divisions en parties égales, et vice versa pour l'autre systême de points.

Soient, par exemple, A, B, C (Fig. 10.) trois points quelconques dont il faille trouver le centre des moyennes harmoniques Q par rapport à la droite PP'; on se rappelera que, dans le cas où la droite PP' est à l'infini, et où le point Q devient (Fig. 11.) le centre des moyennes distances de A, B, C, on n'a qu'à prendre les points milieux q, q', q'' des côtés du triangle ABC, et à joindre par une droite chacun de ces points au sommet opposé du triangle; car ces droites donneront, par leur croisement, le point Q demandé. Opérant donc de la même manière sur le triangle proposé ABC (Fig. 10.), en prenant (2. et 7.) pour les points q, q', q'', les centres de moyennes harmoniques des couples de sommets correspondans, et cela en choisissant pour origines respectives des segmens harmoniques les points P, P', P'', où les côtés du triangle ABC vont rencontrer la droite PP', le point Q, ainsi construit, sera le cen-

tre des moyennes harmoniques des sommets A, B, C par rapport à cette droite.

34. Pour le cas de quatre points A, B, C, D (Fig. 12.), dont on veut avoir le centre Q des moyennes harmoniques par rapport à la droite $P'P''$, on prendra ces points pour les sommets d'un quadrilatère $ABCD$, dont on prolongera les côtés jusqu'à la droite $P'P''$; on déterminera ensuite les centres des moyennes harmoniques q, q', q'', q''' des paires de sommets appartenans à chaque côté, et cela relativement au point de rencontre de ce côté et de la droite $P'P''$; joignant ensuite ceux de ces centres qui se trouvent sur les côtés opposés du quadrilatère, on aura les droites qq'', $q'q'''$ dont l'intersection Q sera le point demandé; car c'est ainsi qu'on opéreroit si la droite $P'P''$, passant à l'infini, il s'agissoit de déterminer le centre Q des moyennes distances des points A, B, C, D.

On pourroit d'ailleurs remplacer le quadrilatère $ABCD$ par tout autre qui auroit les mêmes sommets; on pourroit aussi chercher le centre des moyennes harmoniques de trois quelconques des points proposés, et le joindre au quatrième par une droite qui devroit renfermer le point cherché etc.; dans tous les cas on obtiendra un point unique Q, comme cela a lieu lorsqu'on suppose l'axe des origines $P'P''$ à l'infini.

35. Si l'on avoit cinq points à considérer, on rechercheroit d'abord le contre des moyennes harmoniques de quatre quelconques de ces points; et la droite qui le joindroit au cinquième, renfermeroit le centre des moyennes harmoniques du systême total des points donnés; une nouvelle opération analogue donneroit donc ce centre lui-même. En général, on pourra prendre le centre des moyennes harmoniques d'un certain nombre de points, puis le centre pareil des points restans; la droite qui renfermera les deux centres ainsi trouvés contiendra aussi celui du systême total des points donnés. Mais, au lieu de rechercher une nouvelle droite qui contienne ce dernier centre, on pourra se contenter de déterminer, sur la premiere (9. et 12.), le centre des moyennes harmoniques des deux centres partiels déjà trouvés, relativement aux nombres qui marquent de combien de points ces centres respectifs proviennent etc.

On voit comment il faudroit s'y prendre pour un nombre quelconque de points qui seroient supposés dans l'espace; il suffiroit, dans les

opérations ci-dessus, de remplacer la transversale $P'P''$ par un plan, ainsi qu'il a déjà été expliqué (32.).

36. Ce qui précède est simplement relatif au cas où les coëfficiens numériques, par rapport auxquels on prend les centres de moyennes harmoniques, sont égaux à l'unité ou égaux entre eux; mais il est évident d'après les art. 26., 27. etc. que tout ce que nous avons pu dire, jusqu'à présent, de ce cas particulier, est immédiatement applicable à celui où les coefficiens seroient des nombres quelconques répondant respectivement aux points donnés. Ainsi, par exemple, si l'on a trois points A, B, C (Fig. 10.) dont m, m', m'' sont les coefficiens numériques respectifs, et qu'il s'agisse d'en trouver le centre des moyennes harmoniques Q, par rapport à ces coëfficiens et à la droite P, P'; on prendra d'abord (9. et 12.) le centre des moyennes harmoniques q des points A et B, par rapport aux coëfficien m et m' qui leur correspondent, et au point P de la droite des origines PP'; puis on prendra pareillement le centre des moyennes harmoniques q' des points B et C, par rapport aux coëfficiens numériques m' et m'' et au point P' de PP'; les droites qC et $q'A$ iront encore se croiser au point Q demandé, et il en seroit de de même de la droite $q''B$, qui appartient au centre des moyennes harmoniques q'' de A et de C, par rapport aux coëfficiens numériques m et m'' de ces points.

En effet, si l'on met la figure en perspective de façon que la droite PP' passe à l'infini, le point Q deviendra évidemment le centre des moyennes distances des points A, B, C par rapport aux coëfficiens respectifs m, m', m''.

D'après cet exemple et d'après ce qui a été dit pour le cas particulier où les coëfficiens numériques sont égaux à l'unité, on voit ce qu'il y auroit à faire pour celui où l'on auroit un nombre quelconque de points auxquels correspondroient respectivement des coëfficiens numériques donnés, s'il s'agissoit de trouver, pour ces coëfficiens, le centre des moyennes harmoniques des points dont il sagit.

37. Il n'est pas inutile d'observer que le cas particulier où les coëfficiens numériques sont égaux entre eux ou égaux à l'unité, donne lieu à des simplifications notables dans la construction générale ci-dessus du centre des moyennes harmoniques. Car, par exemple, s'il s'agit des sommets d'un triangle ABC (Fig. 10.), tout consistera alors, pour avoir les

trois droites cq, Aq' et Bq'' qui contiennent leur centre Q des moyennes harmoniques, de former un nouveau triangle $A'B'C'$ circonscrit au premier, et dont les côtés aillent concourir respectivement aux points P, P' et P'' où les côtés qui leur sont opposés dans le premier, vont rencontrer l'axe ou le plan des origines harmoniques PP'; en effet en se reportant à la projection (Fig. 11.), où l'on suppose PP' à l'infini, il sera facile de voir que les droites AA', BB', CC' qui joignent les sommets opposés des triangles seront précisément celles qui se croisent au point Q demandé.

On peut d'ailleurs remarquer que le triangle inscrit $qq'q''$, qui a ses sommets aux centres des moyennes harmoniques q, q', q'' des côtés du proposé ABC, jouit, à son égard, des mêmes propriétés que le triangle circonscrit $A'B'C'$; de sorte que, si l'on connoissoit seulement l'un quelconque q de ses sommets, on obtiendroit les deux autres par le simple tracé des droites $P'q''q$, $P''q'q$.

38. Plus généralement, si l'on a un nombre quelconque de points A, B, C, D (Fig. 12.) situés ou non dans un même plan, et que $P'P''$ soit l'axe ou le plan des origines harmoniques, il suffira de connaître le centre des moyennes harmoniques q de deux quelconques A, B de ces points, pour en déduire sur le champ, ceux qui appartiennent à tous les points proposés en les prenant deux à deux.

Supposons, par exemple, que les points A, B, C, D, ... soient pris pour les sommets d'un polygone $ABCD$ . . . ., il sera très facile d'obtenir, sur chaque côté, le centre des moyennes harmoniques des sommets adjacens; car, d'après ce qui précède, pour avoir le centre q' des sommets B et C, ayant déjà le centre q de A et B, on n'aura qu'à tracer la droite qq' qui va rencontrer l'axe des origines harmoniques $P'P''$ au même point que la diagonale AC du polygone appartenant aux trois sommets consécutifs A, B, C que l'on considère.

Pareillement, pour obtenir le centre q'' qui appartient au côté suivant CD, on n'aura qu'à tracer la droite $q'q''$ qui va rencontrer l'axe des origines au point où le rencontre la diagonale BD, déterminée par les sommets extrêmes des côtés BC et CD que l'on considère et auxquels appartiennent les points q' et q''. En continuant donc ainsi jusqu'au dernier côté du polygone $ABCD$ . . . ., on formera un nouveau polygone q, q', q'', q''' . . . . inscrit au premier, dont les côtés rencontreront respectivement l'axe des origines $P'P''$ aux points où le coupent les diago-

nales du premier polygone qui joignent ses sommets alternatifs, et dont les sommets seront précisement les centres de moyennes harmoniques qu'on cherche sur les côtés du polygone $ABCD\ldots$

Il est clair qu'ayant une fois les centres de moyennes harmoniques des différens côtés du polygone $ABCD\ldots$, on aura, sans peine, celui qui appartient à une diagonale ou à deux sommets quelconques, car cette diagonale est elle-même le dernier côté de l'un ou de l'autre des polygones dans lesquels elle divise le proposé, polygones dont on connoît déjà les centres de moyennes harmoniques des différens côtés à l'exception de celui du dernier, qu'on pourra obtenir ainsi par le tracé des simples lignes droites.

39. Toutes ces constructions peuvent d'ailleurs s'établir directement, en supposant qu'on mette la figure en perspective, de façon que la droite ou le plan $P'P''$ des origines harmoniques passe à l'infini; et l'on voit en même temps quelle espèce de simplifications elles apportent dans la détermination ci-dessus (art. 35.) du centre des moyennes harmoniques d'un nombre quelconque de points situés à volonté sur un plan ou dans l'espace; or ces remarques ne sont pas simplement curieuses comme on va s'en convaincre par ce qui suit.

En effet, ce qui précède fournit un moyen très simple et très expéditif pour construire, sur une droite pd (Fig. 9.), le centre des moyennes harmoniques q d'un nombre quelconque de points a, b, c, ..., par rapport à un dernier point p pris pour origine de segmens harmoniques; car, ayant mené d'un point quelconque S situé au dehors de la droite pd, les projetantes Sa, Sb, Sc, Sd, ..., puis, ayant pris, à volonté, de nouveaux points A, B, C, D, ... sur chacune d'elles et répondant respectivement à ceux dont on cherche le centre des moyennes harmoniques, tout consistera à construire, comme il vient d'être expliqué dans ce qui précède, le centre pareil Q des points A, B, C, D, ... par rapport à PS pris pour axe des origines, et à projeter ce centre, de S, sur pd, en q qui sera (28. et 29.) le point demandé.

40. Cette construction est plus simple que celle qui a été indiquée art. 14., et l'on peut remarquer qu'elle s'étend immédiatement au cas général où le centre q des moyennes harmoniques que l'on cherche, est relatif (26.) à des coëfficiens numériques quelconques m, m', m'', ... répondant respectivement aux points donnés a, b, c, d, ..., puisqu'il

suffit évidemment, au lieu de se borner à ne prendre qu'un seul point A, B, C, ... sur chacune des projetantes Sa, Sb, Sc, ... qui appartiennent aux proposés, d'en choisir autant qu'il est marqué par le coëfficient numérique relatif à cette projetante ou au point d'où elle dérive.

Que l'on ait, par exemple, deux points a, b auxquels correspondent respectivement les coëfficiens numériques m et m', on devra prendre m points arbitraires sur la projetante Sa, et m' points pareils sur la projetante Sb; cherchant ensuite le centre Q des moyennes harmoniques de ces $m+m'$ points et le projetant en q sur pb, q sera le centre des moyennes harmoniques de a et de b relativement à m et m'; c'est-à-dire qu'on aura (9.)

$$\frac{m+m'}{pq} = \frac{m}{pa} + \frac{m'}{pb},$$

ou (24.)

$$m\frac{aq}{ap} + m'\frac{bq}{bp} = 0,$$

en ayant égard à la règle de signes posée art. 17.

Les points A, B, C, ... qu'on doit prendre sur les diverses projetantes Sa, Sb, Sc, ... pouvant avoir une position quelconque, on devra profiter de cette indétermination pour simplifier les opérations relatives à la recherche des points Q et q; mais ces simplifications se présentent d'une manière trop facile, dans les projections de la figure où ces points deviennent des centres de moyennes distances, pour qu'il soit nécessaire d'entrer dans des détails; et l'on seroit conduit d'ailleurs à des résultats qui n'auroient qu'un léger avantage sur ceux de l'art. (9.) et suiv. où l'on ne considère simplement que deux points a, b et les coëfficiens numériques m et n relatifs à ces points.

Application de la théorie du centre des moyennes harmoniques aux propriétés des figures rectilignes et polyèdrales.

41. La théorie qui vient de nous occuper donne lieu à un grand nombre de propriétés nouvelles concernant les figures rectilignes; beaucoup de ces propriétés entièrement analogues à celles qu'on déduit ordinairement de la théorie du centre des moyennes distances, sont par là même faciles à découvrir et peuvent être abandonnées aux investigations du lecteur; mais il en est d'autres qui, se rattachant à des propriétés du centre des moyennes distances non aussi généralement connues, et qui,

étant susceptibles d'être transportées dans la théorie des courbes et des surfaces géométriques, méritent qu'on leur accorde une attention plus particulière; or c'est à cet objet que nous allons consacrer les dernières pages de ce Mémoire.

Remarquons, en premier lieu, que la plupart des principes que nous avons établis sur le centre des moyennes harmoniques, peuvent être envisagés comme autant de propriétés distinctes des figures composées simplement de points, de droites et de plans quelconques.

Par exemple, les principes des No. 24. et suiv. conduisent immédiatement à cet énoncé:

„Etant donné à volonté, dans un plan, un faisceau de droites projetantes Sp, Sa, Sb, Sc, ... (Fig. 7.), c'est-à-dire convergeant en „un même point S, si, ayant choisi l'une quelconque d'entre elles Sp „pour axe des origines harmoniques, on mène arbitrairement des transversales droites ps, $p's'$, ... dans ce faisceau, puis qu'on détermine, „sur chacune d'elles, le centre des moyennes harmoniques q, q', ... „des points d'intersection a, b, c, ..., a', b', c', ..., qui lui appartien„nent, par rapport aux points p, p', ... de l'axe Sp des origines har„moniques et relativement à des coëfficiens numériques quelconques (26.); „la suite des centres pareils sera une seule est même droite Sq, passant „par S, et que nous avons nommée l'axe des moyennes harmoniques du „faisceau formé par toutes les autres projetantes."

42. Au lieu de mener arbitrairement les transversales ps, $p's'$, ..., on peut exiger qu'elles passent par un même point du plan de la figure, et prendre ce point, sur l'axe Sp des origines harmoniques, en p par exemple, au quel cas cet axe devient inutile pour déterminer les centres q, puisque le point p est, pour toutes les transversales, l'origine commune et unique des segmens harmoniques: le théorême ci-dessus subsiste évidemment toujours; mais ainsi particularisé, il offre l'avantage singulier de pouvoir s'étendre à un systême de droites quelconques situées dans un plan, et non plus simplement à un systême de droites convergeant en un même point S; bien plus, pour arriver au théorême ainsi généralisé, il suffit, comme on va le voir, de partir du cas particulier où l'on ne considère que deux droites uniques Sa et Sb, cas qui se déduit immédiatement des principes exposés art. 8. et 9. de ce Mémoire.

Soient, en effet, AB, BC, CD, ... (Fig. 13.) des droites indéfinies quelconques situées sur un plan, p un point arbitraire pris pour pôle des transversales pb qui rencontrent respectivement en a, b, c, d, ... les droites fixes dont il s'agit; je dis que si l'on détermine, sur chaque transversale pb, le centre q des moyennes harmoniques des points a, b, c, d, ... par rapport au pôle p, pris ponr origine des segmens et aux coëfficiens numériques quelconques m, m', m'', ..., la suite des points q sera une droite unique qQ', qu'on pourra appeler l'axe des moyennes harmoniques des droites proposées, relativement à p et aux différens coëfficiens qui leur correspondent respectivement.

Pour le prouver, considérons d'abord deux droites AB, BC, aux quelles répondent les coëfficiens numériques m et m'; si, sur les transversales pd, nous prenons sans cesse les centres q' des moyennes harmoniques qui répondent aux points a et b de l'angle ABC, et aux coëfficiens m et m', d'après ce qui précède, la suite des centres q' sera une droite $q'B$ passant par le sommet de l'angle, et à laquelle correspondra (24. et 26.) un nouveau coëfficient $m+m'$. Soit Q le point où cette droite rencontre CD, la troisième des droites données; prenons sur la transversale variable pb, le nouveau centre q'' des moyennes harmoniques des points c et q' qui appartiennent aux côtés CDc et BQq', de l'angle Q, et cela par rapport au point p et aux coëfficiens m'', $m+m'$ répondans respectivement à ces côtés; le point q'' sera le centre des moyennes harmoniques de a, b, c, et la suite de ces centres sera sur une nouvelle droite $q''Q$ passant par Q, à la quelle correspondra un coëfficient $m+m'+m''$, et qui rencontrera la quatrième AD des droites données en un point Q', qu'il faudra prendre pour nouveau sommet d'angle B. On arrivera donc, en continuant ainsi, à une dernière droite qQ' qui sera le lieu des centres de moyennes harmoniques de tous les points d'intersection a, b, c, d, ... de la transversale mobile et des droites proposées, et qui en sera l'axe des moyennes harmoniques pour les coëfficiens m, m', m'', ..., et relativement au pôle p; théorême qu'on peut énoncer très simplement de cette manière:

Un système de droites quelconques étant donné dans un plan, si l'on coupe ce système par une suite de droites transversales passant par un même point ou pôle, puis qu'on détermine, pour chaque transversale, le centre des moyen-

nes harmoniques des points d'intersection correspondans, en prenant le pôle pour origine des segmens; la suite de tous les centres pareils sera une droite unique; c'est-à-dire l'axe des moyennes harmoniques des proposées par rapport au pôle et aux coëfficiens donnés *).

43. Remarquons que chaque de manières dont nous avons enseigné (20. 24. 26.) à définir graphiquement ou numériquement le point q de la transversale mobile pb, donne lieu a un énoncé particulier du théorême qui précède. Ainsi, par exemple, si l'on définit le point q par la relation

$$\frac{maq}{ap} + \frac{m'bq}{bp} + \frac{m''cq}{cp} + \frac{m'''dq}{dp} + \text{etc.} = 0,$$

ou par celle-ci

$$\frac{m+m'+m''+\ldots.}{pq} = \frac{m}{pa} + \frac{m'}{pb} + \frac{m''}{pc} + \text{etc.},$$

la suite des points q sera une ligne droite.

Il en sera de même évidemment de la suite des points q déterminés par la relation plus générale

$$\frac{k}{pq} = \frac{m}{pa} + \frac{m'}{pb} + \frac{m''}{pc} + \text{etc.},$$

dans laquelle k est un coëfficient numérique quelconque. Maintenant si, dans cette dernière relation, on suppose tous les coëfficiens égaux à l'unité, on retombera sur le cas particulier démontré directement par Mac-Laurin, dans son Traité des lignes géométriques, à l'aide du principe de l'art. 7. qui lui est dû. Mais on peut généraliser d'avantage encore ces diverses propositions.

44. Si nous remplaçons en effet, dans le théorême ci-dessus, les différents droites données par des plans situés d'une manière quelconque

---

*) Dans le cas particulier où, les coëfficiens m, m', ... étant égaux à l'unité, on ne considère que le systême de trois lignes droites, et où l'on prend pour pôle p le centre de gravité ou des moyennes distances du triangle formé par ces droites, l'axe des moyennes harmoniques passe tout entier à l'infini, et l'on a, pour une transversale quelconque issue de p et rencontrant en a, b, c, les côtés du triangle,

$$\frac{1}{pa} + \frac{1}{pb} + \frac{1}{pc} = 0;$$

et, en effet, cette relation, en ayant égard à la loi des signes (17.), est satisfaite pour les trois positions de la transversale où elle passe par l'un des sommets du triangle; car on a alors, par exemple, $pb = pc = 2pa$.

Ce théorême a été démontré par Mac-Laurin dans son *Traité des courbes géométriques*.

dans l'espace; la suite des points q ne sera plus simplement sur une droite, mais sur un dernier plan qu'on pourra nommer le plan des moyennes harmoniques relativement au pôle des transversales.

On pourroit établir ce théorême directement et d'une manière analogue à celle que nous venons de mettre en usage pour les systêmes de lignes droites, en partant du cas particulier, et très facile a démontrer, où l'on n'a que deux plans à considérer; mais on peut le déduire aussi très simplement du théorême qui précède.

Par le point qui sert de pôle aux transversales et d'origine aux segmens harmoniques, menons, en effet, un plan arbitraire; il coupera les plans proposés suivant un systême de droites ayant, d'après le théorême cité, une droite unique pour axe des moyennes harmoniques par rapport à ce pôle; or tous les axes semblables se rencontreront évidemment deux à deux; donc ils seront tous compris dans un seul plan, qui sera le plan même des moyennes harmoniques des proposés, suivant la définition admise ci-dessus. Ainsi:

Un systême de plans quelconques a toujours, par rapport à un point fixe pris pour origine et pour pôle des transversales un plan unique des moyennes harmoniques, c'est-à-dire renfermant tous les centres de moyennes harmoniques des points d'intersection qui appartiennent aux diverses transversales.

45. Remplaçons encore, dans le théorême de l'art. 42., le pôle par une droite servant d'axe des origines harmoniques, les transversales droites par des plans transversaux passant par cet axe; enfin supposons les droites proposées situées d'une manière quelconque dans l'espace; je dis que la suite des centres (29.) de moyennes harmoniques des points d'intersection de ces droites et des différens plans transversaux, par rapport à l'axe commun des origines, sera une dernière ligne droite, qu'on pourra nommer l'axe de moyennes harmoniques des proposées par rapport au premier axe.

Projetons, en effet, sur un plan quelconque, le systême des droites proposées et l'axe des origines harmoniques, à partir d'un point quelconque de cet axe pris pour centre de projection, c'est-à-dire de façon que cet axe y devienne un point; tous les plans transversaux seront représentés par des droites en projection, et les centres de moyennes harmo-

niques qui appartiennent aux points d'intersection de ces plans et des droites proposées resteront encore (29.) de pareils centres pour les points de la projection, par rapport au point ou pôle qui représente l'axe des origines harmoniques; mais ces derniers centres sont (42.) sur une droite, donc les autres restent dans le plan projetant unique de cette droite; et, comme pareille chose doit avoir lieu pour tout autre centre et tout autre plan de projection, on voit que les différens centres de moyennes harmoniques que l'on considère dans l'espace doivent se trouver à l'intersection commune, et par conséquent unique, de tous les plans projetans analogues à celui qu'on vient déxaminer en particulier; donc enfin nous pouvons énoncer ce théorême:

Un système de droites quelconques étant donné dans l'espace, si l'on coupe ce système par une suite de plans transversaux passant par une même droite ou charnière; puis qu'on détermine, pour chaque plan, le centre (art. 32. et suiv.) des moyennes harmoniques des points d'intersection qui lui appartiennent, en prenant la charnière pour axe des origines harmoniques; la suite de tous ces centres sera une même droite, axe des moyennes harmoniques des proposées.

46. Supposons que, dans les figures relatives aux théorêmes qui précèdent, le point et la droite qui servent de pôle ou de charnière aux droites et aux plans transversaux, passe à l'infiini, ces systêmes de droites et de plans transversaux deviendront respectivement parallèles, et les centres de moyennes harmoniques des points qui s'y trouvent, se changeront (26. et 29.) en des centres de moyennes distances; on arrivera donc, pour ces derniers centres, à des théorêmes qui ne seront que des cas très particuliers de ceux dont il s'agit, et qu'il sera d'ailleurs très facile d'établir directement d'après les propriétés généralement connues de cette sorte de centres. Or, en partant delà, on pourra réciproquement s'élever aux théorêmes généraux par des principes de projection analogues à ceux qui ont été mis en usage dans le chapitre précédent (31.); car on remarquera aisément que la figure relative à l'un de ces systêmes, peut toujours être régardé comme la perspective plane ou en relief de l'autre.

47. La doctrine du centre des moyennes harmoniques donne lieu à plusieurs autres propriétés générales des systêmes de points, de droites et de plans, qui ne le cèdent en rien, pour l'élégance, à celles qui précè-

dent. Parmi ces propriétés, on peut ranger les principes mêmes qui ont été énoncés art. 29. 30. et 31., lesquels sont purement relatifs à des systêmes de points quelconques rangés sur un plan ou dans l'espace; nous nous contenterons d'en indiquer rapidement quelques autres, qu'il n'eût pas été convenable d'examiner aux endroits cités.

Soit un systême de plans quelconques passant par une même droite; concevons un dernier plan par cette droite, dont les différens points soient pris pour origine des segmens harmoniques, et qui sera par conséquent le plan des origines harmoniques relativement à tous les autres. Cela posé, traçons à volonté une droite transversale, et déterminons sur elle, le centre de moyennes harmoniques de toutes ses intersections avec les derniers plans par rapport au point de section du plan des origines; il est évident, d'après les principes posés art. 42. et 44., que ce centre et tous ses semblables seront compris dans un seul et même plan passant par la droite commune aux proposés, et qu'on pourra nommer le plan des moyennes harmoniques de ceux-ci par rapport au plan des origines. Ce même faisceau de plans convergeant en une même droite, sera évidemment tel que tout plan transversal y déterminera un faisceau de droites concourant en un même point, et ayant (27.) un axe des origines et un axe des moyennes harmoniques; enfin il existera entre les sinus et les tangentes trigonométriques des angles formés par ces plans, des relations analogues à celles que nous avons vu (18. et 19.) appartenir aux faisceaux harmoniques de simples droites projetantes situées dans un plan unique, mais qui seront plus générales étant relatives à des coëfficiens numériques quelconques.

48. Supposons maintenant que tous les plans proposés concourent simplement en un même point; en prenant une droite arbitraire, passant par ce point, pour axe des origines, le lieu des centres harmoniques relatifs aux diverses transversales qui s'appuyent sur cet axe sera évidemment encore un plan unique passant par le point commun aux proposés; car il renfermera à la fois et tous les axes de moyennes harmoniques (27.) des faisceaux de droites convergentes déterminées dans les plans proposés par tout plan transversal passant par l'axe des origines, et tous les axes de moyennes harmoni-

ques (42.) des systêmes de droites résultantes de l'intersection de ces mêmes plans par un plan transversal arbitraire, relativement au point où ce plan rencontre l'axe des origines; ce qui ne sauroit avoir lieu évidemment sans qu'il ne soit un seul et même plan.

49. Ces lemmes étant établis, concevons un systême de points quelconques dans l'espace, et un plan pris pour plan des origines harmoniques; par une droite quelconque de ce plan, menons de nouveaux plans vers les points donnés, et déterminons pour chaque systême pareil (47.), le plan des moyennes harmoniques par rapport au plan commun des origines, ce plan et tous ses semblables passeront par un seul et même point (31.), centre des moyennes harmoniques des proposés.

Ce théorême offre, comme on voit, une autre manière d'énoncer le principe de l'art 31. cité.

Concevons encore un systême de droites quelconques situées dans l'espace, et prenons une dernière droite arbitraire pour axe des origines harmoniques; cela posé, d'un point quelconque de cet axe, menons aux diverses droites des plans, et prenons (48.), par rapport à l'axe dont il s'agit, le plan des moyennes harmoniques de ce systême de plans, ce plan et tous ses semblables passeront (45.) par une seule et même droite qui sera l'axe des moyennes harmoniques des proposées.

50. Les divers exemples que nous venons de donner, doivent suffire pour montrer la nature des propositions qu'il est possible de deduire des divers principes de la doctrine du centre des moyennes harmoniques, pour les systêmes de points, de droites et de plans quelconques. Il y en auroit d'autres bien plus difficiles a établir, et qui sont en quelque sorte les réciproques des précédentes: ainsi, par exemple, ayant vu (42.) que le lieu des centres de moyennes harmoniques des différentes transversales passant par un point ou pôle, et rencontrant un systême de droites données dans un plan, est une seule et dernière droite, axe des moyennes harmoniques des proposées, on pourroit se demander réciproquement quelle est l'enveloppe de tous les axes semblables de moyennes harmoniques des différens points d'une même droite prise dans le plan des pro-

posées etc.; mais cette question et toutes ses analogues exigent d'autres principes pour résolues, et elles se rattachent intimement à la théorie des courbes géométriques, que nous nous proposons d'établir dans d'autres mémoires, auxquels celui-ci ne sert pour ainsi dire que d'introduction.

Il semble d'ailleurs qu'on ne trouvera pas superflus et dénués d'intérêt par eux-mêmes, les développemens dans lesquels nous venons d'entrer, et dont la plupart nous seront très utiles pour la suite de ces recherches. Par ces mêmes considérations, nous croyons pouvoir, avant de terminer, ajouter à tous ce qui précède, quelques réflexions tendant à modifier et à rendre plus concis l'énoncé de plusieurs des théorêmes qu'on vient de faire connoître, en même temps qu'elles serviront à établir l'espèce de dépendance qui existe entre la théorie des centres de moyennes harmoniques et les principes déjà connus de la théorie des transversales.

51. Considérons le système de trois droites quelconques, pA, pB, pC (Fig. 14.), situées dans un plan et convergeant en un même point p; soient α, β et γ trois points quelconques de leur directions respectives; on aura, pour exprimer que ces trois points sont en ligne droite:

$$\text{triang.}\,\alpha p\gamma = \text{triang.}\,\alpha p\beta + \text{triang.}\,\beta p\gamma,$$

et par conséquent:

$$p\alpha.p\gamma.\sin\alpha p\gamma = p\alpha.p\beta.\sin\alpha p\beta + p\beta.p\gamma.\sin\beta p\gamma;$$

d'où, en divisant tout par le produit $p\alpha.p\beta.p\gamma$,

$$\sin ApC\frac{1}{p\beta} = \sin ApB\frac{1}{p\gamma} + \sin BpC\frac{1}{p\alpha}.$$

Supposons que le point α soit, par rapport à p, le centre des moyennes harmoniques des points a, a', a'', ... situés sur la droite pA, et cela pour les coëfficiens numériques quelconques m, m', m'', ..., pareillement que β soit le centre des moyennes harmoniques des points b, b', b'', ... de pB par rapport à p et pour les mêmes coëfficiens, qu'enfin γ soit le centre pareil des points c, c', c'', ...; le nombre des points situés sur chaque droite étant d'ailleurs le même, on aura (26.):

$$\frac{m+m'+m''+\ldots.}{p\alpha} = \frac{m}{pa} + \frac{m'}{pa'} + \frac{m''}{pa''} + \text{etc.} = \Sigma\left(\frac{m}{pa}\right),$$

$$\frac{m+m'+m''+\ldots.}{p\beta} = \frac{m}{pb} + \frac{m'}{pb'} + \frac{m''}{pb''} + \text{etc.} = \Sigma\left(\frac{m}{pb}\right),$$

$$\frac{m+m'+m''+\ldots.}{p\gamma} = \frac{m}{pc} + \frac{m'}{pc'} + \frac{m''}{pc''} + \text{etc.} = \Sigma\left(\frac{m}{pc}\right),$$

dans les quelles Σ est le signe abregé de somme.

Si nous mettons ces valeurs des réciproques de $p\alpha$, $p\beta$, $p\gamma$ dans la relation trouvée ci-dessus, elle deviendra,

$$\sin ApC \cdot \Sigma\left(\frac{m}{pb}\right) = \sin ApB \cdot \Sigma\left(\frac{m}{pc}\right) + \sin BpC \cdot \Sigma\left(\frac{m}{pa}\right),$$

nouvelle relation qui permet d'exprimer ainsi très simplement le théorême du No. 43.

Ayant sur un plan un systême de droites quelconques abc, $a'b'c'$, $a''b''c''$, ..., si, d'un point p pris à volonté sur ce plan, on mène trois transversales arbitraires pA, pB, pC rencontrant respectivement les proposées en a, a', a'', ..., b, b', b'', ..., c, c', c'', ...; on aura constamment, pour des coëfficiens numériques m, m', m'', ... appartenans respectivement à ces mêmes droites,

$$\sin ApC \cdot \Sigma\left(\frac{m}{pb}\right) = \sin ApB \cdot \Sigma\left(\frac{m}{pc}\right) + BpC \cdot \Sigma\left(\frac{m}{pa}\right).$$

Il est évident, en effet, que cette relation exprime tout autant que le théorême de l'art. cité; car on en conclut d'abord que le centre des moyennes harmonique de a, a', a'', ..., celui de b, b', b'', ..., enfin celui de c, c', c'', ... sont en ligne droite, quelles que soient les transversales, pA, pB, pC menées à travers le systême des proposées; laissant donc deux d'entre elles fixes, et faisant varier la troisième autour de p, on voit que la suite des centres des moyennes harmoniques qui lui appartiennent, sera une seule et même droite.

52. La relation que nous venons d'établir ci-dessus pour exprimer que les trois points α, β, γ situés sur les transversales pA, pB, pC convergeant en un même point p, appartiennent à une même droite, et la relation beaucoup plus générale, que nous avons déduite du théorême de l'art. 43., relativement à un systême quelconque de points a, b, c, ..., a', b', c', ..., a'', b'', c'', ... situés trois par trois en ligne droite, doivent être considérées toutes deux comme des cas particuliers et des conséquences très simples de celles qui ont lieu pour trois transversales arbitraires pA, pB, qC (Fig. 15.) formant par leur rencontre mutuelle un triangle pqr, au lieu de converger en un même point.

En effet, on a alors, comme on sait *), dans les hypothèses ci-dessus,

*) Carnot *Essai sur la théorie des transversales*, *Traité des propriétés projectives etc.*

$$\alpha p.\beta r.\gamma q = \alpha q.\beta p.\gamma r,$$
$$(pa).(rb).(qc) = (qa).(pb).(rc),$$

dans la dernière desquelles (pa) représente le produit de tous les segmens pa, pa', pa'', ..., (rb) celui de tous les segmens rb, rb', rb'', ... et ainsi de suite pour les autres.

Or, si nous mettons la première de ces relations sous cette forme

$$\alpha p(\beta p+pr).\gamma q = (\alpha p+pq).\beta p.(\gamma q+qr),$$

nous en tirerons la suivante, en développant et divisant par pr,

$$\alpha p.\gamma q = \alpha p.\beta p.\frac{qr}{pr}+\beta p.\gamma q.\frac{pq}{qr}+\beta p.\frac{pq.qr}{pr},$$

qui devient, en remplaçant les rapports des côtés du triangle pqr par les sinus des angles opposés, et en supposant ensuite que p, q, r se confondent en un seul point p (Fig. 14.)

$$p\alpha.pr.\sin ApC = p\alpha.p\beta.\sin ApB + p\beta.pr.\sin BpC,$$

laquelle est précisement la relation obtenue directement à l'art. 51., pour le cas ou les transversales pA, pB, qC concourent en un même point.

53. D'après cela, il est donc naturel de considérer les relations générales qui concernent un nombre quelconque de points rangés sur les trois transversales en question, comme étant pareillement des modifications l'une de l'autre; et c'est, en effet; ce qu'apprend le calcul appliqué à ce cas général, d'une manière analogue à celle qui vient d'être mise en usage pour le cas particulier; mais nous établirons cette conséquence dans un prochain mémoire, indépendamment de tout calcul, c'est-à-dire par des considérations purement géométriques, et cela même quels que soient les points que l'on considère sur les côtés du triangle transversal pqr; la seule condition étant qu'ils satisfassent à la relation générale, dejà posée ci-dessus:

$$(pa).(rb).(qc) = (qa).(pb).(rc).$$

Quant au cas présent, où l'on suppose les points a, b, c, ..., a', b', c', ..., a'', b'', c'', ... situés trois par trois en ligne droite, la même dépendance peut être établie très simplement sans recourir à des transformations algébriques prolixes.

En effet d'après ce qui précède, on aura pour ces différens groupes de points lorsque (Fig. 14.) le triangle pqr s'évanouit,

$$\sin ApC\frac{1}{pb} = \sin ApB\frac{1}{pc} + \sin BpC\frac{1}{pa},$$
$$\sin ApC\frac{1}{pb'} = \sin ApB\frac{1}{pc'} + \sin BpC\frac{1}{pa'},$$
$$\sin ApC\frac{1}{pb''} = \sin ApB\frac{1}{pc''} + \sin BpC\frac{1}{pa''},$$
$$. . . . . .$$

multipliant la première de ces équations par m, la deuxième par m', la troisième par m'', ... etc., m, m', m'', ... étant des nombres quelconques relatifs aux droites abc, $a'b'c'$, $a''b''c''$, ..., ajoutant enfin toutes les nouvelles équations, on retombera directement sur la relation générale posée art. 51. Ainsi le principe de l'art. 43. est une conséquence très timple de la théorie des transversales rectilignes, et il seroit facile de prouver la mème chose des autres principes posés en cet endroit; mais, au lieu de nous arrêter à ces détails, nous nous contenterons d'ajouter quelques nouvelles remarques à toutes celles qui précèdent, renvoyant à la note ci-après pour montrer comment on peut les étendre facilement au cas de l'espace.

54. La relation à laquelle nous sommes parvenus pour exprimer que les trois points α, β, γ (Fig. 14.) sont situés en ligne droite sur les transversales pA, pB, pC, peut être mise sous une autre forme, qui offre l'avantage particulier d'être indépendante des lignes trigonométriques, et de ne point devenir insignifiante quand le point p s'éloigne à l'infini, comme cela arrive pour la première. Coupons en effet le faisceau des droites pA, pB, pC par la nouvelle droite ABC, nous aurons

$$\frac{\text{triang. } ApC}{\text{triang. } BpC} = \frac{AC}{BC} = \frac{pA \,.\, pC \,.\, \sin ApC}{pB \,.\, pC \,.\, \sin BpC};$$

d'où l'on tire

$$\sin ApC = \frac{AC}{BC}.\frac{pB}{pA}.\sin BpC.$$

On auroit de même, par la comparaison des triangles ApB et BpC,

$$\sin ApB = \frac{AB}{CB}.\frac{pC}{pA}.\sin BpC;$$

substituant ces valeurs dans la relation citée, supprimant le facteur $\sin BpC$, et multipliant ensuite tous les termes par $BC.pA$, il viendra

$$\frac{AC.pB}{p\beta} = \frac{AB.pC}{p\gamma} + \frac{BC.pA}{p\alpha},$$

nouvelle relation qui, satisfaisant aux conditions indiquées art. 18. est pro-

jective de sa nature; elle n'apprend d'ailleurs guères plus que celle d'où nous sommes partis, quand on suppose le point p à l'infini; puisquelle ce reduit alors à celle-ci $AC = AB + BC$, qu'on doit considérer comme une simple identité.

Mais, en observant qu'on a

$$pB = p\beta + B\beta, \quad pc = p\gamma + C\gamma, \quad pA = p\alpha + A\alpha,$$

on en déduira, sur le champ,

$$AC.\frac{B\beta}{p\beta} = AB.\frac{C\gamma}{p\gamma} + BC.\frac{A\alpha}{pa},$$

qui est également projective, mais n'a pas l'inconvénient de devenir identique quand les droites pA, pB, pC sont parallèles (Fig. 16.), ou que p s'éloigne à l'infini.

On a alors en effet, à cause que les distances infinies $p\beta$, $p\gamma$, $p\alpha$ peuvent être censées égales entre elles,

$$AC.B\beta = AB.C\gamma + BC.A\alpha,$$

pour exprimer que les points α, β, γ sont situés en ligne droite, de même que les points A, B, C.

Supposons maintenant que l'on considère, sur les transversales pA, pB, pC, un nombre quelconque de points $a, b, c, \ldots, a', b', c', \ldots, a'', b'', c'', \ldots$ rangés trois par trois en ligne droite, on aura donc, pour remplacer la relation générale de l'art. 51., dans le cas de la figure 14.,

$$AC.\Sigma\left(m\frac{Bb}{pb}\right) = AB.\Sigma\left(m\frac{Cc}{pc}\right) + BC.\Sigma\left(m\frac{Aa}{pa}\right),$$

et dans celui de la figure 16., où le point p est à l'infini,

$$AC.\Sigma(m.Bb) = AB.\Sigma(mCc) + BC.\Sigma(mAa),$$

relations dont la première exprime que les centres des moyennes harmoniques, et la seconde que les centres des moyennes distances des grouppes de points respectifs $a, a', a'', \ldots, b, b', b'', \ldots, c, c', c'', \ldots,$ sont situés en ligne droite; et qui, l'une et l'autre, peuvent être considérés, ainsi que celle du No. 51., comme des modifications particulières de la relation (52.) qui se rapporte au cas général où les trarsversales pA, pB, pC sont quelconques et forment un triangle pqr (Fig. 15.)

Au surplus, nous aurions pu partir directement de la relation qui appartient à la figure 16. et qu'il est facile d'établir a priori, pour en déduire, de suite, celle qui se rapporte à la Fig. 14., en employant à cet

effet des principes de projection analogues à ceux qui ont été mis en usage à la fin du No. 21.; mais la marche précédente nous a paru plus directe et plus lumineuse.

Note première.

Sur les moyens d'exprimer que quatre points quelconques, appartenans respectivement à un même nombre de droites convergeant en un point unique de l'espace, sont situés sur un seul et même plan.

Sont α, β, γ et δ (Fig. 17.) quatre points quelconques situés respectivement sur les côtés pq, qr, rs et sp du quadrilatère gauche $pqrs$; on aura, comme on sait, d'après la théorie des transversales, pour exprimer que ces quatre points sont dans un même plan, la relation

$$\alpha p.\beta q.\gamma r.\delta s = \alpha q.\beta r.\gamma s.\delta p;$$

d'où il seroit aisé de déduire (52.) celle qui est relative au cas où, le quadrilatère $pqrs$ s'évanouissant, les droites pq, qr, rs et ps concourent simplement en un même point p (Fig. 18.). Mais on peut arriver au même but d'une manière entièrement directe et simple, par des procédés analogues à ceux qui ont été mis en usage (51.) pour le cas particulier de trois points situés en ligne droite.

En effet, pour que les quatre points α, β, γ, δ, placés sur les transversales pA, pB, pC, pD, se trouvent compris dans un même plan, il est nécessaire évidemment et il suffit qu'on ait la relation

$$\text{sol.}\, p\alpha\gamma\delta + \text{sol.}\, p\alpha\gamma\beta = \text{sol.}\, p\alpha\beta\delta + \text{sol.}\, p\beta\gamma\delta;$$

or on a, d'après les principes connus et en représentant par l'expression $\sin(p\delta, \alpha p\gamma)$ le sinus de l'angle formé par la droite $p\delta$ et le plan $\alpha p\gamma$, et par $(\alpha\beta\gamma)$ l'aire du triangle qui a pour sommets les points α, δ, γ,

$$\text{sol.}\, p\alpha\gamma\delta = \frac{(\alpha\beta\gamma)p\delta.\sin(p\delta, \alpha p\gamma)}{3} = \tfrac{1}{3}\sin(\alpha p\gamma).\sin(p\delta, \alpha p\gamma).p\alpha.p\gamma.p\delta,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\text{sol.}\, p\alpha\gamma\delta = \tfrac{1}{3}\sin(ApC).\sin(pD, ApC).p\alpha.p\gamma.p\delta;$$

on auroit pareillement et selon les mêmes conventions,

$$\text{sol.}\, p\alpha\beta\gamma = \tfrac{1}{3}\sin(ApC).\sin(pB, ApC).p\alpha.p\beta.p\gamma,$$
$$\text{sol.}\, p\alpha\beta\delta = \tfrac{1}{3}\sin(BpD).\sin(pA, BpD).p\alpha.p\beta.p\delta,$$
$$\text{sol.}\, p\beta\gamma\delta = \tfrac{1}{3}\sin(BpD).\sin(pC, BpD).p\beta.p\gamma.p\delta;$$

donc substituant et divisant par le produit $\frac{1}{3}.p\alpha.p\beta.p\gamma.p\delta$, il viendra la relation

$$\frac{\sin(ApC).\sin(pD,ApC)}{p\beta}+\frac{\sin(ApC).\sin(pB,ApC)}{p\delta}$$
$$=\frac{\sin(BpD).\sin(pA,BpD)}{p\gamma}+\frac{\sin(BpD).\sin(pC,BpD)}{p\alpha},$$

qui est entièrement analogue à celle de l'art. 51., et d'où l'on déduiroit des conséquences semblables pour le cas d'un nombre quelconque de grouppes de quatre points rangés dans un plan, tel que celui des points α, β, γ et δ.

Considérons maintenant un plan arbitraire $ABCD$, auquel correspondent les quatre points A, B, C, D sur les droites pA, pB, pC, pD, nous aurons, comme ci-dessus, en nommant P la perpendiculaire abaissée de P sur le plan $ABCD$,

$$\text{sol.}\,pACD=\tfrac{1}{3}P.(ACD)=\tfrac{1}{3}\sin(ApC).\sin(pD,ApC).pA.pC.pD,$$
$$\text{sol.}\,pABC=\tfrac{1}{3}P.(ABC)=\tfrac{1}{3}\sin(ApC).\sin(pB,ApC).pA.pB.pC,$$
$$\text{sol.}\,pABD=\tfrac{1}{3}P.(ABD)=\tfrac{1}{3}\sin(BpD).\sin(pA,BpD).pA.pB.pD,$$
$$\text{sol.}\,pBCD=\tfrac{1}{3}P.(BCD)=\tfrac{1}{3}\sin(BpD).\sin(pC,BpD).pB.pC.pD;$$

substituant, dans la relation déjà trouvée ci-dessus, les produits des sinus tirés de ces dernières, et simplifiant, il viendra

$$(ACD)\frac{pB}{p\beta}+(ACB)\frac{pD}{p\delta}=(BAD)\frac{pC}{p\gamma}+(BCD)\frac{pA}{p\alpha},$$

nouvelle relation qui est projective suivant les principes posés art. 45. du Traité des propriétés projectives, et de laquelle on en déduiroit plusieurs autres en remplaçant les rapports d'aires triangulaires par ceux des lignes de la figure $ABCD$. Contentons nous de remarquer que puisqu'on a

$$pA=p\alpha+A\alpha,\ pB=p\beta+B\beta,\ pC=p\gamma+C\gamma,\ pD=p\delta+D\delta,$$

on peut de nouveau la transformer en celle-ci,

$$ACD.\frac{B\beta}{p\beta}+ACB.\frac{D\delta}{p\delta}=(BAD).\frac{C\gamma}{p\gamma}+(BCD).\frac{A\alpha}{p\alpha},$$

qui jouit de la même propriété, et a de plus l'avantage de demeurer applicable au cas où le point p est censé à l'infini; elle devient effectivemens alors,

$$(ACD).B\beta+(ACB).D\delta=(BAD).C\gamma+(BCD).A\alpha,$$

comme il seroit aisé de le vérifier directement pour ce cas particulier.

Ces diverses relations sont entièrement analogues à celles qui ont été exposées dans le texte pour le cas du plan, et donnent lieu à des conséquences et à des rapprochemens qu'il est facile de déviner et sur lesquelles il est peu nécessaire d'insister.

Note deuxième.
Sur les relations linéaires projectives entre les distances de points rangés sur une même droite, et les formules trigonometriques qui en dérivent.

Avant de terminer, je crois devoir présenter, à l'occasion des recherches qui sont le sujet de ce mémoire, une observation générale et très importante, sur la quelle je n'ai pas suffisamment insisté dans le Traité des propiétés projectives des figures; c'est qu'il n'est, pour ainsi dire, aucune relation métrique, entre les distances d'une figure, qui ne puisse être proposée, généralisée ou transformée d'une manière convenable pour satisfaire aux conditions particulières de *projectibilité* indiquées aux art. 9., 10. et 45. de ce traité, et rappelées No. 18. du présent mémoire.

On en a vu un grand nombre d'exemples dans l'un et dans l'autre de ces écrits, mais il n'y ont été amenés, en quelque sorte, qu'incidentellement, et l'on n'a nullement insisté sur les principes et les moyens qui pourroient y conduire directement ou généralement.

Or ces moyens, comme on a dû s'en apercevoir, consistent principalement dans les suivans, 1) se servir des relations qui expriment la juxta-position ou la contiguité des distances rangées sur une même droite, pour transformer la relation proposée en une autre qui satisfasse aux conditions déjà citées, en introduisant même, si cela est nécessaire, de nouveaux points parmi ceux de la figure; 2) restituer, par la pensée, les points qui, dans le passage de la figure générale à celle qu'on éxamine, ont pu s'éloigner à l'infini en faisant ainsi disparaître, par suite de leur égalité, certaines distances qui multipliaient ou divisaient les termes de cette dernière relation; 3) chercher enfin à rétablir ces distances dans la relation, sans la troubler et de façon que, sous sa nouvelle forme, elle satisfasse aux conditions prescrites, et devienne par con-

séquent applicable aux projections centrales ou perspectives de la figure ainsi modifiée par la restitution des points à l'infini.

Le premier de ces moyens convient particulièrement aux relations et aux figures que, par leur nature générale, on reconnaît être essentiellement projectives, quoique, dans leur état actuel, elles ne satisfassent pas aux conditions particulières qui viennent d'être indiquées; les autres conviennent principalement aux relations et aux figures qui, ayant une forme tout à fait particulière et déterminée, ne sauroient la conserver en perspective ou projection centrale: les art. 17. et 20. de ce mémoire nous ont offert des exemples qui se rapportent au premier de ces moyens, et l'art. 21. en contient un seul qui se rapporte aux derniers; mais la théorie du centre des moyennes distances eût pu aisément en fournir un grand nombre de cette sorte. Enfin il est des relations et des figures qui permettent l'emploi simultanée de ces deux moyens; et, parmi ces relations, celles qui expriment la juxta-position des distances rangées sur une même droite sont, sans contredit, les plus simples et les plus remarquables, outre qu'elles sont susceptibles de conduire à des principes de trigonométrie aussi beaux qu'étendus. Je crois, en conséquence, devoir choisir ces relations particulières pour nouvel exemple propre à éclairer les applications des préceptes qui précèdent, d'autant plus que ces sortes d'identités jouent un rôle nécessaire et fort important parmi toutes celles qui peuvent en général appartenir aux figures. Observons d'ailleurs, une fois pour toutes, que dans le cas dont il s'agit, où tous les points sont sur une même droite, les conditions de projectibilité se réduisent simplement à ce que les différens termes de la relation proposée renferment les mêmes lettres, ou qu'en considérant ces différentes lettres comme autant de quantités simples, elles puissent disparoître comme facteurs, soit dans chaque terme s'éparément, soit dans l'ensemble de tous les termes (voy. les Nr. 9. et suiv. de l'ouvrage déjà cité).

Cela posé, considérons d'abord trois points quelconques A, B, C (Fig. 19.) situés en ligne droite, on aura, pour la position actuelle de ces points

$$AC = AB + BC,$$

relation qui, sous cette forme, ne satisfait pas aux conditions ci-dessus, quoiqu'elle subsiste bien évidemment dans les projections centrales des points de la figure sur une droite arbitraire pn.

Pour la transformer en une autre qui satisfasse à ces conditions, nous chercherons, en premier lieu, à y introduire, selon ce qui a été prescrit ci-dessus, quelques uns des segmens qui se rapportent au point situé à l'infini sur AC, point que nous représenterons par P, et cela de manière à ne pas troubler l'égalité. Or c'est à quoi l'on parvient évidemment en multipliant chacun des termes de cette relation par celui des segmens infinis et égaux PA, PB, PC, qui n'appartient à aucun des points relatifs à ce terme. Cette relation se changera ainsi en cette autre,

$$AC.PB = AB.PC + BC.PA,$$

dont les différens termes renferment les mêmes lettres; et l'on voit aussi comment il faudroit agir pour préparer, de la même manière, toute relation linéaire du premier degré entre les simples distances de points rangés en ligne droite.

Sous cette nouvelle forme d'ailleurs, la relation qui précède n'exprime évidemment rien de plus que celle d'où elle provient, attendu que le point P est censé à l'infini. Mais étant projective, elle ne devra pas cesser d'avoir lieu en mettant les points A, B, C et P en perspective sur la nouvelle droite arbitraire pn, à partir d'un point quelconque S; on aura donc, en nommant a, b, c et p les nouveaux points, dont le dernier appartient évidemment à la projetante pS parallèle à AC,

$$ac.pb = ab.pc + bc.pa,$$

relation qui a lieu, de la même manière (18.), entre les sinus des angles projetans relatifs à chacune des distances qui y entrent.

On pourroit croire que cette relation est simplement relative à une certaine position particulière de p à l'égard de a, b, c; mais il est facile de prouver le contraire; car ayant choisi, à volonté, un tel point sur une droite abc, on pourra toujours mettre la figure en projection sur une autre droite AC, de façon que p passe à l'infini, puisqu'il suffit de prendre AC parallèle à la projetante Sp de ce point; or la relation ci-dessus, qui est pojective, sera satisfaite naturellement pour la projection AC; donc elle aura pareillement lieu pour la droite ac, quels que soient les points a, b, c, p.

Voyons maintenant comment, par des transformations convenables, nous aurions pu arriver directement à la relation dont il s'agit en partant de celle $ac = ab + bc$ qui n'en est qu'un cas particulier relatif à l'hypothèse où P seroit à l'infini.

A cet effet, multiplions l'équation $ac = ab + bc$ par la distance pb, on aura successivement, pour la position actuelle de a, b, c et p:

$$ac.pb = ab.pb + bc.pb = ab(pc - bc) + bc(pa + ab) = ab.pc + bc.pa,$$

qui est précisément celle qui a été obtenue ci-dessus par une voie très différente.

Sans nous arrêter longuement aux cas particuliers, nous considérerons de suite un nombre quelconque de points a, b, c, d, m, n, rangés sur une même droite; il est évident qu'il existera entre les distances de ces points, pris trois à trois, quatre à quatre, etc., une infinité de relations purement linéaires et évidentes, telles que celle $ac = ab + bc$ qui vient de nous occuper précédemment; or, si l'on prend arbitrairement un nouveau point p sur la droite en question, il sera très aisé, d'après ce qui précède, d'en déduire, sur le champ, un égal nombre d'autres relations plus générales et jouissant de propriétés analogues à celles de la transformée $ac.pb = ab.pc + bc.pa$.

Par exemple, ayant pour la position actuelle des points a, b, c, d, m, n, la relation générale

$$an = ab + bc + cd \ldots . + mn,$$

ou en concluera la suivante, en multipliant chacun de ses termes par le produit des segmens relatifs au point p et à tous ceux des proposés qui n'appartiennent pas à ce terme,

$$an(pb.pc.pd \ldots . pm) = ab(pc.pd \ldots . pm.pn) + bc(pa.pd \ldots . pm.pn) + cd(pa.pb \ldots . pm.pn) + \ldots . + mn(pa.pb.pc.pd \ldots .).$$

Il est visible, en effet, que cette relation remplit toutes les conditions prescrites, et peut s'établir par les mêmes moyens et donner lieu aux mêmes réflexions que celle que nous avons trouvée pour le cas particulier de trois points.

Pour la justifier a posteriori, nous la mettrons sous cette forme beaucoup plus simple, en divisant chacun de ses termes par le produit de tous les segmens relatifs au point p et aux différens points proposés,

$$\frac{an}{pa.pn} = \frac{ab}{pa.pb} + \frac{bc}{pb.pc} + \frac{cd}{pc.pd} \ldots . + \frac{mn}{pm.pn};$$

et, en effet, on est immédiatement conduit à la relation suivante

$$\frac{pn - pa}{pa.pn} = \frac{pb - pa}{pa.pb} + \frac{pc - pb}{pb.pc} + \frac{pd - pc}{pc.pd} \ldots . + \frac{pn - pm}{pm.pn},$$

qui, en effectuant les divisions partielles, se réduit évidemment à une

simple identité entre les diverses réciproques des distances pa, pb, pc, ... Cette remarque, à laquelle on n'eût peut-être pas songé sans ce qui précède conduirait également aux diverses autres relations analogues à celle établie ci-dessus: ainsi, par exemple, on auroit, k étant le nombre des points proposés a, b, c, ... m, n,

$$\frac{(k-3)an}{pa.pn} = \frac{ab}{pa.pb} + \frac{ac}{pa.pc} + \ldots + \frac{am}{pa.pm} + \frac{nm}{pn.pm} + \ldots + \frac{nc}{pn.pc} + \frac{nb}{pn.pb}.$$

Au surplus, les relations précédentes ayant lieu pour des points quelconques rangés en ligne droite, doivent être soigneusement distinguées de celles qui expriment des conditions particulières, propres à faire trouver un ou plusieurs de ces points, à l'aide de certains autres supposés donnés. Elles ne sont, en dernière analyse, comme on voit, que des sortes d'identités exprimant et la juxta-position des distances qui y entrent, et leur situation en ligne droite; mais, en ce sens même, elles sont très dignes d'être remarqués pour les conséquences qu'on en peut déduire, en général, soit par rapport aux autres relations projectives entre les distances, soit relativement à celles qui ont lieu entre les lignes trigonométriques des arcs et des angles; car il est évident que, puisqu'elles satisfont toutes aux conditions des Nr. 9. et suiv. du Traité des propriétés projectives rappelées art. 18. de ce mémoire, elles doivent subsister également, et sans conditions quelconques, soit entre les sinus des angles formés par un nombre quelconque de droites Sa, Sb, Sc, ... passant par un même point S, soit entre les sinus des arcs $a'b'$, $b'c'$, $c'd'$, ... qui mesurent ces angles sur une circonférence de cercle ayant pour centre le sommet commun S de tous ces angles.

Ainsi, par exemple, on aura entre ces différens sinus, la relation tres générale

$$\frac{\sin(a'n')}{\sin(p'a').\sin(p'n')} = \frac{\sin a'b'}{\sin(a'p').\sin(p'b')} + \frac{\sin b'c'}{\sin(p'b').\sin(p'c')} + \ldots + \frac{\sin m'n'}{\sin(p'm').\sin(p'n')},$$

qu'on peut changer en cette autre, en rapportant tout à l'origine commune p' des arcs,

$$\frac{\sin(p'n'-p'a')}{\sin(p'a').\sin(p'n')} = \frac{\sin(p'b'-p'a')}{\sin(p'a').\sin(p'b')} + \frac{\sin(p'c'-p'b')}{\sin(p'b').\sin(p'c')} + \ldots + \frac{\sin(p'n'-p'm')}{\sin(p'm').\sin(p'n')};$$

et qui comprend, sous cette nouvelle forme, comme cas particuliers, presque toutes les formules fondamentales de la trigonométrie, ainsi qu'on peut le voir par les articles 139., 140. et suiv. de la Géométrie de position, où cette même relation générale est exposée d'après des principes fort différens de ceux qui précèdent.

Au surplus, on déduirait beaucoup d'autres relations non moins générales des considérations qui précèdent, et en y supposant ensuite certains angles ou certains arcs égaux à un quadrant, on obtiendroit celles qui concernent les cosinus etc.; mais je laisserai au lecteur le soin de cette investigation et de ces rapprochemens très curieux, et me contenterai d'ajouter une dernière remarque à toutes celles qui précèdent: c'est que les relations entre les simples distances de points rangés sur une même droite, et qui satisfont aux conditions particulières déjà souvent indiquées, s'appliquent directement aux arcs de cercle et aux angles quelconques ayant un sommet commun, et peuvent être établies de la même manière; de sorte que, pour passer de là aux relations qui concernent les lignes trigonométriques, il ne s'agit que de remplacer chaque arc et chaque angle par le sinus qui lui est propre: proposition qui mérite particulièrement d'être remarquée des géomètres.

Enfin je ne crois pas devoir passer sous silence une autre observation très générale, et qui découle immédiatement des No. 18. et 19. du Traité des propriétés projectives; c'est que „toute la théorie du centre des „moyennes harmoniques, qui se trouve exposée dans le présent mémoire, „s'étend immédiatement aux figures tracées sur la surface de la sphère, „en remplaçant les droites indéfinies par des circonférences de grands „cercles, et les distances ou portions de droites par les sinus des portions „correspondantes de ces circonférences."

23.

Kann von zwei dreiseitigen Pyramiden eine jede in Bezug auf die andere um- und eingeschrieben zugleich heifsen?

(Vom Herrn Prof. *Möbius* zu Leipzig.)

Dafs, wenn ein Dreieck in ein anderes eingeschrieben ist, dasselbe Dreieck nicht auch um das andere umschrieben sein kann, ist offenbar. Und eben so scheint es auch durchaus unmöglich, zwei Pyramiden zu construiren, von denen die Spitzen der einen in den Seitenflächen der andern und umgekehrt die Spitzen der andern in den Seitenflächen der erstern liegen. Auch ist diese Forderung in der That unerfüllbar, wenn die Spitzen einer jeden in den Seitenflächen der anderen selbst, nicht in den Erweiterungen derselben begriffen sein sollen, indem dann die eingeschriebene Pyramide immer die kleinere, die umschriebene die gröfsere ist. Es schwindet aber das Paradoxe der Forderung (bei den Pyramiden, — nicht bei den Dreiecken), wenn diese Beschränkung aufgehoben wird, und die Spitzen der einen auch in den erweiterten Seitenflächen der andern liegen können. Heifsen nämlich A, B, C, D die vier Spitzen der einen, und F, G, H, I die vier Spitzen der andern Pyramide, so läfst sich darthun, dafs die acht hierzu erforderlichen Bedingungen:

I.	A in GHI,	V.	F in BCD,
II.	B in HIF,	VI.	G in CDA,
III.	C in IFG,	VII.	H in DAB,
IV.	D in FGH,	VIII.	I in ABC

sehr wohl neben einander bestehen können, und überdies noch, dafs jede dieser acht Bedingungen eine Folge der sieben übrigen ist.

Es sei mir erlaubt den Beweis hiervon mit Anwendung meines barycentrischen Calculs zu führen, wo sich die Sache folgendergestalt symmetrisch und einfach behandeln läfst. —

Weil der Schwerpunct dreier Puncte mit ihnen selbst immer in einer Ebene liegt, und weil jeder Punct einer Ebene als Schwerpunct irgend dreier anderer Puncte der Ebene, die nicht in einer Geraden liegen, genommen werden kann, so schreibe ich, um die Bedingung I. aus-

zudrücken, wonach A ein Punct der Ebene GHI sein soll:

$$\alpha A = aG + a'H + a''I.$$

Hierbei sind nämlich a, a', a'' die Gewichte, womit die Puncte G, H, I belastet werden müssen, damit A der Schwerpunct derselben wird, und $\alpha = a + a' + a''$ das Gewicht, welches, in A angebracht, dieselbe Wirkung, als die drei einzelenen Gewichte in G, H, I, hervorbringt.

Auf gleiche Art werden die Bedingungen II., III., IV. durch die Gleichungen

$$\beta B = bH + b'I + b''F,$$
$$\gamma C = cI + c'F + c''G,$$
$$\delta D = dF + d'G + d''H,$$

ausgedrückt. Sind nun die Puncte F, G, H, I mit ihren Gewichten oder Coëfficienten a, a', a'', b, ... d'' gegeben, so sind damit auch die Puncte A, B, C, D bekannt, und es fragt sich jetzt, ob jene Coëfficienten sich so bestimmen lassen, dafs auch die Bedingungen V., ... VIII. erfüllt werden.

Man setze deshalb, weil nach V., F ein Punct der Ebene BCD sein soll:

$$\zeta F = f\beta B + f'\gamma C + f''\delta D,$$

wo f, f', f'' zu bestimmende Coëfficienten sind. Substituirt man in dieser Gleichung die Werthe von βB, γC, δD aus den vorhergehenden, so kommt, nachdem man gehörig geordnet hat:

$$(\zeta - fb'' - f'c' - f''d)F = (f'c'' + f''d')G + (f''d'' + fb)H + (fb' + f'c)I.$$

Diese Gleichung drückt im Allgemeinen aus, dafs F in der Ebene GHI liegt, so lange wenigstens, als von den Coëfficienten der Puncte G, H, I nicht jeder einzeln $= 0$ ist, indem, diesen Fall ausgenommen, die Lage von F gegen G, H, I in der Ebene dieser Puncte durch die Verhältnisse zwischen den Coëfficienten derselben immer bestimmt ist. Da nun F, G, H, I nicht in einer Ebene liegen, sondern die vier Spitzen einer Pyramide sein sollen, schliefsen wir, dafs

$$f'c'' + f''d' = 0, \quad f''d'' + fb = 0, \quad fb' + f'c = 0,$$

und hieraus ergiebt sich nicht nur das gegenseitige Verhältnifs zwischen f, f', f'', sondern auch nach Elimination dieser Coëfficienten die Bedingungsgleichung

$$1) \quad bcd' = -b'c''d'',$$

wenn F in BCD liegen soll. — Auf eben die Weise führen die Bedingungen VI., VII., VIII. zu den Gleichungen:

$$2)\quad cda' = -c'd''a'',$$
$$3)\quad dab' = -d'a''b'',$$
$$4)\quad abc' = -a'b''c''.$$

Es giebt aber das Product sowohl aus der Gleichung 1) in 3), als aus 2) in 4):

$$abcd = a''b''c''d'',$$

woraus man ersieht, dafs von den vier Gleichungen 1) . . 4) eine jede eine Folge aus den drei übrigen ist. Sind mithin die Bedingungen I., . . . IV., und noch von den Bedingungen V., . . VIII. irgend drei erfüllt, so ist es damit auch die vierte der letztern; und da durch Vertauschung der beiden Pyramiden auch die Bedingungen I., . . IV. und V., . . VIII. gegenseitig in einander übergehen, so schliefsen wir, dafs wenn von allen acht Bedingungen irgend sieben erfüllt sind, damit auch die achte besteht.

Ist demnach eine Pyramide *ABCD* (Fig. 1. Taf. IV.) gegeben, so läfst sich eine zweite *FGHI*, welche der erstern zugleich ein- und umschrieben ist, etwa folgendergestalt construiren. — Man lege durch die Spitze *D* der Pyramide *ABCD* eine Ebene, welche die Kanten *BC*, *CA*, *AB* in *A'*, *B'*, *C'* schneide. In dieser Ebene sei nach IV. die Seitenfläche *FGH* der Pyramide *FGHI* enthalten. Weil nach V., *F* zugleich in der Ebene *BCDA'* liegen soll, so wird *F* irgend ein Punct der Geraden *DA'* sein müssen; und eben so wird man wegen VI. und VII., *G* und *H* beliebig in *DB'* und *DC'* zu nehmen haben. Vermöge I., II., III. ist ferner *I* als der gemeinschaftliche Durchschnittspunct der drei Ebenen *AGH*, *BHF*, *CFG* zu bestimmen, und es ist somit den Bedingungen I., ... VII. Genüge geschehen. Zufolge des erwiesenen Satzes mufs alsdann, wie es VIII. erfordert, *I* in der Ebene *ABC* liegen.

Statt die drei Ebenen *AGH*, . . . zu legen, kann man zur Bestimmung des Punctes *I* auch so verfahren. — Man ziehe *GH*, welche die Gerade *A'B'C'* in *F'* schneide, so ist *F'* ein Punct der Ebene *ABC*, und folglich *AF'* der Durchschnitt der Ebenen *AGH* und *ABC*, worin *I* liegen mufs. Eben so ziehe man *HF*, *FG*, welche *A'B'C'* in *G'*, *H'* schneiden, und es mufs *I* auch in *BG'*, *CH'* enthalten sein. Die drei Geraden *AF'*, *BG'*, *CH'* müssen sich folglich in einem Puncte, nämlich in *I*, schneiden.

Hieraus fliefst zugleich folgender nicht uninteressante Satz:
ABC, *FGH* sind zwei Dreiecke, *MN* eine gerade Linie, welche mit je-

dem der beiden Dreiecke in einer Ebene liegt, also die Durchschnittslinie der beiden Dreiecksebenen, wenn die Dreiecke in verschiedenen Ebenen liegen. Wird nun MN von den Dreiecksseiten BC, CA, AB, GH, HF, FG resp. in A', B', C', F', G', H' geschnitten und begegnen sich $A'F$, $B'G$, $C'H$ in einem Puncte D, so treffen auf AF', BG', CH' in einem Puncte I zusammen.

So wie dieser Satz eine Folge des Vorigen ist, so kann man aus ihm auch umgekehrt jene Eigenschaft der Pyramiden selbst herleiten. Es läfst sich aber dieser Satz, unabhängig von dem Vorhergehenden, mit Hülfe eines andern Theorems (Baryc. Calcul, §. 291.) und seiner Inverse darthun, wonach, wenn die drei Spitzen eines Dreiecks FGH mit einem vierten in der Ebene desselben liegenden Puncte D durch Gerade verbunden werden, und wenn eine beliebige andere Gerade MN der Ebene von den Seiten des Dreiecks GH, HF, FG in F', G', H' und von jenen drei Geraden DF, DG, DH in A', B', C' geschnitten wird, — das Product aus den drei Verhältnissen

$$(G'A' : H'A')\,(H'B' : F'B')\,(F'C' : G'C') = 1 \text{ ist.}$$

Denn eben so mufs auch, mit Anwendung der Inverse, weil BC, CA, AB die Linie MN in A', B', C' schneiden, und weil AF', BG', CH' in einem Puncte I zusammen kommen sollen,

$$(B'F' : C'F')(C'G' : A'G')(A'H' : B'H') = 1 \text{ sein.}$$

Diese Gleichung ist aber mit der vorigen identisch.

Zusatz. Obschon es durchaus unmöglich ist, zwei Dreiecke zu construiren, von denen ein jedes in das andere eingeschrieben und folglich auch um das andere umschrieben ist, so läfst sich doch bei mehrseitigen Vielecken diese Unmöglichkeit nicht ohne vorangegangene näherer Prüfung behaupten.

Seien z. B. A, B, C, D (Fig. 2.) die auf einander folgenden Spitzen eines ebenen Vierecks; a, b, c, d vier durch sie resp. gezogene Geraden, so bilden diese ein um $ABCD$ umschriebenes Viereck, dessen Spitzen die Durchschnitte von a mit b, von b mit c, etc., oder, wie ich der Kürze wegen schreiben will, ab, bc, cd, da sind. Soll nun dieses Viereck zugleich ein eingeschriebenes sein, so mufs ab in einer der Seiten von $ABCD$, und zwar in CD, liegen, wenn nicht die Seiten des einen Vierecks mit denen des andern zum Theil zusammenfallen sollen. Eben so mufs bc in DA, cd in AD, da in BC liegen. Man denke sich daher

die Linien a, b, c, d resp. um A, B, C, D sich drehend; a willkührlich, b dergestalt, dafs der Punct ab in CD fortrückt; c so, dafs bc in AD, und d so, dafs cd in AB fortgeht. Der Punct ad wird alsdann eine Curve beschreiben, und wenn er dabei einmal durch die Gerade BC geht, so wird das in diesem Momente von den Linien a, b, c, d gebildete Viereck zugleich ein eingeschriebenes sein.

Um nun die gedachte Curve und ihre vielleicht möglichen Durchschnitte mit BC zu finden, so setze man zuerst, weil D mit A, B, C in einer Ebene liegt:

$$\delta D = \alpha A + \beta B + \gamma C,$$

oder kürzer, wenn man hier und in dem Verfolg der Rechnung für αA, βB, γC, δD schlechthin A, B, C, $-D$ schreibt:

$$A + B + C + D = 0.$$

Man bezeichne ferner die Puncte ab, bc, cd, da mit F, G, H, I, und setze, weil F in CD liegen soll:

$$F = C + xD;$$

(oder vielmehr $fF = \gamma C - x\delta D$, wo $f = \gamma - \delta x$ ist, und γ, $-\delta x$ die Gewichte sind, womit die Puncte C, D belastet, F zu ihrem Schwerpunct haben. Eben so aber, wie vorhin in C und D die Coëfficienten γ und $-\delta$, so wird hier in F der Coëfficient f mit eingeschlossen gedacht. Dieselbe Bemerkung gilt auch für die in der Folge vorkommenden Buchstaben G, H, I. (Baryc. Calc. §. 235. etc.))

Substituirt man für C seinen Werth aus der vorhergehenden Gleichung, so kommt:

$$F = -A - B - D + xD$$

und

$$F + B = -A + (x-1)D = G,$$

weil G der gemeinschaftliche Punct von FB und AD ist. Dies giebt weiter:

$$G = -A - (x-1)(A+B+C),$$
$$G + (x-1)C = -xA - (x-1)B = H,$$

weil GC und AB sich in H schneiden;

$$H = -xA + (x-1)(A+C+D) = -A + (x-1)(C+D)$$
$$= -A + (x-1)D + (x-1)(F-xD),$$
$$H + (x-1)^2 D = -A + (x-1)F = I,$$

als dem Durchschnitte von HD mit AF;

$$I = B + C + D + (x-1)(C+xD) = B + xC + (1-x+x^2)D.$$

I ist also der Schwerpunct der Puncte B, C, D mit Gewichten, die sich wie $1 : x : 1 - x + x^2$ (oder vielmehr wie $\beta : \gamma x : -\delta(1 - x + x^2)$) zu einander verhalten. Läfst man nun F (oder ab) in der Geraden CD sich fortbewegen, so erhält x nach und nach alle möglichen Werthe, und alle die damit sich ergebenden Schwerpuncte I (oder ad) liegen in einem Kegelschnitte (B. C. §. 130.). Dieser Kegelschnitt kann aber der BC nicht begegnen, oder, was dasselbe ist: I kann niemals mit B und C in eine Gerade zu liegen kommen, weil der Ausdruck von I durch B, C, D sich niemals auf B und C allein reduciren kann. Denn für keinen möglichen Werth von x kann der Coëfficient von D, $1 - x + x^2 = 0$ werden.

Es ist folglich auch nicht möglich, dafs von zwei Vierecken ein jedes dem andern zugleich ein- und umschrieben sein sollte. — Auf Vielecke von mehreren Seiten habe ich die Untersuchung nicht ausgedehnt.

Anzeige einiger Fehler und Verbesserungen in meinem Aufsatze über Vielecke im Kreise, im ersten Hefte des dritten Bandes.

Seite 7 Zeile 18 v. o: statt d. h. lies und folglich die Summe aller m Bögen.
— 8 — 8 v. o. statt ungeraden lies geraden.
— 11 — 7 v. u. statt 16 lies 10.
— 14 — 12 v. o. statt $\sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta \ldots.)$ lies $\sin\frac{1}{2}(-\alpha + \beta \ldots.)$.
— 15 — 9 v. o. Multiplicirt man je zwei unter einander geschriebene Factoren etc. Dies pafst nicht mehr ganz, da die Formel in den vier ersten Zeilen dieser Seite im Manuscript nur zwei Zeilen einnahm.
— 16 — 6 v. u. statt nach lies für.
— 16 bei der lezten Formel lies IV* statt VI*.
— 18 Zeile 16 v. o. statt vor lies von.
— 22 — 15 v. u. setze vor $\frac{4bcde}{a}$ das Zeichen —.
— 29 — 9 v. u. statt aus dieser Gleichung für das Vieleck lies: aus dieser Gleichung, aus der Gleichung für das Vieleck.
— 34 — 2 v. u. statt — setze =.

24.
Beweise des Lehrsatzes No. 16. im 2. Heft des 3. Bandes dieses Journals.

16. **Lehrsatz.** Bekanntlich können die Seiten eines Dreiecks oder ihre Verlängerungen von 4 Kreisen berührt werden. Ist das Dreieck rechtwinklig, so ist der Radius des Kreises über der Hypothenuse so grofs als die Summe der Radien der 3 übrigen Kreise, und ferner: Bei dem bekannten Pythagorischen Dreieck, dessen Seiten durch irgend eine Längen-Einheit gemessen, 3, 4, 5 sind: sind die Radien jener Kreise durch die nemliche Einheit gemessen, 1, 2, 3, 6.

(Erster Beweis vom Herrn Professor Dr. *Lehmus* zu Berlin.)

Bezeichnen a, b, c die 3 Seiten eines Dreiecks; S den Ausdruck $a+b+c$; A den $b+c-a$; B den $a+c-b$; C den $a+b-c$; ϱ den Halbmesser des Kreises im Dreieck, α den aufserhalb des Kreises jenseits a, β den jenseits b, γ den jenseits c, so ist

$$\frac{1}{B}+\frac{1}{C}=\frac{B+C}{BC}=\frac{2a}{a^2-(b-c)^2}=\frac{2a}{(a^2-b^2-c^2+2bc)};$$

also, weil nach der Voraussetzung $a^2=b^2+c^2$ ist:

$$\frac{1}{B}+\frac{1}{C}=\frac{a}{bc}.$$

Eben so erhält man

$$\frac{1}{A}-\frac{1}{S}=\frac{a}{bc},$$

und folglich

$$\frac{1}{A}-\frac{1}{S}=\frac{1}{B}+\frac{1}{C};$$

also auch, wenn F den Inhalt des Dreiecks bezeichnet,

$$\frac{2F}{A}=\frac{2F}{S}+\frac{2F}{B}+\frac{2F}{C}.$$

Nach §. 303. meiner Geometrie ist aber

$$\alpha=\frac{2F}{A},\quad \varrho=\frac{2F}{S},\quad \beta=\frac{2F}{B},\quad \gamma=\frac{2F}{C};$$

und folglich

$$\alpha=\varrho+\beta+\gamma.$$

Verhalten sich ferner a, b, c wie 5, 4, 3, so geben diese Formeln sogleich, weil $F=6$ ist: $\alpha=6$, $\beta=3$, $\gamma=2$, $\varrho=1$.

(Zweiter Beweis von Herrn *Remy*, Stud. phil. zu Berlin.)

Es sei ABC (Fig. 3. Taf. IV.) das gegebene bei A rechtwinklige Dreieck, dessen Seiten, den Winkeln A, B, C gegenüber, a, b, c sein mögen. Die Mittelpuncte O, M, P, N der Kreise, welche die Seiten des Dreiecks und ihre Verlängerungen berühren, liegen in den Durchschnitten der geraden Linien AO, BO, CO, MN, NP und PM, welche die Winkel bei A, B, C halbiren. Zieht man von den Mittelpuncten M, P, N, O nach den Berührungspuncten D, F; Z, G; T, Q; W, U die Radien MD, MF, PZ, PG, NT, NQ, OW, OU, so erhält man, wie leicht zu sehen, die 4 Quadrate $ADMF$, $AGPZ$, $ATNQ$, $AWOU$. Es sei
MD oder $AD=\alpha$, GP oder $AG=\beta$, NT oder $AT=\gamma$, WO oder $AW=\delta$.
Nun ist

$$AD+AF=2AD=DB+CF+b+c,$$

und da, wegen der Congruenz der Dreiecke DBM, BMV und VMC, CMF,

$$DB+CF=BV+VC=a$$

ist, so ist auch

$$2AD=a+b+c,$$

und folglich

$$1)\quad AD=\alpha=\frac{a+b+c}{2}.$$

Eben so ist auch

$$LB+BG \text{ oder } 2BG=a+b+c,$$

also

$$BG=\frac{a+b+c}{2},$$

und folglich

$$BG-AB \text{ oder } AG=\frac{a+b+c}{2}-c,$$

also

$$2)\quad \beta=\frac{a+b-c}{2}.$$

Ganz auf dieselbe Weise erhält man

$$3)\quad AT=\gamma=\frac{a+c-b}{2}.$$

Endlich ist auch

$$AW+AU=2AW=b+c-(WB+UC)$$

oder, da $WB=BY$ und $UC=YC$, also $WB+UC=a$,

$$2AW=b+c-a,$$

mithin

$$4)\quad AW=\delta=\frac{b+c-a}{2}.$$

Addirt man nun die Ausdrücke (2. 3. 4.), so ergiebt sich

$$\beta+\gamma+\delta=\frac{a+b-c}{2}+\frac{a+c-b}{2}+\frac{b+c-a}{2}=\frac{a+b+c}{2}.$$

Nach (1.) ist aber auch

$$\alpha=\frac{a+b+c}{2},$$

folglich

$$\alpha=\beta+\gamma+\delta.$$

Für das Pythagoräische Dreieck ist

$$\delta=\frac{4+3-5}{2}=1;\quad \gamma=\frac{5+3-4}{2}=2,$$

$$\beta=\frac{5+4-3}{2}=3;\quad \alpha=\frac{5+4+3}{2}=6.$$

(Dritter Beweis, nebst einigen Zusätzen; von einem Ungenannten.)

ABC (Fig. 4. Taf. IV.) sei ein beliebiges Dreieck, dessen drei Seiten, den Winkeln *A*, *B*, *C* gegenüber, *a*, *b*, *c* sein mögen. Der Halbmesser des Kreises *P*, welcher die 3 Seiten des Dreiecks innerhalb berührt, sei r_1. Der Halbmesser des Kreises *Q*, welcher die Seite *a* aufserhalb und die Seiten *b* und *c* innerhalb berührt sey r_2. *DE* berühre den Kreis *Q*, und sei mit *BC* parallel. Alsdann sind die Dreiecke *ADE* und *ABC* ähnlich, und wenn man $DE=n.a$ setzt, so ist $AE=nb$ und $AD=nc$. Nun ist, wenn man den Inhalt des Dreiecks *ABC* durch Δ bezeichnet, bekanntlich

$$1.\quad r_1=\frac{2\Delta}{a+b+c}.$$

Eben so ist

$$2.\quad r_2=\frac{2\Delta n^2}{n(a+b+c)}=\frac{2n\Delta}{a+b+c},$$

weil der Inhalt des Dreiecks $ADE=n^2\Delta$ ist. Der Inhalt des Vierecks *BCDE* ist aber gleich $(n^2-1)\Delta$, und durch r_2 ausgedrückt, weil $BD=(n-1)c$, $CE=(n-1)b$, $BC=a$ und $DE=na$ ist,

$$3.\quad 2(n^2-1)\Delta=r_2[(n+1)a+(n-1)b+(n-1)c]=r_2[n(a+b+c)-(b+c-a)].$$

Hierin den obigen Ausdruck (2.) von r_2 gesetzt, giebt

$$2(n^2-1)\Delta=\frac{2n\Delta}{a+b+c}.[n(a+b+c)-(b+c-a)],\quad \text{oder}$$

$$n^2-1=n^2-n.\frac{b+c-a}{a+b+c},$$

woraus

$$4.\quad n=\frac{a+b+c}{b+c-a},$$

also

$$5.\quad r_2 = \frac{2\triangle}{b+c-a}$$

folgt. Ganz auf dieselbe Weise findet man, wenn man die Halbmesser der Kreise, die b und c aufserhalb berühren, r_3 und r_4 setzt,

$$r_3 = \frac{2\triangle}{a+c-b}, \quad r_4 = \frac{2\triangle}{a+b-c}.$$

Zusammengenommen also ist

$$6.\quad r_1 = \frac{2\triangle}{a+b+c}, \quad r_2 = \frac{2\triangle}{b+c-a}, \quad r_3 = \frac{2\triangle}{a+c-b}, \quad r_4 = \frac{2\triangle}{a+b-c}.$$

Man gebe diesen vier Ausdrücken das Product ihrer Nenner, welches nichts anderes ist als $16\triangle^2$, zum Nenner, so gehen sie in folgende über:

$$7.\quad \begin{cases} 8\triangle r_1 = (a+c-b)[a-(c-b)](b+c-a) = (a^2-c^2-b^2+2cb)(b+c-a), \\ 8\triangle r_2 = (a+c-b)[a-(c-b)](a+b+c) = (a^2-c^2-b^2+2cb)(a+b+c), \\ 8\triangle r_3 = (a+b+c)[a-(b+c)](c-a-b) = (a^2-c^2-b^2-2cb)(c-a-b), \\ 8\triangle r_4 = (a+b+c)[a-(b+c)](b-c-a) = (a^2-c^2-b^2-2cb)(b-c-a). \end{cases}$$

Gesetzt nun, das Dreieck sei bei A rechtwinklig, so ist $a^2 = b^2 + c^2$ und $2cb$ ist alsdann gleich $4\triangle$. In diesem Falle also gehen die vorhergehenden Ausdrücke in folgende über:

$$8.\quad \begin{cases} 8\triangle r_1 = 4\triangle(b+c-a) \text{ oder } r_1 = \frac{1}{2}(b+c-a), \\ 8\triangle r_2 = 4\triangle(a+b+c) \text{ oder } r_2 = \frac{1}{2}(b+c+a), \\ 8\triangle r_3 = 4\triangle(a+b-c) \text{ oder } r_3 = \frac{1}{2}(b-c+a), \\ 8\triangle r_4 = 4\triangle(a+c-b) \text{ oder } r_4 = \frac{1}{2}(a+c-b). \end{cases}$$

Dieses sind zugleich die Ausdrücke der Radien der vier berührenden Kreise für das rechtwinklige Dreieck, und es folgt aus denselben unmittelbar, dafs $r_2 = r_1 + r_3 + r_4$ ist, wie in dem Lehrsatz behauptet wird.

Aus den Ausdrücken (7.) kann man leicht noch einige Zusätze herleiten.

Es ist nemlich

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2bc\cos A,$$

also

$$9.\quad a^2 - c^2 - b^2 = -2bc\cos A.$$

Setzt man dieses in die Ausdrücke (7.), so verwandeln sie sich in

$$\begin{aligned} 4\triangle r_1 &= bc(1-\cos A)(b+c-a), \\ 4\triangle r_2 &= bc(1-\cos A)(a+b+c), \\ 4\triangle r_3 &= bc(1+\cos A)(a+b-c), \\ 4\triangle r_4 &= bc(1+\cos A)(a+c-b). \end{aligned}$$

Dieses giebt z. B.

$$4\Delta(r_1+r_3+r_4) = bc[a+b+c+\cos A(3a-b-c)] \text{ oder}$$
$$4\Delta(r_1+r_3+r_4) = bc(1-\cos A)(a+b+c)+4abc\cos A,$$

folglich, vermöge des 2ten Ausdrucks (10.),

$$4\Delta(r_1+r_3+r_4) = 4\Delta r_2+4abc\cos A$$

oder

$$11.\quad r_1+r_3+r_4 = r_2+\frac{abc}{\Delta}\cos A.$$

Es ist aber, wenn man den Halbmesser des um das Dreieck ABC beschriebenen Kreises durch R bezeichnet, bekanntlich

$$12.\quad R = \frac{abc}{4\Delta},$$

also ist vermöge (11.)

$$13.\quad \begin{cases} r_1+r_3+r_4-4R\cos A = r_2, \text{ und eben so} \\ r_1+r_2+r_4-4R\cos B = r_3, \\ r_1+r_2+r_3-4R\cos C = r_4, \end{cases}$$

das heifst: Für die Halbmesser des innern und der drei äufseren berührenden Kreise in einem beliebigen Dreieck ist der Halbmesser eines beliebigen äufseren Kreises gleich der Summe der Halbmesser der drei übrigen Kreise, weniger dem vierfachen Halbmesser des umschriebenen Kreises multiplicirt in den Cosinus des Winkels in welchem der einzelne berührende äufsere Kreis liegt, oder was dasselbe ist: weniger dem vierfachen Abstande des Mittelpuncts des umschriebenen Kreises von derjenigen Seite des Dreiecks, die dem Winkel gegenüber liegt, in welchem sich der äufsere Kreis befindet.

Wenn einer der Winkel des Dreiecks ein rechter ist, so ist dessen Cosinus Null und man erhält dann den Lehrsatz des Hrn. Steiner.

Ferner geben die Ausdrücke (10.)

$$4\Delta(r_2+r_3+r_4) = bc[3a+b+c+\cos A(a-b-c)]$$

oder

$$4\Delta(r_2+r_3+r_4) = bc(1-\cos A)(b+c-a)+4abc,$$

also vermöge des ersten Ausdrucks (10.)

$$4\Delta(r_2+r_3+r_4) = 4\Delta r_1+4abc,$$

und vermöge (12.)

$$\Delta(r_2+r_3+r_4) = \Delta r_1+4\Delta R$$

oder

$$14.\quad r_2+r_3+r_4 = r_1+4R,$$

das heifst: In einem beliebigen Dreieck sind die Halbmesser der drei

äufseren berührenden Kreise zusammen so lang als der Halbmesser des inneren berührenden Kreises und der vierfache Halbmesser des umschriebenen Kreises.

Wenn das Dreieck rechtwinklig ist, z. B. bei A, so ist $4R = 2a$. Also sind im rechtwinkligen Dreieck die Halbmesser der äufseren Kreise zusammen so lang als der Halbmesser des innern Kreises und die doppelte Hypothenuse. Addirt man die Gleichungen (13. 14.), so erhält man

$$3(r_1 + r_2 + r_3 + r_4) = r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + 4R(1 + \cos A + \cos B + \cos C),$$

also den Satz:

$$15.\quad r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 2R(1 + \cos A + \cos B + \cos C).$$

Setzt man z. B. die erste Gleichung (13.) in (14.), so erhält man

$$r_1 + r_3 + r_4 - 4R\cos A + r_3 + r_4 = r_1 + 4R,$$

oder

$$16.\quad \begin{cases} r_3 + r_4 = 2R(1 + \cos A), & \text{und eben so} \\ r_2 + r_4 = 2R(1 + \cos B), \\ r_2 + r_3 = 2R(1 + \cos C). \end{cases}$$

Für das rechtwinklige Dreieck giebt, wenn z. B. A der rechte Winkel ist, die erste Gleichung (16.) den Satz, dafs die Halbmesser der äufseren Kreise, welche die Katheten berühren, zusammen so lang sind, als die Hypothenuse, was auch folgt, wenn man die 3. und 4. Gleichung (8.) addirt. Aehnliche Sätze geben die Gleichungen (8.) für die Katheten. Es folgt aus denselben auf gleiche Weise:

$$17.\quad r_1 + r_3 = b,\quad r_1 + r_4 = c,\quad r_3 + r_4 = a.$$

25.

Auflösung der Aufgaben und Beweis der Lehrsätze

5. 6. 7. 8. 9. im 1sten Hefte S. 96 und 29. 30. 31. 32. 33. im 2ten Hefte S. 191 des 2ten Bandes dieses Journals.

(Von Herrn Stud. math. *Heinen* zu Bonn.)

Aufgabe 5. Jeder beliebige Punct in der Ebene eines gegebenen geradlinigen Dreiecks kann einer der Brennpuncte eines Kegelschnittes sein, der alle drei Seiten des Dreiecks berührt. Man soll nun untersuchen, welche Lage der Punct in Beziehung auf das Dreieck haben müsse, damit der Kegelschnitt entweder Parabel oder Ellipse oder Hyperbel sei?

Die Beantwortung dieser Aufgabe giebt der 32. Lehrsatz des 2ten Hefts Bd. II. Dieser Satz findet sich auch in Plückers „Analyt. geometr. Entwickelungen." *) Wenn nämlich drei gerade Linien und ein Punct gegeben sind, so giebt es einen Kegelschnitt, welcher die drei gegebenen geraden Linien berührt und den gegebenen Punct zum Brennpuncte hat. Wir können den zweiten Brennpunct dieses Kegelschnittes unmittelbar vermittelst folgenden Satzes bestimmen: Wenn man von irgend einem gegebenen Puncte Tangenten an eine gegebene Ellipse oder Hyperbel legt, und zwei gerade Linien nach den beiden Brennpuncten zieht, so bildet eine dieser geraden Linien mit einer Tangente denselben Winkel, als die andere gerade Linie mit der anderen Tangente. (Entwik. 333.) Sobald nun die beiden Brennpuncte gefunden sind, ergiebt sich sogleich die Natur des Kegelschnittes aus dem bekannten Satze, dafs der Ort der Brennpuncte aller derjenigen Parabeln, die drei gegebene Geraden berühren, derjenige Kreis ist, welcher um das von den gegebenen geraden Linien gebildete Dreieck beschrieben werden kann.

Aufgabe 6. Fället man aus irgend einem Peripheriepuncte P des um ein gegebenes Dreieck beschriebenen Kreises Lothe auf die Seiten des Dreiecks, so liegen bekanntlich die Fufspuncte dieser drei Lothe allemal in irgend einer Geraden G. Man soll denjenigen Punct P finden, für

*) Analytisch-geometrische Entwickelungen von Dr. Plücker. Erster Band. Mit acht Kupfertafeln. Essen bei G. D. Baedeker 1828.

welchen die ihm zugehörige Gerade G mit einer gegebenen Geraden parallel ist.

Auflösung. Nach Sätzen, die wir gleich anführen und beweisen wollen, beruht die Construction der vorstehenden Aufgabe darauf, den Brennpunct derjenigen Parabel zu bestimmen, welche die drei Seiten des gegebenen Dreiecks berührt und deren Durchmesser senkrecht stehen auf der gegebenen Geraden G. Es ist nämlich I.) der Ort der Brennpuncte aller Parabeln, welche die drei Seiten des gegebenen Dreiecks berühren, der um das Dreieck beschriebene Kreis. II.) Wenn man von irgend einem Puncte dieses Kreises Perpendikel auf die drei Seiten des gegebenen Dreiecks fällt, so liegen die Fufspuncte dieser Perpendikel in einer und derselben geraden Linie, welche diejenige Parabel im Scheitel berührt, welche die drei Dreiecksseiten zu Tangenten und jenen Punct zum Brennpuncte hat. Um die eben angedeutete Construction auszuführen brauchen wir folgenden Satz: III.) Zieht man von einem willkührlichen Puncte aus zwei Tangenten an eine Parabel und eine Linie nach dem Brennpuncte, so bildet diese gerade Linie mit einer Tangente dieselben Winkel, als die andere Tangente mit einem beliebigen Durchmesser der Parabel. Wir wollen ihn zunächst beweisen, weil sich alsdann die beiden angeführten unmittelbar ergeben.

Es seien (Fig. 5. Taf. IV.) CD, CE die von einem willkührlichen Puncte C an eine gegebene Parabel gelegten Tangenten, und P der Brennpunct derselben. Man verbinde C mit P und ziehe durch C den Durchmesser CM der Parabel; alsdann ist darzuthun, dafs $\sphericalangle MCE = \sphericalangle PCD$ ist. Zu diesem Ende ziehe man vom Brennpuncte P nach den Berührungspuncten D und E die geraden Linien PD, PE. Alsdann ist:

$$\sphericalangle CPM + \sphericalangle CMP + \sphericalangle PCM = \sphericalangle CPD + \sphericalangle PCD + \sphericalangle CDP = 2R.$$

Oder da nach bekannten Sätzen (Hamilt. V. 10. u. II. 16.):

$\sphericalangle CPM = \sphericalangle CPD$ und $\sphericalangle CDP = \sphericalangle PCD + \sphericalangle PCM$, und $\sphericalangle CMP = 2MCE$,

so folgt

$$\sphericalangle 2MCE + \sphericalangle PCM = \sphericalangle 2PCD + \sphericalangle PCM,$$

mithin

$$\sphericalangle MCE = \sphericalangle PCD.$$

Es sei, um Satz I. zu beweisen, AB das von den beiden Tangenten CE, CD interceptirte Stück irgend einer dritten Tangente, und BG parallel gezogen mit CM, so hat man:

$$< APB = 2R - \begin{cases} PAB + ABP \\ ECM + \begin{cases} GBD \\ MCB \end{cases} \end{cases}$$

also

$$< APB = 2R - < ACB.$$

In jeder Parabel, welche von den drei geraden Linien *CA*, *CB* und *BA* berührt wird, ergänzt also der Winkel *ACB* den Winkel am Brennpuncte *APB* zu zwei Rechten, oder der Ort der Brennpuncte aller Parabeln, welche von den drei Seiten des gegebenen Dreiecks berührt werden, ist derjenige Kreis, welcher um das Dreieck beschrieben werden kann.

Eben so leicht knüpfet sich der Beweis des Satzes II. hier an. Denn, wenn wir von irgend einem Puncte *C* irgend einer Tangente *CE* eine gerade Linie *CP* nach dem Brennpuncte der Parabel und eine zweite gerade Linie *CD* so ziehen, dafs der Winkel *PCD*, welchen sie mit der erstgezogenen bildet, gleich ist demjenigen Winkel *ECM*, den die Tangente mit einem Durchmesser der Parabel bildet, so ist nach III. diese gerade Linie eine zweite Tangente der Parabel, und umgekehrt: wenn man von einem Brennpuncte einer Parabel aus nach allen möglichen Tangenten unter demselben gegebenen Winkel gerade Linien zieht, so liegen die Fufspuncte aller dieser geraden Linien auf einer neuen geraden Linie, die selbst eine jener Tangenten ist und mit den Durchmessern der Parabel den gegebenen Winkel bildet. Ist dieser Winkel ein Rechter, so ist diese gerade Linie offenbar die Tangente im Scheitel der Parabel. Da wir nun die drei Seiten irgend eines Dreiecks ansehen können als die Tangenten einer Parabel, welche nach II. irgend einen Punct des um das Dreieck beschriebenen Kreises zum Brennpuncte hat, so haben wir beiläufig den in der Aufgabe als bekannt vorausgesetzten Satz bewiesen, dafs die von irgend einem Puncte des um irgend ein gegebenes Dreieck beschriebenen Kreises auf die Seiten des Dreiecks gefällten Perpendikel in gerader Linie liegen. Nach diesen Sätzen ergiebt sich folgende Construction:

Es sei *HM* (Fig. 6. Taf. IV.) die der Richtung nach gegebene gerade Linie, *ABC* das gegebene Dreieck. Man fälle aus einem beliebigen Winkelpuncte des Dreiecks, etwa aus *C* ein Perpendikel auf *HM*, welches mit der einen durch *C* gehenden Dreiecksseite *AC* einen Winkel α bildet, und lege endlich durch denselben Punct *C* eine zweite gerade Linie, welche mit der anderen durch *C* gehenden Dreiecksseite *BC* denselben Winkel α

bildet. Diese letztgezogene Linie schneidet den um das Dreieck beschriebenen Kreis in dem verlangten Puncte P. —

Die eben gegebene Construction, zu der wir mittelst obiger Sätze gelangten, läfst sich auch ohne Hülfe derselben folgendermafsen rechtfertigen.

Es seien E, G, D (Fig. 6. Taf. IV.) die Fufspuncte der vom Puncte P auf die Dreiecksseiten BC, BA und AC gefällten Perpendikel. Alsdann liegen die vier Puncte P, E, C und D auf dem Umfange desselben Kreises. Hieraus folgt, dafs

$\sphericalangle CED = \sphericalangle CPD$; und da

$\sphericalangle ECF = \sphericalangle PCD$, so ist in den Dreiecken CPD und CEF auch

$\sphericalangle PDC = \sphericalangle EFC = R$, also ED senkrecht auf CM. q. e. d.

Statt durch E, P, D und C können wir auch durch P, E, B und G einen Kreis legen, und es zeigt sich dann sogleich, indem wir BI parallel mit CM ziehen und P mit B verbinden, dafs $\triangle EIB \backsim \triangle PGB$, daher $\sphericalangle EIB = \sphericalangle EFC = R$, folglich auch die durch E und G gezogene Linie senkrecht auf CF ist, daher die drei Puncte E, G und D in gerader Linie liegen.

Lehrsatz 7. Halbiret man in einem Viereck im Kreise, sowohl die Winkel zwischen den Diagonalen, als auch die Winkel, welche die gegenüberliegenden Seiten einschliefsen, so sind von den 6 Geraden, welche diese Winkel halbiren, drei und drei parallel *).

Beweis. Wir wollen

$$(1.) \quad y^2 + x^2 = r^2$$

für die Gleichung des Kreises nehmen, und zwei gegenüberstehende Seiten des in demselben beschriebenen Vierecks darstellen durch eine einzige Gleichung:

$$(y+ax+b)(y+a'x+b') = y^2+(a+a')xy+aa'x^2+(b+b')y+(ab'+a'b)x+bb' = 0.$$

Wenn wir voraussetzen, die Coordinaten-Axen seien so bestimmt, dafs sie denjenigen beiden geraden Linien, welche die von jenen Viereckseiten gebildeten Scheitelwinkel halbiren, parallel sind, so haben wir offenbar folgende Bedingungsgleichung:

$$a + a' = 0,$$

und mithin reduzirt sich die Gleichung jenes Linien-Systems auf:

*) Ein anderer Beweis dieses Lehrsatzes steht im dritten Bande dieses Journals Heft 1. S. 84. Anm. d. Red.

$$(2.)\quad y^2 + aa'x^2 + (b+b')y + (ab'+a'b)x + bb' = 0.$$

Alle Gleichungen des zweiten Grades, die sich durch Verbindung von (1.) und (2.) ergeben, sind in folgender enthalten:

$$(3.)\quad y^2 + \frac{(aa'+\mu)}{1+\mu}x^2 + \frac{(b+b')}{1+\mu}y + \frac{(ab'+a'b)}{1+\mu}x + \frac{bb'-\mu r}{1+\mu} = 0,$$

wo wir durch μ einen unbestimmten Coefficienten bezeichnen. Bei einer gehörigen Bestimmung dieses Coefficienten stellt diese Gleichung jede beliebige Linie zweiter Ordnung dar, welche durch die vier Winkelpuncte des in den Kreis beschriebenen Vierecks gehet. In jener allgemeinen Gleichung sind also auch enthalten die Gleichungen der beiden übrigen Liniensysteme, die durch jene vier Puncte gehen, nämlich des Systems der beiden noch übrigen gegenüberliegenden Seiten und des Systems der beiden Diagonalen des in den Kreis beschriebenen Vierecks. Für jeden dieser beiden Fälle mufs die Gleichung (3.) folgende der Gleichung (2.) ganz entsprechende Form annehmen können:

$$y^2 + (\alpha+\alpha')xy + \alpha\alpha'x^2 + (\alpha\beta'+\alpha'\beta)x + (\beta+\beta')y = 0,$$

und da in der Gleichung (2.) das mit xy behaftete Glied fehlt, so folgt hieraus

$$\alpha + \alpha' = 0,$$

d. h. diejenigen beiden geraden Linien, welche die von den beiden Linien jedes der resultirenden Systeme gebildeten Scheitelwinkel halbiren, sind wie in dem ursprünglich angenommenen Systeme den beiden Coordinatenaxen parallel. Hiermit ist also der obige Satz bewiesen.

In dem oben citirten Werke N. 293. wird aus Entwickelungen, die mit den vorstehenden im Wesentlichen übereinstimmen, unmittelbar der bekannte Satz angeknüpft, dafs Peripheriewinkel auf demselben Bogen einander gleich sind. Diefs führt uns darauf hin, dafs unser Satz sich auch aus diesem ergeben müsse.

Ist nämlich (Fig. 7. Taf. IV.) $ADBC$ das in den Kreis beschriebene Viereck, dessen Diagonalen sich in E und dessen gegenüberstehende Seiten, AD und BC in G, und AC und DB in F schneiden, so hat man, wenn GH, welche CD in M schneidet, den Winkel DGB und EK den Winkel AEC halbiret,

$$\begin{aligned} \sphericalangle AEC &= \sphericalangle ECB + \sphericalangle EBC \\ \sphericalangle ECB &= \sphericalangle CGD + \sphericalangle GDC \\ \hline \sphericalangle AEC &= \sphericalangle CGD + \sphericalangle GDC + \sphericalangle EBC \\ &= \sphericalangle CGD + 2\sphericalangle GDC, \end{aligned}$$

also

$$\tfrac{1}{2} AEC = \tfrac{1}{2} GCD + GDC, \text{ oder}$$
$$< KEC = < EMH, \text{ daher } EK \# GH.$$

Hieraus ergiebt sich leicht der vollständige Beweis des obigen Satzes. —

Lehrsatz 8. Vier beliebige Geraden in einer Ebene bilden zu drei und drei genommen vier Dreiecke. In jedem dieser Dreiecke schneiden die drei Lothe aus den Spitzen auf die gegenüberliegenden Seiten einander in einem Puncte, und diese vier Puncte liegen allemal in einer Geraden.

Beweis. Es seien bei der Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten:

$$(1.)\quad y + ax + b = 0,$$
$$(2.)\quad y + a'x + b' = 0,$$
$$(3.)\quad y + a''x + b'' = 0,$$
$$(4.)\quad y + a'''x + b''' = 0,$$

die Gleichungen der vier gegebenen geraden Linien. Alsdann findet man leicht für das von dem Durchschnitte von (1.) und (2.) auf (3.) gefällte Perpendikel folgende Gleichung:

$$(5.)\quad a''y - x + \frac{b - b' + (ba' - b'a)a''}{a' - a} = 0,$$

und durch Vertauschung ergiebt sich für das vom Durchschnitte von (1.) und (3.) auf (2.) gefällte Perpendikel:

$$(6.)\quad a'y - x + \frac{b - b'' + (ba'' - b''a)a'}{a'' - a} = 0.$$

Multipliciren wir die Gleichung (5.) mit a' und die Gleichung (6.) mit a'', und ziehen die erstere von der letzteren ab, so erhalten wir:

$$x = \frac{a'a''(a^2-1)(b'-b'') - aa''(a'^2-1)(b-b'') + aa'(a''^2-1)(b-b')}{(a'-a)(a'-a'')(a''-a)}$$

für die Abscisse des Kreuzungspunctes der Perpendikel in dem von den drei ersten geraden Linien gebildeten Dreieck.

Wenn wir nun annehmen die zweite Axe, über welche ursprünglich durchaus keine Bestimmung gemacht worden ist, gehe durch den eben bezeichneten Kreuzungspunct, so erhalten wir folgende Bedingungsgleichung:

$$(7.)\quad ga'a''(b'-b'') - g'aa''(b-b'') + g''aa'(b-b') = 0.$$

(Wir wollen nämlich der kürzeren Bezeichnung wegen $a^2 - 1 = g$, $a'^2 - 1 = g'$, $a''^2 - 1 = g''$, $a'''^2 - 1 = g'''$ setzen.) Soll die zweite Axe ebenfalls durch den Kreuzungspunct in dem von den Geraden (1.), (2.) und

(4.) gebildeten Dreieck gehen, so mufs eine zweite Bedingungsgleichung:

$$(8.)\quad g a' a'''(b'-b''') - g' a a'''(b-b''') + g''' a a'(b-b') = 0$$

Statt finden, die wir unmittelbar aus (7.) erhalten, indem wir die zweimal accentuirten Buchstaben dreimal accentuiren. Wir können endlich noch zur völligen Bestimmung des Coordinatensystems annehmen, die erste Gerade (1.) gehe durch den Anfangspunct. Alsdann ist $b = 0$, und wir erhalten aus (7.) und (8.):

$$\frac{g}{a} a' a''(b'-b'') + g' a'' b'' - g'' a' b' = 0,$$

$$\frac{g}{a} a' a'''(b'-b''') + g' a''' b''' - g''' a' b' = 0.$$

Eliminirt man zwischen diesen beiden Gleichungen $\frac{g}{a}$, so findet man:

$$g''' a' a''(b'-b'') - g' a'' a'''(b'''-b'') + g'' a' a'''(b'''-b') = 0.$$

Dieselbe Gleichung erhält man aus (7.), indem man die nicht accentuirten Buchstaben dreimal accentuirt. Es geht also die Axe der y auch durch den Kreuzungspunct der Perpendikel in dem von den Geraden (2.), (3.) und (4.) gebildeten Dreieck. Es ist also auch bewiesen, dafs die Kreuzungspuncte dreier der vier im Satze bezeichneten Dreiecke in gerader Linie liegen, und da wir für dieselben je drei beliebige nehmen können, folgt auch, dafs alle vier Kreuzungspuncte in gerader Linie liegen. —

Lehrsatz 9. Vier beliebige Puncte in der Peripherie eines gegebenen Kreises bestimmen zu dreien genommen vier Dreiecke. Die vier Puncte, in welchen die Lothe aus den Spitzen dieser vier Dreiecke auf die gegenüberliegenden Seiten einander schneiden, liegen allemal in der Peripherie eines Kreises, welcher dem gegebenen gleich ist.

Beweis. Es ist ein bekannter und leicht zu beweisender Satz, dafs die vier gegebenen Puncte und die vier Constructionspuncte alle acht auf ein und derselben gleichseitigen Hyperbel liegen. Wir wollen die beiden Coordinatenaxen, was auf dreifache Weise geschehen kann, durch die vier gegebenen Puncte legen. Stellt alsdann die Gleichung:

$$(1.)\quad y^2 + 2\alpha xy + \beta x^2 + 2\gamma y + 2\delta x + \varepsilon = 0$$

jene Hyperbel dar, so ist zunächst, wenn υ den Coordinatenwinkel bedeutet,

$$1 - 2\alpha \cos\upsilon + \beta = 0,$$

und, da die gegebenen Puncte auf einem Kreise liegen,

$$\beta = 1,$$

mithin:

$$(2.) \quad \alpha = \frac{1}{\cos v}.$$

Wenn wir von denjenigen beiden (gegebenen) Puncten der Curve, welche auf der zweiten Axe liegen und deren Ordinaten wir y', y'' nennen wollen, Perpendikel auf die erste Axe fällen, so sind die zweiten Durchschnitte dieser Perpendikel mit der Curve zwei der vier Constructionspuncte. Das System dieser beiden Perpendikel wird durch folgende Gleichung dargestellt:

$$\left(y - y' + \frac{x}{\cos v}\right)\left(y - y'' + \frac{x}{\cos v}\right) = 0,$$

die entwickelt folgende Form annimmt:

$$y^2 + \frac{2}{\cos v} xy + \frac{x^2}{\cos v^2} - (y' + y'')y - \left(\frac{y' + y''}{\cos v}\right)x + y'y'' = 0.$$

Wenn wir diese Gleichung von (1.) abziehen und neben der Gleichung (2.) zugleich auch berücksichtigen, dafs $-(y' + y'') = 2\gamma$, $y'y'' = \varepsilon$, so ergiebt sich:

$$x\left(\left(\beta - \frac{1}{\cos v^2}\right)x + \left(2\delta + \frac{y' + y''}{\cos v}\right)\right) = 0.$$

Diese Gleichung stellt, wenn wir den Factor x fortlassen, diejenige gerade Linie dar, welche durch die beiden Constructionspuncte geht, und die, wie die Form der Gleichung zeigt, der zweiten Axe parallel ist. Es ist also bewiesen, dafs zwei gegebene Puncte und zwei Constructionspuncte die Winkelpuncte eines Parallelogramms sind, und dafs also, da wir die zweite Axe durch je zwei der gegebenen Puncte legen können, die vier Constructionspuncte ein Viereck bilden, das mit dem von den vier gegebenen Puncten gebildeten Viereck identisch ist. Hieraus folgt denn auch der vorstehende Satz. —

Wir hätten alle analytische Entwickelung bei Seite setzen können, wenn wir folgende beiden Sätze als bekannt betrachtet hätten:

1) Wenn man durch die vier Durchschnitte irgend eines Kegelschnittes und eines Kreises paarweise genommen, zwei gerade Linien legt, so schneiden dieselben die Axe des Kegelschnittes unter gleichen Winkeln.
2) Der Winkel zweier zugeordneter Durchmesser der gleichseitigen Hyperbel, weniger dem Doppelten desjenigen Winkels, den der eine dieser Durchmesser mit der Queraxe bildet, ist gleich einem rechten Winkel.

Lehrsatz 29. Die Leitlinien aller Parabeln in einer Ebene, von denen jede drei beliebige Geraden berührt, schneiden einander in einem und demselben Puncte, und zwar in dem nemlichen Puncte, in welchem die aus den Winkeln des von den drei Geraden eingeschlossenen Dreiecks auf die gegenüberstehenden Seiten gefällten Lothe einander schneiden.

Um diesen Satz zu beweisen, brauchen wir blofs darzuthun, dafs wenn eine Parabel von irgend drei geraden Linien berührt wird, die Leitlinien derselben durch den Kreuzungspunct der drei Perpendikel gehen, welche in dem von den drei Geraden gebildeten Dreieck von den Spitzen auf die gegenüberliegenden Seiten gefällt werden. Zu diesem Ende sei:

$$y^2 = 2px$$

die Gleichung einer gegebenen Parabel, bezogen auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, und

$$\begin{aligned} y + ax + b &= 0, \\ y + a'x + b' &= 0, \\ y + a''x + b'' &= 0, \end{aligned}$$

die Gleichungen dreier geraden Linien. Sollen diese Linien die gegebene Parabel berühren, so erhalten wir folgende drei Bedingungsgleichungen zwischen den Constanten

$$b = \frac{p}{2a}, \quad b' = \frac{p}{2a'}, \quad b'' = \frac{p}{2a''}.$$

Substituiren wir diese Werthe für b, b', b'' in den Ausdruck für die Abscisse des Kreuzungspunctes der Perpendikel, welche von den Spitzen des von den drei geraden Linien gebildeten Dreiecks auf die gegenüberliegenden Seiten gefällt werden, nemlich in folgenden Ausdruck: (siehe den Beweis des Satzes 8.)

$$x = \frac{a'a''(a^2-1)(b'-b'') - aa''(a'^2-1)(b-b'') + aa'(a''^2-1)(b-b')}{(a'-a)(a'-a'')(a''-a)},$$

so ergiebt sich auf der Stelle:

$$x = -\frac{p}{2}.$$

Der Kreuzungspunct liegt also auf der Directrix der Parabel.

Lehrsatz 30. Berührt irgend eine Parabel drei Geraden, welche ein gleichseitiges Dreieck einschliefsen, so treffen die drei Geraden aus den Ecken des Dreiecks nach

den Berührungspuncten einander im Brennpuncte der Parabel.

Beweis. Dieser Satz ergiebt sich unmittelbar, wenn wir beweisen, dafs umgekehrt eine gerade Linie, welche durch einen Winkelpunct eines um eine gegebene Parabel beschriebenen gleichseitigen Dreiecks und den Brennpunct der Parabel geht, die gegenüberliegende Seite des Dreiecks in dem Berührungspuncte schneidet.

Es sei nun ABC (Fig. 8. Taf. IV.) das umschriebene Dreieck; F der Brennpunct, welcher auf dem um das Dreieck beschriebenen Kreise liegen mufs. Man ziehe CF, welche BA im Puncte E schneidet; alsdann ist E derjenige Punct, in welchem die Parabel von BA (genugsam verlängert) berührt wird. Denn verbindet man den Punct F mit dem Puncte B und zieht hernach BG so, dafs die Winkel ABF und GBC gleich sind, so ist BG ein Durchmesser der Parabel. Mit diesem Durchmesser parallel ziehe man endlich durch E die Linie EH. Hiernach ergiebt sich nach allgemein bekannten Sätzen:

$$\begin{aligned} \sphericalangle BEC &= \left\{\begin{matrix}\sphericalangle BFC \\ \sphericalangle BAC \\ \sphericalangle ABC\end{matrix}\right\} - \sphericalangle EBF \\ &= \sphericalangle FBC \\ &= \sphericalangle ABG \\ &= \sphericalangle DEH \end{aligned}$$

woraus dann folgt, dafs E der Berührungspunct ist.

Lehrsatz 31. *a.* Berührt irgend eine Fläche zweiten Grades die sechs Kanten einer dreiseitigen Pyramide oder ihre Verlängerungen, so schneiden die drei Geraden durch die Berührungspuncte der gegenüberliegenden Kanten, einander allemal in einem Puncte.

Beweis. Eine Fläche zweiter Ordnung ist durch sechs ihrer Tangenten und drei Puncte vollkommen bestimmt. Sind jene sechs Tangenten die Kanten eines Tetraëders, und jene drei Puncte diejenigen Puncte, in welchen drei dieser Kanten (die nicht in derselben Ebene sich befinden) berührt werden, so erhalten wir die drei übrigen Berührungspuncte auf der Stelle. Denn jede Seitenfläche jenes Tetraëders, etwa ABC (Fig. 9. Taf. IV.), schneidet die Fläche zweiter Ordnung in einer Curve derselben Ordnung, die von drei Kanten AB, AC, BC berührt wird.

Sind die Berührungspuncte M und O auf zwei dieser Kanten, auf AC und AB, gegeben, so erhalten wir nach einem bekannten Satze den Berührungspunct N auf der dritten Kante CB, indem wir durch den Durchschnitt von MB und CO, durch E, die gerade Linie AN ziehen, die auf BC jenen Berührungspunct bestimmt. Ist aufser den Berührungspuncten M und O noch ein Berührungspunct z. B. P auf AD gegeben, so erhalten wir, wenn wir wie eben construiren, auch die beiden übrigen Berührungspuncte Q und R. Um nun zu beweisen, dafs diejenigen geraden Linien, welche diese Puncte, paarweise genommen, P und N, Q und M, O und R verbinden, sich in demselben Puncte schneiden, verfahren wir am kürzesten auf folgende Weise. —

In den Puncten A, B, C und D wollen wir uns vier Gewichte denken, die sich verhalten, wie

$$1 : \frac{OA}{OB} : \frac{MC}{MA} : \frac{PD}{PA}.$$

Alsdann fallen die Schwerpuncte der Gewichte

A und B in O, D und C in R,
A und C in M, D und B in Q,
A und D in P, B und C in N.

Mithin gehen QR, MQ und PN durch den Schwerpunct aller vier Gewichte, und der obige Satz ist also bewiesen.

Zusätzlich bemerken wir, dafs durch denselben Punct auch diejenigen vier geraden Linien gehen, die von jedem der Eckpuncte des Tetraeders nach dem Kreuzungspunct derjenigen drei geraden Linien gezogen werden, die in der gegenüberliegenden Seitenfläche die Berührungspuncte mit den gegenüberliegenden Winkelpuncten verbinden.

Lehrsatz 31. *b.* Berührt von zwei beliebigen Flächen zweiten Grades jede die sechs Kanten einer dreiseitigen Pyramide oder ihre Verlängerungen, so liegen die zwölf Berührungspuncte allemal in einer dritten Fläche desselben Grades.

Beweis. Wenn wir drei in derselben Ebene liegende Kanten des Tetraëders, etwa die Kanten AB, AC, BC (Fig. 10. Taf. IV.) nehmen, welche in den Puncten O, M, N und O', M', N' von den beiden Flächen zweiter Ordnung berührt werden, so gehen nach der schon vorhin gemachten Bemerkung die geraden Linien AN, CO und BM, so wie auch

AN', CO', und BM' durch denselben Punct. Alsdann ergiebt sich leicht, dafs die sechs Puncte O, M, N und O', M', N' auf einem und demselben Kegelschnitte liegen. Die vier Kegelschnitte, welche wir hiernach auf den vier Seitenflächen des Tetraëders construiren können, schneiden sich offenbar zu je zwei in zwei Puncten, und durch je zwei dieser Kegelschnitte können wir beliebig viele Flächen zweiter Ordnung legen. (Es ist leicht zu zeigen, dafs diefs überhaupt immer dann geschehen kann, wenn zwei Kegelschnitte im Raume durch dieselben beiden Puncte gehen.)

Wenn wir uns auf die Fig. 11. Taf. IV. beziehen, so können wir z. B. einen Kegelschnitt durch die sechs Puncte O, O', N', N, M, M' und einen zweiten durch die sechs Puncte O, O', Q', Q, P, P' legen, welcher den ersten in den beiden Puncten O, O' schneidet. Durch diese beiden Kegelschnitte lassen sich unendlich viele Oberflächen zweiter Ordnung legen, die also durch die zehn Puncte O, O', M, M', N, N', Q, Q', P, P' gehen. Um eine solche Linie vollkommen zu bestimmen, müssen wir noch einen Punct annehmen; dieser Punct sei R. Die so bestimmte Fläche wird von der Ebene ACD nothwendig in einem Kegelschnitte geschnitten. Auf diesem Kegelschnitte liegen die Puncte MM', PP', RR', also liegt auf demselben der Punct R', welcher Punct mithin ein Punct der Oberfläche ist.

Lehrsatz 33. 1) Wenn in einer Ebene zwei gerade Linien einander schneiden, so giebt es zwei andere Geraden, die ihre Winkel halbiren.

2) Sind drei Geraden gegeben, so wird jede derselben von den zwei Geraden, welche nach (1.) zu den beiden übrigen gehören, in zwei Puncten geschnitten; zusammen giebt es also 6 solcher Durchschnittspuncte, und von diesen 6 Durchschnittspuncten liegen 4 mal 3 in einer Geraden.

3) Sind vier gerade Linien gegeben, so wird jede derselben von den vier Geraden, welche zu den drei übrigen gehören, nach (2.) in vier Puncten geschnitten; solcher Puncte sind also zusammen 16, und von diesen 16 Puncten liegen 8 mal 4 in einer Geraden.

4) Sind 5 Gerade gegeben, so wird jede derselben von den 8 Geraden, welche zu den 4 übrigen gehören, nach (3.) in 8 Puncten geschnitten; dieses sind zusammen 40 Puncte, und von diesen 40 Puncten liegen 16 mal 5 in einer Geraden. —

Ueberhaupt bei n gegebenen Geraden wird jede von den 2^{n-2} Geraden, welche zu den $n-1$ übrigen gehören, in 2^{n-2} Puncten geschnitten, welches zusammen 2^{n-2} mal n Puncte ausmacht, und von diesen Puncten liegen 2^{n-1} mal n in einer Geraden.

Dieser Satz ist noch ein specieller Fall von einem allgemeineren Satze.

Beweis. Wenn bei der Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten

$$y + ax + b = 0$$

irgend eine gegebene gerade Linie und (y', x') irgend einen gegebenen Punct darstellt, so ist bekanntlich der Abstand dieses Punctes von der geraden Linie durch folgenden Ausdruck gegeben:

$$(1.) \quad \frac{y' + ax' + b}{\sqrt{(1+a^2)}}.$$

Wir wollen x' und y' als veränderliche Gröfsen betrachten, und alsdann diesen Ausdruck der Kürze wegen durch A bezeichnen, so dafs mithin

$$A = 0$$

die Gleichung der gegebenen geraden Linie ist.

Wenn statt der gegebenen geraden Linie eine andere gegeben ist, so ändert sich die Form von (1.) nicht, nur a und b erhalten andere Werthe. Solche Ausdrücke, die sich auf eine zweite, dritte, ... $(n-1)$ gegebene gerade Linie beziehen, wollen wir durch A', A'', ... A^n bezeichnen. Alsdann stellt die Gleichung

$$A \pm A' = 0$$

diejenigen beiden geraden Linien dar, welche die von zwei gegebenen geraden Linien gebildeten Winkel halbiren, und die Gleichung

$$A \pm A' \pm A'' = 0 \ldots,$$

nach dem Ausdrucke des Satzes, die zu drei gegebenen geraden Linien gehörigen vier Geraden dar, und um gleich zum Allgemeinen überzugehen, die Gleichung

$$(II.) \quad A \pm A' \pm A'' \pm \ldots . A^n = 0$$

die zu n gegebenen geraden Linien gehörigen 2^{n-1} Geraden. Diese Gleichung wird befriedigt, wenn folgende Paare von Gleichungen zugleich statt finden:

$$\begin{aligned}
A &= 0, \quad A' \pm A'' \pm \ldots . A^n = 0, \\
A' &= 0, \quad A \pm A'' \pm \ldots . A^n = 0, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
A^n &= 0, \quad A + A' \pm \ldots . A^{n-1} = 0.
\end{aligned}$$

Wir erhalten hiernach n Puncte jener geraden Linie, nämlich die Durchschnitte jeder der n gegebenen geraden Linien mit den zu den $n-1$ übrigen gehörigen Geraden.

Den „allgemeineren Satz, von welchem der vorliegende ein specieller Fall ist," erhält man, wenn man die obige Construction auf irgend eine andere Ebene projicirt. Alsdann sind irgend zwei gegebene geraden Linien und die beiden zugehörigen Geraden solche Linien, die man Harmonicalen genannt hat. Wir brauchen aber in dem analytischen Beweise dieses allgemeineren Satzes nicht zum Projiciren unsere Zuflucht zu nehmen; denselben Satz erhalten wir, wenn wir in der Gleichung (II.) jedem Gliede irgend einen Coëfficienten beifügen. —

Man kommt zu einer neuen Reihe von Sätzen, wenn man die Gleichung (II.) auf eine andere Weise in zwei Theile zerlegt, um sie durch den Durchschnitt von Paaren gerader Linien zu construiren. Auch ergiebt sich leicht die geometrische Beziehung der zu n gegebenen geraden Linien gehörigen 2^{n-1} Geraden. Hierüber vergleiche man die oben angeführten Entwickelungen von Hrn. Plücker (54, 1.).

Zugabe.

Wenn man durch jede der drei Ecken eines gegebenen Dreiecks ABC und durch irgend zwei feste in der Ebene des Dreiecks beliebig angenommene Puncte V und V' (Fig. 12. Taf. IV.) zwei gerade Linien zieht, so wird von diesen Linien jede der drei gegenüberstehenden Seiten in zwei Puncten N und N', M und M', O und O' geschnitten. Diese Durchschnitte liegen alle sechs auf derselben Linie zweiter Ordnung.

Um diesen Satz zu beweisen, brauchen wir nur zu zeigen, dafs in dem von jenen Durchschnittspuncten bestimmten Sechseck die gegenüberliegenden Seiten OO' und $M'N$, MM' und $O'N'$, NN' und OM sich in solchen drei Puncten schneiden, die in gerader Linie liegen. Zu diesem Ende stellen wir die Gleichungen der drei Dreiecksseiten (Gleichungen von der Form $Ay + Bx + C = 0$) der Kürze halber folgendermafsen dar:

$$c = 0 \quad (AB),$$
$$b = 0 \quad (AC),$$
$$a = 0 \quad (BC).$$

Alsdann erhalten wir für die drei durch V und die drei durch V' gehenden geraden Linien folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} c-\mu b &= 0 \text{ für } VA, & c-\mu' b &= 0 \text{ für } V'A,\\ c-\nu a &= 0 \text{ - } VB, & c-\nu' a &= 0 \text{ - } V'B,\\ \mu b-\nu a &= 0 \text{ - } VC, & \mu' b-\nu' a &= 0 \text{ - } V'C, \end{aligned}$$

wobei μ und ν, μ' und ν' gehörig zu bestimmende Coëfficienten bedeuten, deren Werth sich mit der Lage der Puncte V und V' ändert.

(Wir erhalten nämlich die allgemeine Gleichung aller geraden Linien, die durch den Durchschnitt zweier gegebenen gehen, indem wir die beiden Gleichungen der letztgenannten von einander abziehen (oder auch zu einander addiren), nachdem wir zuvor eine derselben mit einem unbestimmten Coëfficienten multiplicirt haben. Nehmen wir ferner Gleichungen von der Form $Ay+Bx+C=0$, so können wir hiernach offenbar irgend drei durch denselben Punct gehende gerade Linien durch drei Gleichungen darstellen, von denen man eine durch Abziehen der beiden übrigen erhält.) Wir erhalten ferner folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} c-\mu b-\nu' a &= 0 \text{ für } NM',\\ c+\mu b-\nu a &= 0 \text{ - } MO,\\ c-\mu' b+\nu' a &= 0 \text{ - } N'O'. \end{aligned}$$

Denn die erste dieser Gleichungen wird befriedigt, wenn zugleich:

$$\begin{aligned} a &= 0 \text{ und } c-\mu b = 0 \text{ (im Puncte } N),\\ b &= 0 \text{ - } c-\nu' a = 0 \text{ (im Puncte } M'). \end{aligned}$$

Die zweite derselben wird befriedigt, wenn zugleich:

$$\begin{aligned} b &= 0 \text{ und } c-\nu a = 0 \text{ (im Puncte } M),\\ c &= 0 \text{ - } \mu b-\nu a = 0 \text{ (im Puncte } O). \end{aligned}$$

Die dritte endlich, wenn:

$$\begin{aligned} a &= 0 \text{ und } c-\mu' b = 0 \text{ (im Puncte } N'),\\ c &= 0 \text{ - } \mu' b-\nu' a = 0 \text{ (im Puncte } O'). \end{aligned}$$

(Die allgemeine Gleichung der Linien, die durch N, den Durchschnitt der Linien $a=0$ und $c-\mu b=0$, gehen, ist nach dem früher Bemerkten $\xi a+c-\mu b=0$, indem ξ irgend einen unbestimmten Coëfficienten bedeutet. Auf ähnliche Weise ist die allgemeine Gleichung der Linien, die durch M', den Durchschnitt der Linien $b=0$ und $c-\nu' a=0$ gehen folgende: $\xi' b+c-\nu' a=0$. Wenn wir ξ und ξ' so bestimmen, dafs

die beiden Gleichungen identisch werden, was dann geschieht, wenn $\xi' = -\mu$, $\xi = -\nu'$, so erhalten wir die obige Gleichung

$$c - \mu b - \nu' a = 0$$

derjenigen geraden Linie, die zugleich durch M' und N geht.) Nun ist auch:

$$(1.) \quad c + \mu b + \nu' a = 0$$

die Gleichung einer geraden Linie, und diese wird befriedigt, wenn zugleich:

$$\left.\begin{array}{r} 2c = 0 \\ (\nu + \nu')a = 0 \\ (\mu + \mu')b = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{oder blofs } c = 0 \\ \text{- - } a = 0 \\ \text{- - } b = 0 \end{array} \Bigg\} \text{ und } \begin{array}{l} -(c - \mu b - \nu' a) = 0, \\ c + \mu b - \nu a = 0, \\ c - \mu' b + \nu' a = 0, \end{array}$$

d. h. die Durchschnitte von AB und NM', von BC und OM und von AC und $O'M'$ liegen auf der durch (1.) dargestellten Linie.

Beiläufig bemerken wir, dafs wir 60 verschiedene gerade Linien erhalten, die, ähnlich der durch (1.) dargestellten, drei Durchschnitte derjenigen Linien enthalten, welche die sechs Puncte O, O', N', N, M', M paarweise genommen verbinden.

26.

Beantwortung der Aufgabe S. 212. dieses Bandes:

„Kann $\alpha^{\mu-1}-1$, wenn μ eine Primzahl und α eine ganze Zahl und kleiner als μ und gröfser als 1 ist, durch $\mu\mu$ theilbar sein."

(Von Herrn Prof. *C. G. J. Jacobi.*)

Veranlafst durch vorstehende interessante Aufgabe, ersuchte ich einen meiner Freunde hieselbst, Hrn. Busch, die Congruenz

$$x^{\mu-1} = 1$$

in Bezug auf den Modul $\mu\mu$ für die Primzahlen bis 37 nach allen ihren Wurzeln aufzulösen. Das Resultat dieser Arbeit enthält die unten stehende Tabelle. Es ist darin den Wurzeln die Form $a + \mu a'$ gegeben, wo a und a' positive Zahlen sind, die kleiner sind als μ; zu dem a, das in der ersten Verticalreihe steht, giebt sie für $\mu = 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37$, welche Zahlen sich in der obersten Horizontalreihe befinden, das entsprechende a', damit $a + \mu a'$ eine Wurzel sei. So z. B. sind die Wurzeln von $x^{36} = 1$ (Mod. 37^2)

$$1,\ 2+2.37,\ 3+17.37,\ 4+8.37,\ 5+24.37,\ \text{etc. etc.}$$

Ist $a' = 0$, so ist eine in der Aufgabe verlangte Zahl gefunden. Die Tabelle giebt $a' = 0$, für

μ	a
11	3.9.
29	14.
37	18.

Die einfachste Lösung giebt $3^5 = 243 = 2.11^2 + 1$; also auch $3^{10} = 1$, wenn man die Vielfachen von 121 fortläfst.

a	3 a'	5 a'	7 a'	11 a'	13 a'	17 a'	19 a'	23 a'	29 a'	31 a'	37 a'
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	2	1	4	10	6	9	6	11	2	12	2
3		3	4	0	11	13	16	5	16	20	17
4		4	2	7	11	2	5	21	8	17	8
5			2	2	5	9	3	1	2	14	24
6			6	8	1	2	12	20	9	14	3
7				3	11	4	15	15	22	27	25
8				10	7	6	15	17	24	20	24
9				0	1	10	1	7	9	27	28
10				10	1	12	17	11	14	26	21
11					6	14	3	8	21	13	21
12					12	7	3	14	1	7	18
13						14	6	11	22	23	13
14						3	15	15	0	14	27
15						7	13	5	28	18	9
16						16	2	7	6	12	27
17							12	2	27	16	11
18							18	21	7	7	0
19								1	14	23	36
20								17	19	17	25
21								11	4	4	9
22								22	6	3	27
23									19	10	9
24									26	3	23
25									20	16	18
26									12	16	15
27									26	13	15
28									28	10	8
29										18	12
30										30	11
31											33
32											12
33											28
34											19
35											34
36											36

27.

Suite des notices sur les fonctions elliptiques. (V. p. 192.)

(Par Mr. *C. G. J. Jacobi*, prof. en phil. à Königsberg.)

(Extrait d'une lettre de l'auteur au redacteur de ce journal, du 21. Juillet 1828.)

J'ajoute aux formules données dans ma dernière lettre les développemens des fonctions elliptiques de seconde et de troisième espèce.

Soit en adoptant la notation de Mr. Legendre, $\Delta = \sqrt{(1 - k^2 \sin \varphi^2)}$, $E\varphi = \int_0^{\varphi} \Delta \partial \varphi$, $E^1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Delta \partial \varphi$, $F\varphi = \int_0^{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\Delta}$, $F^1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial \varphi}{\Delta}$, de manière que F^1 est ce que je désigne par K: si l'on mêt

$$\varphi = am \frac{2Kx}{\pi}, \quad q = e^{\frac{-K'\pi}{K}},$$

conformément à la notation dont j'ai coutûme de me servir pour ma part, on aura:

1) $F^1E\varphi - E^1F\varphi =$

$$2\pi \frac{9 \sin 2x - 2q^4 \sin 4x + 3q^9 \sin 6x - 4q^{16} \sin 8x + \ldots.}{1 - 2q \cos 2x + 2q^4 \cos 4x - 2q^9 \cos 6x + 2q^{16} \cos 8x - \ldots.} =$$

$$2\pi \left\{ \frac{q \sin 2x}{1 - q^2} + \frac{q^2 \sin 4x}{1 - q^4} + \frac{q^3 \sin 6x}{1 - q^6} + \ldots. \right\}.$$

Mr. Legendre a demontré que l'expression suivante, dépendante des fonctions elliptiques de seconde et de troisième espèce:

2) $$\int_0^{\varphi} \partial \Phi . \frac{2k^2 \sin A \cos A \Delta A \sin \varphi^2}{\Delta \varphi (1 - k^2 \sin A^2 \sin \varphi^2)} - \frac{2F\varphi}{F^1} (F^1EA - E^1FA),$$

reste la même si l'on échange entre eux les angles A et Φ. Si l'on mét $\varphi = am \frac{2Kx}{\pi}$, $A = am \frac{2K\alpha}{\pi}$, je trouve qu'elle est égale a

$$\log \frac{1 - 2q \cos 2(x - \alpha) + 2q^4 \cos 4(x - \alpha) - 2q^9 \cos 6(x - \alpha) + \ldots.}{1 - 2q \cos 2(x + \alpha) + 2q^4 \cos 4(x + \alpha) - 2q^9 \cos 6(x + \alpha) + \ldots.}$$

$$= -2 \left\{ \frac{q \sin 2\alpha \sin 2x}{1 - q^2} + \frac{q^2 \sin 4\alpha \sin 4x}{2(1 - q^4)} + \frac{q^3 \sin 6\alpha \sin 6x}{3(1 - q^6)} + \ldots. \right\},$$

formules symmétriques en α et x, et dont la première embrasse tous les cas des fonctions elliptiques de troisième espèce, pourvû qu'on donne à α des valeurs réelles ou imaginaires quelconques.

On peut remplacer les fonctions elliptiques par la nouvelle transcendante:

$$1 - 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - 2q^9\cos 6x + 2q^{16}\cos 8x - \ldots = \Theta x.$$

Si l'on mêt $-\log q = \frac{\pi K'}{K} = \omega$, $i = \sqrt{-1}$, on aura

$$3)\quad \Theta(x+\pi) = \Theta x,$$

$$4)\quad \Theta(x+i\omega) = \frac{-e^{-2ix}\Theta x}{q},$$

$$5)\quad \Theta\left(\frac{i\omega}{2}\right) = 0,$$

$$6)\quad \Theta\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \Theta(x,-q).$$

Soit

$$-i\sqrt[4]{q}.e^{ix}\Theta\left(x+\frac{i\omega}{2}\right) = i\sqrt[4]{q}.e^{-ix}\Theta\left(x-\frac{i\omega}{2}\right) = Hx,$$

on aura

$$Hx = 2\sin x\sqrt[4]{q} - 2\sin 3x\sqrt[4]{q^9} + 2\sin 5x\sqrt[4]{q^{25}} - 2\sin 7x\sqrt[4]{q^{49}} + \ldots.$$

On aura de plus:

$$7)\quad H(x+\pi) = -Hx,$$

$$8)\quad H\left(x+\frac{i\omega}{2}\right) = \frac{ie^{-ix}\Theta x}{\sqrt[4]{q}},$$

$$9)\quad \Theta\left(x+\frac{i\omega}{2}\right) = \frac{ie^{-ix}Hx}{\sqrt[4]{q}},$$

$$10)\quad Hi\omega = 0,$$

$$11)\quad H(x+i\omega) = \frac{-e^{-2ix}Hx}{q}.$$

Les fonctions elliptiques peuvent être exprimées par les fonctions Θx et Hx qu'on peut réduire à une seule au moyen des formules:

$$12)\quad \sin am\frac{2Kx}{\pi} = \frac{1}{\sqrt{k}}.\frac{Hx}{\Theta x},$$

$$13)\quad \cos am\frac{2Kx}{\pi} = \sqrt{\frac{k'}{k}}.\frac{H\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\Theta x},$$

$$14)\quad \triangle am\frac{2Kx}{\pi} = \sqrt{k'}.\frac{\Theta\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\Theta x}.$$

Les constantes k, k', K se trouvent à l'aide des formules:

$$15)\quad \sqrt{\frac{2K}{\pi}} = \Theta\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + \ldots.$$

$$16)\quad \sqrt{\frac{2k'K}{\pi}} = \Theta 0 = 1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + 2q^{16} - \ldots.$$

$$17)\quad \sqrt{\frac{2kK}{\pi}} = \sqrt[4]{q}.\Theta\left(\frac{\pi}{2}+i\omega\right) = H\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\sqrt[4]{q} + 2\sqrt[4]{q^9} + 2\sqrt[4]{q^{25}} + \ldots.$$

La fonction elliptique de troisième espèce 2. devient simplement:

$$\log\frac{\Theta(x-\alpha)}{\Theta(x+\alpha)}.$$

On tire de l'équation (12.) les deux autres (13., 14.), le théorème d'Euler sur la sommation des fonctions elliptiques, l'équation différentielle

$$\partial \sin am\frac{2Kx}{\pi} = \frac{2K}{\pi}\cos am\frac{2Kx}{\pi}\triangle am\frac{2Kx}{\pi}\partial x,$$

et quantité d'autres formules, à l'aide de l'équation identique:

$$18)\quad H(x,q)\Theta(X,q) - H(X,q)\Theta(x,q) = 2H\left(\frac{x-X}{2}, \sqrt{q}\right)H\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x+X}{2}, \sqrt{q}\right),$$

ou en d'autres termes:

$$19)\quad (\sin x\sqrt[4]{q} - \sin 3x\sqrt[4]{q^9} + \sin 5x\sqrt[4]{q^{25}} - \ldots)(1 - 2q\cos 2X + 2q^4\cos 4X - 2q^9\cos 6X + \ldots)$$
$$-(\sin X\sqrt[4]{q} - \sin 3X\sqrt[4]{q^9} + \sin 5X\sqrt[4]{q^{25}} - \ldots)(1 - 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - 2q^9\cos 6x + \ldots)$$
$$= 2\left(\sin\frac{x-X}{2}\sqrt[8]{q} - \sin\frac{3(x-X)}{2}\sqrt[8]{q^9} + \sin\frac{5(x-X)}{2}\sqrt[8]{q^{25}} - \ldots.\right)\times$$
$$\left(\cos\frac{x+X}{2}\sqrt[8]{q} + \cos\frac{3(x+X)}{2}\sqrt[8]{q^9} + \cos\frac{5(x+X)}{2}\sqrt[8]{q^{25}} + \ldots.\right).$$

équation remarquable et aisément à démontrer au moyen des premiers élémens de la trigonométrie.

Les fonctions $\Theta(x)$ et $H(x)$ peuvent être resolues en facteurs. On trouve

$$\Theta x = C(1 - 2q\cos 2x + q^2)(1 - 2q^3\cos 2x + q^6)(1 - 2q^5\cos 2x + q^{10})\ldots$$
$$Hx =$$
$$2\sqrt[4]{q}.C\sin x(1 - 2q^2\cos 2x + q^4)(1 - 2q^4\cos 2x + q^8)(1 - 2q^6\cos 2x + q^{12})\ldots,$$

C étant une constante. En appliquant seulement à ces formules le théorème de Côtes, on trouve sur le champ la théorie générale de la transformation et de la multiplication des fonctions Θ ou H, et par suite en même temps celle des fonctions elliptiques. En effet on a suivant le théorème de Côtes, n étant un nombre impair quelconque:

$$20)\quad \Theta x\Theta\left(x + \frac{2\pi}{n}\right)\Theta\left(x + \frac{4\pi}{n}\right)\ldots\Theta\left(x + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right) = C'\Theta(nx, q^n),$$

$$21)\quad HxH\left(x + \frac{2\pi}{n}\right)H\left(x + \frac{4\pi}{n}\right)\ldots H\left(x + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right) = C'H(nx, q^n),$$

C' étant une autre constante. Nommons $K^{(n)}$, $k^{(n)}$ les quantités qui dépendent de la même manière de q^n que K, k de q: on tire de la formule

$$\sin am\left(\frac{2Kx}{\pi}, k\right) = \frac{H(x,q)}{\Theta(x,q)\sqrt{k}}$$

cette autre

$$\sin am\left(\frac{2K^{(n)}x}{\pi}, k^{(n)}\right) = \frac{H(x, q^n)}{\sqrt{k^{(n)}}\Theta(x, q^n)}.$$

Cela posé, les équations 20., 21. étant divisées l'une par l'autre, on en tire:

$$\sin am\left(\frac{2nK^{(n)}x}{\pi}, k^{(n)}\right) =$$

$$\sqrt{\frac{k^n}{k^{(n)}}}\sin am\frac{2Kx}{\pi}\sin am\frac{2K}{\pi}\left(x+\frac{2\pi}{n}\right)\sin am\frac{2K}{\pi}\left(x+\frac{4\pi}{n}\right)\ldots\sin am\frac{2K}{\pi}\left(x+\frac{2(n-1)\pi}{n}\right),$$

formule générale pour la transformation des fonctions elliptiques, telle que je l'ai établie le premier. On trouve d'une manière analogue les autres transformations réelles ou imaginaires attachées au nombre n.

Puisque les fonctions elliptiques s'expriment aisément à l'aide de la fonction Θx, on peut essayer réciproquement à exprimer celle-ci par les fonctions elliptiques. On y parvient en intégrant l'équation 1. Cela donne

$$22)\quad \log\frac{\Theta x}{\sqrt{\left(\frac{2k'K}{\pi}\right)}} = \int_0^{\varphi}\partial\varphi.\frac{F^1E\varphi - E^1F\varphi}{F^1\triangle\varphi},$$

φ étant toujours l'amplitude de $\frac{2Kx}{\pi}$. On peut aussi exprimer la fonction $\log\frac{\Theta x}{\sqrt{\left(\frac{2k'K}{\pi}\right)}}$ au moyen d'une intégrale définie. En effet la formule 2. donne

$$23)\quad -\log\frac{\Theta 2A}{\sqrt{\left(\frac{2k'K}{\pi}\right)}} = \int_0^{A}\frac{2k^2\sin A\cos A\triangle A\sin\varphi^2}{\triangle\varphi(1-k^2\sin A^2\sin\varphi^2)} - 2\frac{FA}{F^1}(F^1EA - E^1FA).$$

Passons à d'autres objets. Etant mis, comme ci-dessus,

$$\omega = -\log q = \frac{\pi K'}{K},$$

on a

$$\Theta x = 1 - 2e^{-\omega}\cos 2x + 2e^{-4\omega}\cos 4x - 2e^{-9\omega}\cos 6x + \ldots.$$

$$Hx = 2e^{-\frac{\omega}{4}}\sin x - 2e^{-\frac{9\omega}{4}}\sin 3x + 2e^{-\frac{25\omega}{4}}\sin 5x - 2e^{-\frac{49\omega}{4}}\sin 7x + \ldots.$$

De la on tire

$$24)\quad \frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2} = \frac{4\partial^2\Theta}{\partial\omega};\quad \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \frac{4\partial H}{\partial\omega}.$$

Il existe entre les deux intégrales de l'équation $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{4\partial z}{\partial\omega}$, $z = \Theta$, $z = H$, la relation

$$Hx = +ie^{-\left(ix+\frac{\omega}{4}\right)}\Theta\left(x-\frac{i\omega}{2}\right),$$

ou

$$\Theta x = +ie^{-\left(ix+\frac{\omega}{4}\right)}H\left(x-\frac{i\omega}{2}\right).$$

Généralement $z = \mathfrak{S}(x)$ étant une intégrale de l'équation $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{4\partial z}{\partial \omega}$, une autre sera

$$z = e^{-\left(ix+\frac{\omega}{4}\right)}\mathfrak{S}\left(x-\frac{i\omega}{2}\right),$$

théorème facile à vérifier.

Soit

$$u = \sqrt{\left(\frac{2k'K}{\pi}\right)} = 1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + 2q^{16} - \ldots.$$

$$v = \sqrt{\left(kk'\left(\frac{2K}{\pi}\right)^3\right)} = 2\sqrt[4]{q} - 6\sqrt[4]{q^9} + 10\sqrt[4]{q^{25}} - 14\sqrt[4]{q^{49}} + \ldots.$$

on tire des équations $\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} = \frac{4\partial\Theta}{\partial\omega}$, $\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \frac{4\partial H}{\partial\omega}$ les développemens suivans de Θ et de H, savoir:

25) $$\Theta = u + \frac{(2x)^2\partial u}{2\partial\omega} + \frac{(2x)^4\partial^2 u}{2.3.4\partial\omega^2} + \frac{(2x)^6\partial^3 u}{2.3.4.5.6\partial\omega^3} + \ldots.$$

26) $$2H = 2xv + \frac{(2x)^3\partial v}{2.3\partial\omega} + \frac{(2x)^5\partial^2 v}{2.3.4.5\partial\omega^2} + \frac{(2x)^7\partial^3 v}{2.3.4.5.6.7\partial\omega^3} + \ldots.$$

Cela donne

27) $$\sin am\frac{2Kx}{\pi} = \frac{1}{2\sqrt{k}}\cdot\frac{2xv + \frac{(2x)^3\partial v}{2.3\partial\omega} + \frac{(2x)^5\partial^2 v}{2.3.4.5\partial\omega^2} + \frac{(2x)^7\partial^3 v}{2.3.4.5.6.7\partial\omega^3} + \ldots.}{u + \frac{(2x)^2\partial u}{1.2\partial\omega} + \frac{(2x)^4\partial^2 u}{1.2.3.4\partial\omega^2} + \frac{(2x)^6\partial^3 u}{1.2.3.4.5.6\partial\omega^3} + \ldots.}.$$

On trouve les valeurs de $\frac{\partial^n u}{\partial\omega^n}$, $\frac{\partial^n v}{\partial\omega^n}$ au moyen de la formule

28) $$\frac{\partial\omega}{\partial k} = \frac{-2}{k(1-k^2)\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2},$$

laquelle se déduit aisément des formules connues.

Mr. Poisson, dans ses savans recherches sur les intégrales définies a fait connoître plusieurs propriétés de la fonction Θx. Les méthodes délicates, propres à cet illustre géomètre, trouvent une belle vérification dans la théorie des fonctions elliptiques. Par exemple Mr. Poisson démontre dans le dix-neuvième cahier de l'école polytechnique la formule remarquable:

$$\sqrt{\frac{1}{x}} = \frac{1 + 2e^{-\pi x} + 2e^{-4\pi x} + 2e^{-9\pi x} + 2e^{-16\pi x} + \ldots.}{1 + 2e^{-\frac{\pi}{x}} + 2e^{-\frac{4\pi}{x}} + 2e^{-\frac{9\pi}{x}} + 2e^{-\frac{16\pi}{x}} + \ldots.}.$$

Soit $x = \frac{K'}{K}$, en mettant au lieu du module k son complément $k' = \sqrt{(1-kk)}$, x deviendra $\frac{K}{K'} = \frac{1}{x}$. Or on a

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}} = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + \ldots.$$
$$= 1 + 2e^{-\pi x} + 2e^{-4\pi x} + 2e^{-9\pi x} + 2e^{-16\pi x} + \ldots.,$$

et par suite, en changeant k en k':

$$\sqrt{\frac{2K'}{\pi}} = 1 + 2e^{-\frac{\pi}{x}} + 2e^{-\frac{4\pi}{x}} + 2e^{-\frac{9\pi}{x}} + 2e^{-\frac{16\pi}{x}} + \ldots..$$

De la on tire sur le champ la formule de Mr. Poisson.

Nous ferons encore quelques remarques sur la théorie de la transformation. Le module $\varkappa$ étant changé e λ par une transformation attachée au nombre n, on aura une équation algébrique entre $\varkappa$ et λ dont le dégré, relatif à l'une ou l'autre des deux variables, est égal à la somme des facteurs du nombre n. On trouve toutes les valeurs de $\sqrt{\lambda}$ en mettant dans l'équation

$$\sqrt{k} = \frac{2\sqrt[4]{q} + 2\sqrt[4]{q^9} + 2\sqrt[4]{q^{25}} + \ldots.}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^{16} + \ldots.},$$

$q^{\frac{a'}{a}}$ au lieu de q, aa' étant égal au nombre n. Soit

$$\frac{\partial y}{\sqrt{[(1-y^2)(1-\lambda^2 y^2)]}} = \frac{M\partial x}{\sqrt{[(1-x^2)(1-k^2x^2)]}}$$

l'équation différentielle à laquelle on satisfait par une expression rationelle de y en x, dans laquelle x monte jusqu'à la $n^{\text{ième}}$ puissance: on pourra exprimer M rationnellement en $\varkappa$ et λ au moyen de la formule générale

$$MM = \frac{n(k-k^3)\partial\lambda}{(\lambda-\lambda^3)\partial\varkappa}.$$

Eliminant λ au moyen de l'équation modulaire, on aura une équation du même dégré entre k et M. Ces équations entre k et M jouissent d'une propriété remarquable. Savoir, n étant un nombre premier quelconque, on peut exprimer linéairement la moitié des valeurs de $\sqrt{M}$ au moyen de l'autre moitié. En effet si l'on designe par $M, M', M'', M''', \ldots, M^{(n+1)}$ les racines de l'équation du $(n+1)^{\text{ième}}$ degré trouvée entre M et k: on aura

$$\sqrt{M} = \sqrt{\left((-1)^{\frac{n-1}{2}} n\right)} A,$$
$$\sqrt{M'} = A + A' + A'' + A''' + \ldots. + A^{\left(\frac{n-1}{2}\right)},$$
$$\sqrt{M''} = A + \alpha A' + \alpha^4 A'' + \alpha^9 A''' + \ldots. + \alpha^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2} A^{\left(\frac{n-1}{2}\right)},$$
$$\sqrt{M'''} = A + \beta A' + \beta^4 A'' + \beta^9 A''' + \ldots. + \beta^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2} A^{\left(\frac{n-1}{2}\right)},$$
$$\ldots\ldots, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

α, β, etc. étant les racines imaginaires de l'équation $x^n = 1$. Donc on peut exprimer linéairement les racines quarrées des $n+1$ racines par d'autres quantités dont le nombre n'est que $\frac{n+1}{2}$. Cela donne le théorème énoncé, un des plus importants dans la théorie algébrique de la transformation et de la division des fonctions elliptiques. On aura le même théorème par rapport aux équations qui donnent λM, $\lambda' M$, etc. en k. Une équation semblable pour $n = 5$, $x = \lambda M$ est

$$x^6 - 10kx^5 + 35k^2x^4 - 60k^3x^3 + 55k^4x^2 - x\{26k^5 + 256(k - k^3)\} + 5k^6 = 0.$$

Si l'on fait $x = y + k$, cette équation se change en cette autre plus simple:

$$y^6 - 4ky^5 - 256(k - k^3)(1 + ky) = 0.$$

On pourra satisfaire par l'analyse des fonctions elliptiques à une demande d'Euler à l'égard du théorème de Fermat, que tout nombre entier est la somme de quatre nombres quarrés: savoir de demontrer que la quatrième puissance d'une série

$$A + A'q + A''q^4 + A'''q^9 + A^{\text{IV}}q^{16} + \ldots.$$

puisse contenir toutes les puissances de q. En effet je trouve

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^4 = \{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + \ldots.\} =$$

$$1 + \frac{8q}{1-q} + \frac{16q^2}{1+q^2} + \frac{24q^3}{1-q^3} + \frac{32q^4}{1+q^4} + \ldots. =$$

$$1 + \frac{8q}{(1-q)^2} + \frac{8q^2}{(1+q^2)^2} + \frac{8q^3}{(1-q^3)^2} + \frac{8q^4}{(1+q^4)^2} + \ldots. =$$

$$1 + 8\Sigma\varphi(p)\{q^p + 3q^{2p} + 3q^{4p} + 3q^{8p} + 3q^{16p} + 3q^{32p} + \ldots.\},$$

p étant un nombre impair quelconque et $\varphi(p)$ la somme des facteurs du nombre p; formule dont le théorème de Fermat est un corollaire. On tire encore de cette formule et d'autres semblables des théorèmes sur le nombre de toutes les décompositions possibles d'un nombre donné en quatre nombres quarrés. Un théorème semblable a été proposé dans le deuxième cahier *p.* 191. En examinant avec attention l'algorithme de l'analyse qui conduit à ces résultats remarquables, on parviendra à établir des nouvelles méthodes dans la théorie des nombres.

Les fonctions elliptiques différent essentiellement des transcendantes ordinaires. Elles ont une manière d'être pour ainsi dire absolue. Leur caractère principal est d'embrasser tout ce qu'il y a de périodique dans l'analyse. En effet les fonctions trigonométriques ayant une période réelle,

les exponentielles une période imaginaire, les fonctions elliptiques embrassent les deux cas, puisqu'on a en même temps

$$\sin am(u+4K) = \sin am(u)$$
$$\sin am(u+2iK') = \sin am(u),$$

i étant $=\sqrt{-1}$. D'ailleurs on démontre aisément qu'une fonction analytique ne saura avoir plus que deux périodes, l'une réelle et l'autre imaginaire ou l'une et l'autre imaginaires. Ce dernier cas répond à un module k imaginaire. Le quotient $\frac{K'}{K}$ des deux périodes d'une fonction proposée détermine le module k des fonctions elliptiques par lesquelles elle doit être exprimée au moyen des formules 15., 17. Il conviendra peut être à introduire dans l'analyse des fonctions elliptiques ce quotient $\frac{K'}{K}$ comme module au lieu de k. A l'égard de ce quotient j'ai trouvé

„que k ne change pas de valeur, si l'on écrit au lieu de $\frac{K'}{K}$ l'expression

$$\frac{bK+ib'K'}{aK+ia'K'} = \frac{KK'-i(abKK+a'b'K'K')}{aaKK+a'a'K'K'},$$

„a, a', b, b' étant des nombres entiers quelconques, a un nombre „impair, b un nombre pair, tels que $ab'-a'b=1$;"

théorème remarquable et qui doit être envisagé comme un des théorèmes fondamentaux de l'analyse des fonctions elliptiques.

Les méthodes qui m'ont conduit à la théorie générale de la transformation des fonctions elliptiques s'appliquent également à une classe très étendue d'intégrales doubles, triples, et même d'intégrales multiples d'un ordre quelconque. Un premier essai sur cette matière épineuse à été donné dans un petit mémoire qui a pour titre:

„De singulari quadam duplicis integralis transformatione"

inseré au second volume de votre journal.

Vous voyez, Monsieur, que la théorie des fonctions elliptiques est un vaste objet de recherches qui dans le cours de ses développemens embrassent presque toute l'algèbre, la théorie des intègrales définies et la science des nombres. Quel titre de gloire pour l'illustre auteur du traité des fonctions elliptiques, que d'avoir créé cette belle théorie et d'avoir allumé ce flambeau à la posterité.

28.

Demonstratio duarum celeberrimi Gaussii propositionum.

(Disqu. arithm. p. 17.)

(Auct. *Th. Clausen.*)

Denotent (α), (α,β), (α,β,γ), etc. quantitates, quae ita a se invicem pendent:

$$(\alpha) = \alpha,$$
$$(\alpha,\beta) = \beta(\alpha) + 1,$$
$$(\alpha,\beta,\gamma) = \gamma(\alpha,\beta) + (\alpha),$$
$$(\alpha,\beta,\gamma,\delta) = \delta(\alpha,\beta,\gamma) + (\alpha,\beta), \text{ etc.}$$

ubi lex progressionis obvia est. Nunc dico, si fuerit:

(1.) $(\alpha,\beta\ldots.\lambda,\mu)(\beta,\gamma\ldots.\varkappa,\lambda) - (\alpha,\beta\ldots.\varkappa,\lambda)(\beta,\gamma\ldots.\lambda,\mu) = \pm 1,$

fore etiam

$$(\alpha,\beta\ldots.\mu,\nu)(\beta,\gamma\ldots.\lambda,\mu) - (\alpha,\beta\ldots.\lambda,\mu)(\beta,\gamma\ldots.\mu,\nu) = \mp 1;$$

in qua serie numerus quantitatum $\alpha,\beta\ldots.$ unitate auctus est. Habemus enim:

$$(\alpha,\beta\ldots.\mu,\nu) = \nu(\alpha,\beta\ldots.\lambda,\mu) + (\alpha,\beta\ldots.\varkappa,\lambda),$$
$$(\beta,\gamma\ldots.\mu,\nu) = \nu(\beta,\gamma\ldots.\lambda,\mu) + (\beta,\gamma\ldots.\iota,\varkappa),$$

quibus valoribus in aequationem posteriorem substitutis, aequatio (1.) statim sequitur. Nunc vero, cum sit:

$$(\alpha,\beta,\gamma)\beta - (\alpha,\beta)(\beta,\gamma) = (\alpha\beta\gamma+\alpha+\gamma)\beta - (\alpha\beta+1)(\beta\gamma+1) = -1;$$

vel cum aequatio (1.) valeat pro numero quantitatum $\alpha, \beta \ldots. 3$; sequitur illam etiam pro numero 4, omnibusque ulterioribus valere, sumto signo superiore, quando ille est par, inferiore vero quando est impar.

Cum sit: $(\alpha,\beta\ldots.\varkappa,\lambda) = \lambda(\alpha,\beta\ldots.\iota,\varkappa) + (\alpha,\beta\ldots.\theta,\iota),$

$$(\tau,\sigma\ldots.\mu,\lambda) = \lambda(\tau,\sigma\ldots.\nu,\mu) + (\tau,\sigma\ldots.\xi,\nu),$$

erit: $(\tau,\sigma\ldots.\nu,\mu)(\alpha,\beta\ldots.\varkappa,\lambda) + (\tau,\sigma\ldots.\xi,\nu)(\alpha,\beta\ldots.\iota,\varkappa)$

$$= (\tau,\sigma\ldots.\mu,\lambda)(\alpha,\beta\ldots.\iota,\varkappa) + (\tau,\sigma\ldots.\nu,\mu)(\alpha,\beta\ldots.\theta,\iota);$$

si enim aequatio prior in partem aequationis primam, posterior in secundam substituantur, aequatio fit identica. Eodem modo habetur: pars posterior aequationis

$$= (\tau,\sigma\ldots.\lambda,\varkappa)(\alpha,\beta\ldots.\theta,\iota) + (\tau,\sigma\ldots.\mu,\lambda)(\alpha,\beta\ldots.\eta,\theta);$$

unde concludere licet:

$(\tau,\sigma)(\alpha,\beta\ldots.\pi,\varrho) + (\tau)(\alpha,\beta\ldots.o,\pi) = (\tau,\sigma\ldots.\delta,\gamma)(\alpha,\beta) + (\tau,\sigma\ldots.\varepsilon,\delta)(\alpha)$, vel

$\tau\sigma(\alpha,\beta\ldots.\pi,\varrho) + \tau(\alpha,\beta\ldots.o,\pi) + \alpha,\beta\ldots.\pi,\varrho) = (\alpha\beta(\tau,\sigma\ldots.\delta,\gamma) + \alpha(\tau,\sigma\ldots.\varepsilon,\delta) + (\tau,\sigma\ldots.\delta,\gamma);$

$\tau(\alpha,\beta\ldots.\varrho,\sigma) + (\alpha,\beta\ldots.\pi,\varrho) = \alpha(\tau,\sigma\ldots.\gamma,\beta) + (\tau,\sigma\ldots.\delta,\gamma)$; vel denique

$$(2.)\quad (\alpha,\beta\ldots.\sigma,\tau) = (\tau,\sigma\ldots.\beta,\alpha).$$

29.

Lehrsatz. (Zu beweisen.)

(Von Herrn Dr. *Hellerung* zu Wismar.)

Ein Kegelschnitt und eine Gerade liegen in Einer Ebene. In der Geraden nehme man eine ungerade Anzahl von Puncten, und bezeichne sie in willkührlicher Ordnung durch 1, 2, 3 . . . $2m+1$. Sieht man nun diese Puncte als Durchschnittspuncte der gegenüber liegenden Seiten einer in den Kegelschnitt, übrigens wilkührlich zu beschreibenden Figur an; so werden die $4m+2$ Seiten derselben sich zwar meistens kreuzen, aber die Figur wird stets eine geschlossene sein.

Nemlich durch den Punct 1 zieht man wilkührlich eine erste Gerade, welche den Kegelschnitt zweimal schneidet; durch einen dieser Durchschnitte und den Punct 2 zieht man die zweite Gerade; durch den noch freien Durchschnitt dieser zweiten und den Punct 3 die dritte; u. s. w. durch den noch freien Durchschnitt der $2m$ten Geraden und den Punct $2m+1$ die $2m+1$te Gerade. Alsdann durch den freien Durchschnitt dieser Geraden und den Punct 1 die $2m+2$te Gerade u. s. w. in derselben Ordnung der Puncte. Wenn man nun zulezt durch den noch freien Durchschnitt der $4m+1$ten Geraden und den Punct $2m+1$ die $4m+2$te Gerade zieht; so mufs diese allemal durch den noch freien Durchschnitt der ersten Geraden gehn, und so die Figur schliefsen.

Mehrere Lehrsätze und Aufgaben bleiben diesesmal wegen Mangel an Raum zurück.

30.

Remarques sur quelques propriétés générales d'une certaine sorte de fonctions transcendantes.

(Par Mr. *N. H. Abel* de Christiania.)

1.

Si ψx désigne la fonction elliptique la plus générale, c'est-à-dire si

$$\psi x = \int \frac{r \cdot \partial x}{\sqrt{R}},$$

où r est une fonction rationnelle quelconque de x, et R une fonction entière de la même variable, qui ne passe pas le quatrième degré, cette fonction a comme on sait la propriété très remarquable, que la somme d'un nombre quelconque de ces fonctions peut être exprimée par une seule fonction de la même forme, en y ajoutant une certaine expression algébrique et logarithmique.

Il semble que dans la théorie des fonctions transcendantes les géometres se sont bornés aux fonctions de cette forme. Cependant il existe encore pour une classe très étendue d'autres fonctions une propriété analogue à celle des fonctions elliptiques.

Je veux parler des fonctions qui peuvent être regardées comme intégrales de différentielles algébriques quelconques. Si l'on ne peut pas exprimer la somme d'un nombre quelconque de fonctions données, par une seule fonction de la même espèce, comme dans le cas des fonctions elliptiques, au moins on pourra exprimer dans tous les cas une pareille somme par la somme d'un nombre déterminé d'autres fonctions de la même nature que les premières, en y ajoutant une certaine expression algébrique et logarithmique *). Nous démontrerons cette propriété dans l'un des cahiers suivans de ce journal. Pour le moment je vais considérer un cas particulier, qui embrasse en même tems les fonctions elliptiques, savoir les fonctions contenues dans la formule

$$1. \quad \psi x = \int \frac{r \cdot \partial x}{\sqrt{R}},$$

*) J'ai presenté un mémoire sur ces fonctions à l'académie royale des sciences de Paris vers la fin de l'année 1826. Note de l'auteur.

R étant une fonction rationnelle et entière quelconque, et r une fonction rationnelle.

2.

Nous allons d'abord établir le théorème suivant:

Théorème I. Soit φx une fonction entière de x, décomposée d'une manière quelconque en deux facteurs entiers $\varphi_1 x$ et $\varphi_2 x$, ensorte que $\varphi x = \varphi_1 x . \varphi_2 x$. Soit fx une autre fonction entière quelconque et

$$2. \quad \psi x = \int \frac{fx\,\partial x}{(x-\alpha)\sqrt{(\varphi x)}},$$

où α est une quantité constante quelconque. Désignons par $a_0, a_1, a_2, \ldots .; c_0, c_1, c_2, \ldots .$ des quantités quelconques dont l'une au moins soit variable. Celà posé, si l'on fait

$$3. \quad \begin{cases} (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots . + a_n x^n)^2 . \varphi_1 x - (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots . + c_m x^m)^2 . \varphi_2 x \\ = A . (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \ldots . (x - x_\mu), \end{cases}$$

où A ne dépend pas de x, je dis qu'on aura

$$4. \quad \varepsilon_1 \psi x_1 + \varepsilon_2 \psi x_2 + \varepsilon_3 \psi x_3 + \ldots . + \varepsilon_\mu \psi x_\mu$$
$$= \frac{fa}{\sqrt{\varphi a}} . \log \left\{ \frac{(a_0 + a_1 \alpha + \ldots . + a_n \alpha^n)\sqrt{(\varphi_1 \alpha)} + (c_0 + c_1 \alpha + \ldots . + c_m \alpha^m)\sqrt{(\varphi_2 \alpha)}}{(a_0 + a_1 \alpha + \ldots . + a_n \alpha^n)\sqrt{(\varphi_1 \alpha)} - (c_0 + c_1 \alpha + \ldots . + c_m \alpha^m)\sqrt{(\varphi_2 \alpha)}} \right\} + r + C,$$

où C est une quantité constante et r le coëfficient de $\frac{1}{x}$ dans le développement de la fonction

$$\frac{fx}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi x}} . \log \left\{ \frac{(a_0 + a_1 x + \ldots . + a_n x^n)\sqrt{(\varphi_1 x)} + (c_0 + c_1 x + \ldots . + c_m x^m)\sqrt{(\varphi_2 x)}}{(a_0 + a_1 x + \ldots . + a_n x^n)\sqrt{(\varphi_1 x)} - (c_0 + c_1 x + \ldots . + c_m x^m)\sqrt{(\varphi_2 x)}} \right\},$$

suivant les puissances descendantes de x. Les quantités ε_1, $\varepsilon_2, \ldots . \varepsilon_\mu$ sont égales à $+1$ ou à -1, et leurs valeurs dépendent de celles des quantités $x_1, x_2 \ldots . x_\mu$.

Désignons le premier membre de l'équation (3.) par Fx et faisons pour abréger:

$$5. \quad \begin{cases} \theta x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots . + a_n x^n, \\ \theta_1 x = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots . + c_m x^m, \end{cases}$$

nous aurons

$$6. \quad Fx = (\theta x)^2 . \varphi_1 x - (\theta_1 x)^2 . \varphi_2 x.$$

Celà posé, soit x une quelconque des quantités $x_1, x_2, \ldots . x_\mu$, on aura l'équation

$$7. \quad Fx = 0.$$

De là, en différentiant, on tire

$$8. \quad F'x . \partial x + \delta Fx = 0,$$

en désignant par $F'x$ la dérivée de Fx par rapport à x, et par δFx la différentielle de la même fonction par rapport aux quantités a_0, a_1, a_2, ...; c_0, c_1, c_2, ... Or en remarquant que $\varphi_1 x$ et $\varphi_2 x$ sont indépendants de ces dernières variables, l'équation donnera:

$$9.\quad \delta Fx = 2\theta x.\varphi_1 x.\delta\theta x - 2\theta_1 x.\varphi_2 x.\delta\theta_1 x,$$

donc en vertu de (8.)

$$10.\quad F'x.\partial x = 2\theta_1 x.\varphi_2 x.\delta\theta_1 x - 2\theta x.\varphi_1 x.\delta\theta x.$$

Maintenant ayant $Fx = 0 = (\theta x)^2.\varphi_1 x - (\theta_1 x)^2.\varphi_2 x$, on en tire:

$$11.\quad \theta x.\sqrt{\varphi_1 x} = \varepsilon\theta_1 x.\sqrt{\varphi_2 x},$$

où $\varepsilon = \pm 1$. De là vient

$$\theta x.\varphi_1 x = \varepsilon\theta_1 x.\sqrt{(\varphi_1 x.\varphi x)} = \varepsilon\theta_1 x.\sqrt{(\varphi x)},$$
$$\theta_1 x.\varphi_2 x = \varepsilon\theta x.\sqrt{(\varphi_2 x.\varphi_1 x)} = \varepsilon\theta x.\sqrt{(\varphi x)},$$

donc l'expression de $F'x.\partial x$ pourra être mise sous la forme

$$12.\quad F'x.\partial x = 2\varepsilon.\{\theta x.\delta\theta_1 x - \theta_1 x.\delta\theta x\}.\sqrt{(\varphi x)}.$$

Céla donne, en multipliant par $\varepsilon.\frac{fx}{\sqrt{(\varphi x)}}.\frac{1}{F'x}.\frac{1}{x-\alpha}$:

$$13.\quad \varepsilon.\frac{fx.\partial x}{(x-\alpha)\sqrt{(\varphi x)}} = \frac{fx.(2\theta x.\delta\theta_1 x - 2\theta_1 x.\delta\theta x)}{(x-\alpha)F'x}.$$

En faisant pour abréger

$$14'.\quad \lambda(x) = 2fx(\theta x.\delta\theta_1 x - \theta_1 x.\delta\theta x),$$

il viendra:

$$14.\quad \varepsilon.\frac{fy.\partial x}{(x-\alpha)\sqrt{(\varphi x)}} = \frac{\lambda x}{(x-\alpha).F'x},$$

où λx sera une fonction entière par rapport à x.

Désignons par $\Sigma\Gamma x$ la quantité

$$\Gamma x_1 + \Gamma x_2 + \Gamma x_3 + \ldots + \Gamma x_\mu,$$

et remarquons que l'èquation (14.) subsiste encore en mettant l'une quelconque des quantités x_1, x_2, ... x_μ au lieu de x, cette équation donnera

$$15.\quad \Sigma\varepsilon.\frac{fx.\partial x}{(x-\alpha)\sqrt{(\varphi x)}} = \Sigma\frac{\lambda x}{(x-\alpha)F'x} = \delta v.$$

Cela posé, on pourra chasser sans difficulté les quantités x_1, x_2, ... x_μ du second membre.

En effet, quelle que soit la fonction entière λx, on peut supposer

$$\lambda x = (x-\alpha).\lambda_1 x + \lambda\alpha,$$

où $\lambda_1 x$ est une fonction entière de x, savoir $\frac{\lambda x - \lambda\alpha}{x-\alpha}$. En substituant cette valeur dans (15.), il viendra

$$16'.\quad \delta v = \Sigma\frac{\lambda_1 x}{F'x} + \lambda\alpha.\Sigma\frac{1}{(x-\alpha)F'x}.$$

Maintenant d'après une formule connue on aura

$$17.\quad \Sigma\frac{1}{(x-\alpha)F'x} = -\frac{1}{F\alpha},$$

ayant égard que

$$F\alpha = A(\alpha-x_1)(\alpha-x_2)\ldots.(\alpha-x_\mu),$$

donc

$$18.\quad \delta\upsilon = -\frac{\lambda\alpha}{F\alpha} + \Sigma\frac{\lambda_1 x}{F'x}.$$

Il reste à trouver $\Sigma\frac{\lambda_1 x}{F'x}$. Or cela peut se faire à l'aide de la formule (17.). En effet en développant $\frac{1}{\alpha-x}$ selon les puissances descendantes de α, il viendra

$$19.\quad \frac{1}{F\alpha} = \frac{1}{\alpha}.\Sigma\frac{1}{F'x} + \frac{1}{\alpha^2}.\Sigma\frac{1}{F'x} + \ldots. + \frac{1}{\alpha^{k+1}}.\Sigma\frac{x^k}{F'x} + \ldots.$$

d'où l'on voit que $\Sigma\frac{x^k}{F'x}$ est égal au coëfficient de $\frac{1}{\alpha^{k+1}}$ dans le développement de $\frac{1}{F\alpha}$, ou bien à celui de $\frac{1}{\alpha}$ dans le développement de $\frac{\alpha^k}{F\alpha}$. De là on voit aisément que $\Sigma\frac{\lambda_1 x}{F'x}$, où $\lambda_1 x$ est une fonction quelconque entière de x, sera égal au coëfficient de $\frac{1}{x}$ dans le développement de la fonction $\frac{\lambda_1 x}{Fx}$ selon les puissances ascendantes de $\frac{1}{x}$. Si pour abréger on désigne ce coëfficient compris dans une fonction quelconque r développable de cette manière par Πr, on aura:

$$20.\quad \Sigma\frac{\lambda_1 x}{F'x} = \Pi\frac{\lambda_1 x}{Fx}.$$

Or la formule (16.), en divisant par $Fx.(x-\alpha)$, donne

$$21.\quad \Pi.\frac{\lambda x}{(x-\alpha)Fx} = \Pi\frac{\lambda_1 x}{Fx},$$

en remarquant que $\Pi\frac{\lambda\alpha}{(x-\alpha)Fx}$ est toujours égal à zéro. Donc l'éxpression (16.) de $\delta\upsilon$ deviendra

$$22.\quad \delta\upsilon = -\frac{\lambda\alpha}{F\alpha} + \Pi\frac{\lambda x}{(x-\alpha)Fx}.$$

Maintenant on a (14′.)

$$\lambda x = 2fx.\{\theta x.\delta\theta_1 x - \theta_1 x.\delta\theta x\},$$

donc en mettant λ au lieu de x,

$$\lambda\alpha = 2f\alpha\{\theta\alpha.\delta\theta_1\alpha - \theta_1\alpha.\delta\theta\alpha\}.$$

En vertu de cette expression et en substituant pour Fx sa valeur $(\theta\alpha)^2.\varphi_1\alpha - (\theta_1\alpha)^2.\varphi_2\alpha$, on obtiendra

$$\partial v = -\frac{2f\alpha.(\theta\alpha.\delta\theta_1\alpha-\theta_1\alpha.\delta\theta\alpha)}{(\theta\alpha)^2.\varphi_1\alpha-(\theta_1\alpha)^2.\varphi_2\alpha}+\Pi\frac{2fx}{x-\alpha}.\frac{\theta x.\delta\theta_1 x-\theta_1 x.\delta\theta x}{(\theta x)^2.\varphi_1 x-(\theta_1\alpha)^2.\varphi_2 x}.$$

On trouvera aisément l'intégrale de cette expression; car en remarquant que $f\alpha$, $\varphi_1\alpha$, $\varphi_2\alpha$, fx, $x-\alpha$, $\varphi_1 x$, $\varphi_2 x$ sont des quantités constantes, on aura en vertu de la formule

$$\int\frac{p\partial q-q\partial p}{p^2m-q^2n}=\frac{1}{2\sqrt{(m.n)}}\log.\frac{(p\sqrt{m}+q\sqrt{n})}{(p\sqrt{m}-q\sqrt{n})}:$$

$$23.\quad v=C-\frac{f\alpha}{\sqrt{(\varphi\alpha)}}.\log\frac{(\theta\alpha.\sqrt{(\varphi_1\alpha)}+\theta_1\alpha.\sqrt{(\varphi_2\alpha)})}{(\theta\alpha.\sqrt{(\varphi_1\alpha)}-\theta_1\alpha.\sqrt{(\varphi_2\alpha)})}$$
$$+\Pi\frac{fx}{(x-\alpha)\sqrt{(\varphi x)}}.\log\frac{(\theta x.\sqrt{(\varphi_1 x)}+\theta_1 x.\sqrt{(\varphi_2 x)})}{(\theta x.\sqrt{(\varphi_1 x)}-\theta_1 x.\sqrt{(\varphi_2 x)})}.$$

Or l'équation (15.) donne

$$\Sigma\varepsilon\int\frac{fx.\partial x}{(x-\alpha)\sqrt{(\varphi x)}}=v,$$

donc en faisant

$$24.\quad \psi(x)=\int\frac{fx.\partial x}{(x-\alpha)\sqrt{(\varphi x)}}$$

et désignant par ε_1, ε_2, ... ε_μ des quantités de la forme ± 1, on aura la formule

$$25.\quad\begin{cases}\varepsilon_1\psi x_1+\varepsilon_2\psi x_2+\varepsilon_3\psi x_3+....+\varepsilon_\mu\psi x_\mu=\\ C-\frac{f\alpha}{\sqrt{\varphi\alpha}}\log\frac{(\theta\alpha.\sqrt{(\varphi_1\alpha)}+\theta_1\alpha.\sqrt{(\varphi_2\alpha)})}{(\theta\alpha.\sqrt{(\varphi_1\alpha)}-\theta_1\alpha.\sqrt{(\varphi_2\alpha)})}\\ +\Pi\frac{fx}{(x-\alpha)\sqrt{(x\varphi)}}\log\frac{(\theta x.\sqrt{(\varphi_1 x)}+\theta_1 x.\sqrt{(\varphi_2 x)})}{(\theta x.\sqrt{(\varphi_1 x)}-\theta_1 x.\sqrt{(\varphi_2 x)})},\end{cases}$$

qui s'accorde parfaitement avec la formule (4.).

Les valeurs de ε_1, ε_2, ... ε_μ ne sont pas arbitraires, elles dépendent de la grandeur de x_1, x_2, ... x_μ et celle-ci est déterminée par l'équation

$$\theta x.\sqrt{(\varphi_1 x)}=\varepsilon\theta_1 x\sqrt{(\varphi_2 x)},$$

équivalente aux équations

$$26.\quad \theta x_1.\sqrt{(\varphi_1 x_1)}=\varepsilon_1.\theta_1 x_1.\sqrt{(\varphi_2 x_1)};\ \theta x_2.\sqrt{(\varphi_1 x_2)}=\varepsilon_2\theta_1 x_2\sqrt{(\varphi_2 x_2)};\ ....$$
$$\theta x_\mu.\sqrt{(\varphi_1 x_\mu)}=\varepsilon_\mu\theta_1 x_\mu\sqrt{(\varphi_2 x_\mu)}.$$

D'ailleurs les quantités ε_1, ε_2, ... ε_μ conserveront les mêmes valeurs pour toutes les valeurs de x_1, x_2, ... x_μ, comprises dans certaines limites. Il en sera de même de la constante C.

3.

La démonstration précédente suppose toutes les quantités x_1, x^2, ... x_μ, différentes entre-elles, car dans le cas contraire $F'x$ seroit égal à zéro pour un certain nombre de valeurs de x, et alors le second mem-

bre de la formule (14.) sé présenteroit sous la forme $\frac{0}{0}$. Néanmoins il est évident, que la formule (25.) subsistera encors dans le cas même, ou plusieurs des quantités $x_1, x_2, \ldots x_\mu$ sont égales entre-elles.

En faisant $x_2 = x_1$, on aura (26.)

$$\theta x_1 . \sqrt{(\varphi_1 x_1)} = \varepsilon_1 \theta_1 x_1 \sqrt{(\varphi_2 x_1)} = \varepsilon_2 \theta_1 x_1 \sqrt{(\varphi_2 x_1)},$$

et cela donne, en supposant que $\theta_1 x \varphi_2 x$ et $\theta x . \varphi_1 x$ n'aient pas de diviseur commun:

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 .$$

En vertu de cette remarque on aura le théorème suivant:

Théorème II. Si l'on fait

27. $$(\theta x)^2 . \varphi_1 x - (\theta_1 x)^2 . \varphi_2 x = A . (x - x_1)^{m_1} (x - x_2)^{m_2} \ldots . (x - x_\mu)^{m_\mu},$$

où les fonctions entières $\theta x . \varphi_1 x$ et $\theta_1 x . \varphi_2 x$ n'ont pas de diviseur commun, on aura:

28. $$\begin{cases} \varepsilon_1 m_1 \psi x_1 + \varepsilon_2 m_2 \psi x_2 + \varepsilon_3 m_3 \psi x_3 + \ldots . + \varepsilon_\mu m_\mu \psi (x_\mu = \\ C - \dfrac{f\alpha}{\sqrt{(\varphi \alpha)}} \log \left\{ \dfrac{\theta \alpha . \sqrt{(\varphi_1 \alpha)} + \theta_1 \alpha . \sqrt{(\varphi_2 \alpha)}}{\theta \alpha . \sqrt{(\varphi_1 \alpha)} - \theta_1 \alpha . \sqrt{(\varphi_2 \alpha)}} \right\} \\ + \Pi \dfrac{fx}{(x - \alpha)\sqrt{(\varphi x)}} \log \left\{ \dfrac{\theta x . \sqrt{(\varphi_1 x)} + \theta_1 x . \sqrt{(\varphi_2 x)}}{\theta x . \sqrt{(\varphi_1 x)} - \theta_1 x . \sqrt{(\varphi_2 x)}} \right\}. \end{cases}$$

4.

Si l'on suppose fx divisible par $x - \alpha$, on aura $f\alpha = 0$, donc en mettant $fx . (x - \alpha)$ au lieu de fx, il viendra:

Théorème III. Les choses étant supposées les mêmes que dans le 2. Théorème, si l'on fait

$$\psi x = \int \frac{fx . \partial x}{\sqrt{(\varphi x)}},$$

où fx est une fonction entière quelconque, on aura

29. $$\varepsilon_1 m_1 \psi x_1 + \varepsilon_2 m_2 \psi x_2 \ldots . + \varepsilon_\mu m_\mu \psi x_\mu$$
$$= C + \Pi \frac{fx}{\sqrt{(\varphi x)}} \log . \left\{ \frac{\theta x . \sqrt{(\varphi_1 x)} + \theta_1 x \sqrt{(\varphi_2 x)}}{\theta x . \sqrt{(\varphi_1 x)} - \theta_1 x \sqrt{(\varphi_2 x)}} \right\}.$$

5.

Si dans la formule ci-dessus on suppose le degré de la fonction entière $f(x)$ moindre que la moitié de celui de φx, il est clair que la partie du second membre affecté du signe Π, s'évanouira. Donc on aura ce theorème:

Théorème IV. Si le degré de la fonction entière $(fx)^2$ est moindre que celui de φx, et qu'on fait

$$\psi x = \int \frac{fx \cdot \partial x}{(x-\alpha)\sqrt{(\varphi x)}};$$

on aura

$$30.\quad \varepsilon_1 m_1 \psi x_1 + \varepsilon_2 m_2 \psi x_2 + \ldots + \varepsilon_\mu m_\mu \psi x_\mu = C - \frac{f\alpha}{\sqrt{(\varphi\alpha)}} \cdot \log \left\{ \frac{\theta\alpha \cdot \sqrt{(\varphi_1 \alpha)} + \theta_1 \alpha \cdot \sqrt{(\varphi_2 \alpha)}}{\theta\alpha \cdot \sqrt{(\varphi_1 \alpha)} - \theta_1 \alpha \cdot \sqrt{(\varphi_2 \alpha)}} \right\}.$$

6.

En faisant $f\alpha = 1$ dans le théorème précédent et différentiant $k-1$ fois de suite, on aura le théorème suivant

Théorème V. Si l'on fait

$$\psi x = \int \frac{\partial x}{(x-\alpha)^k \sqrt{(\varphi x)}},$$

on aura

$$\varepsilon_1 m_1 \psi x_1 + \varepsilon_2 m_2 \psi x_2 + \ldots + \varepsilon_\mu m_\mu \psi x_\mu = C - \frac{1}{1.2\ldots(k-1)} \cdot \frac{\partial^{k-1}}{\partial \alpha^{k-1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\varphi\alpha)}} \cdot \log \left\{ \frac{\theta\alpha \cdot \sqrt{(\varphi_1 \alpha)} + \theta_1 \alpha \cdot \sqrt{(\varphi_2 \alpha)}}{\theta\alpha \cdot \sqrt{(\varphi_1 \alpha)} - \theta_1 \alpha \cdot \sqrt{(\varphi_2 \alpha)}} \right\}.$$

7.

Si dans le théorème III. on suppose le degré de $(fx)^2$ moindre que celui de φx, le second membre se réduit à une constante. Cela donne aisément le théorème qui suit:

Théorème VI. Si l'on désigne par ψx la fonction

$$\int \frac{(\delta_0 + \delta_1 x + \delta_2 x^2 + \ldots + \delta_{\nu'} \cdot x^{\nu'})\, \partial x}{\sqrt{(\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \ldots + \beta_\nu x^\nu}},$$

où $\nu' = \frac{\nu-1}{2} - 1$, si ν est impair, et $\nu' = \frac{\nu}{2} - 2$ si ν est pair, on aura toujours:

31. $\varepsilon_1 m_1 \psi(x_1) + \varepsilon_2 m_2 \psi(x_2) + \ldots + \varepsilon_\mu m_\mu \psi(x_\mu) =$ à une constante.

On voit que ν' a la même valeur pour $\nu = 2m-1$ et pour $\nu = 2m$, savoir $\nu' = m-2$.

8.

Soit maintenant

$$\psi x = \int \frac{r\,\partial x}{\sqrt{(\varphi x)}},$$

où r est une fonction rationnelle quelconque de x. Quelle que soit la forme de r, on pourra toujours faire

$$32.\quad r = fx + \frac{f_1 x}{(x-\alpha_1)^{k_1}} + \frac{f_2 x}{(x-\alpha_2)^{k_2}} + \ldots + \frac{f_\omega x_\omega}{(x-\alpha_\omega)^{k_\omega}},$$

où fx, $f_1 x$, $f_2 x$, ... $f_\omega x$ sont des fonctions entières. Cela posé, il est clair qu'en vertu des théorèmes III. et V. on aura le suivant:

Théorème VII. Quelle que soit la fonction rationelle r, exprimée par la formule (32.), en faisant

$$33.\quad \psi x = \int \frac{r\,\partial x}{\sqrt{(\varphi x)}} \text{ et } \quad \frac{\theta x.\sqrt{(\varphi_1 x)} + \theta_1 x.\sqrt{(\varphi_2 x)}}{\theta x.\sqrt{(\varphi_1 x)} - \theta_1 x.\sqrt{(\varphi_2 x)}} = \chi x:$$

on aura toujours:

$$34.\quad \begin{cases} \varepsilon_1 m_1 \psi x_1 + \varepsilon_2 m_2 \psi x_2 + \ldots + \varepsilon_\mu m_\mu \psi x_\mu = C + \Pi \frac{r}{\sqrt{(\varphi x)}} \log \chi(x) \\ -\frac{1}{\Gamma k_1} \cdot \frac{\partial^{k_1-1}}{\partial {\alpha_1}^{k_1-1}} \cdot \frac{f_1 \alpha_1}{\sqrt{(\varphi \alpha_1)}} \log \chi \alpha_1 - \frac{1}{\Gamma k_2} \cdot \frac{\partial^{k_2-1}}{\partial {\alpha_1}^{k_2-1}} \cdot \frac{f_2 \alpha_2}{\sqrt{(\varphi \alpha_2)}} . \log \chi \alpha_2 - \ldots . \\ -\frac{1}{\Gamma k_\omega} \cdot \frac{\partial^{k_\omega-1}}{\partial {\alpha_\omega}^{k_\omega-1}} \cdot \frac{f_\omega \alpha_\omega}{\sqrt{(\varphi \alpha_\omega)}} \log \chi \alpha_\omega, \end{cases}$$

en représentant par $\Gamma(k)$ le produit $1.2.3.\ldots.(k-1)$.

9.

Précedemment nous avons considéré les quantités $x_1, x_2, \ldots x_\mu$ comme des fonctions de $a_0, a_1, a_2, \ldots c_0, c_1, c_2, \ldots$ Supposons maintenant qu'un certain nombre des quantité $x_1, x_2, \ldots x_\mu$ soient données et regardées comme des variables indépendantes; et soient $x_1, x_2, \ldots x_{\mu'}$ ces quantités. Alors il faut déterminer $a_0, a_1, \ldots c_0, c_1, \ldots$ de manière que le premier membre de l'équation (3.) soit divisible par

$$(x-x_1)(x-x_2) \ldots (x-x_\mu).$$

Cela se fera à l'aide des équations (26.). Les μ' premières équations

$$\theta x_1.\sqrt{(\varphi_1 x_1)} = \varepsilon_1.\theta_1 x_1.\sqrt{(\varphi_2 x_1)},$$
$$\theta x_2.\sqrt{(\varphi_1 x_2)} = \varepsilon_2.\theta_1 x_2.\sqrt{(\varphi_2 x_2)},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\theta x_{\mu'}.\sqrt{(\varphi_1 x_{\mu'})} = \varepsilon_{\mu'}.\theta_1 x_{\mu'}.\sqrt{(\varphi_2 x_{\mu'})}$$

donneront un nombre μ' des quantités $a_0, a_1, \ldots c_0, c_1, \ldots$ exprimées en fonctions rationnelles des autres et de $x_1, x_2, \ldots x_{\mu'}$; $\sqrt{(\varphi x_1)}$, $\sqrt{(\varphi x_2)}, \ldots \sqrt{(\varphi x_{\mu'})}$.

Le nombre des indéterminées $a_0, a_1, \ldots a_n, c_0, c_1, \ldots c_m$ est égal à $m+n+1$; donc, comme il est aisé de voir par la forme des équations (35.), on pourra faire $\mu' = m+n+1$. Cela posé, en substituant les valeurs de $a_0, a_1, \ldots c_0, c_1, \ldots$ dans les fonctions θx, $\theta_1 x, \ldots$, la fonction entière $(\theta x)^2.\varphi_1 x - (\theta_1 x)^2.\varphi_2 x$ deviendra divisible par

$$(x-x_1)(x-x_2) \ldots (x-x_\mu).$$

Désignant le quotient par R, on aura

$$36.\quad R = A(x-x_{\mu'+1})(x-x_{\mu'+2}) \ldots (x-x_\mu).$$

Donc les $\mu-\mu'$ quantités $x_{\mu'+1}, x_{\mu'+2}, \ldots x_\mu$, seront les racines d'une

équation $R = 0$ de degré $\mu - \mu'$, dont tous les coëfficiens sont exprimés rationnellement par les quantités $x_1, x_2, x_3, \ldots . x_{\mu'}$; $\sqrt{(\varphi x_1)}, \sqrt{(\varphi x_2)}, \ldots \ldots \sqrt{(\varphi x_{\mu'})}$.

Faisons

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \ldots . = \varepsilon_\mu = 1,$$
$$\varepsilon_{\mu_1+1} = \varepsilon_{\mu_1+2} = \ldots . = \varepsilon_{\mu'} = -1,$$
$$x_{\mu_1+1} = x'_1, \quad x_{\mu_1+2} = x'_1, \ldots . \quad x_{\mu'} = x'_{\mu_2},$$
$$x_{\mu'+1} = y_1, \quad x_{\mu'+2} = y_2, \ldots . \quad x_\mu = y_{\nu'},$$

on aura, en désignant par $\psi(x)$ la fonction $\int \frac{r \partial x}{\sqrt{(\varphi x)}}$,

$$37. \quad \begin{cases} \psi x_2 + \psi x_2 + \ldots . + \psi x_{\mu_1} - \psi x'_1 - \psi x'_2 - \ldots . - \psi x'_{\mu_2} \\ = v - \psi y_1 - \psi y_2 - \psi y_3 - \ldots . - \psi y_{\nu'}, \end{cases}$$

où v est une expression algébrique et logarithmique. Les quantités x_1, $x_2, \ldots . x_{\mu_1}$; x'_1, $x'_2, \ldots . x'_{\mu_2}$ sont des quantités variables quelconques, et $y_1, y_2, \ldots . y_{\nu'}$ seront déterminables à l'aide d'une équation du degré ν'.

Maintenant nous verrons qu'on pourra toujours rendre ν' independant du nombre $\mu_1 + \mu_2$ des fonctions données. En effet cherchons la plus petite valeur de ν'.

En supposant indeterminées toutes les quantités $a_0, a_1, \ldots . c_0, c_1, \ldots .$, il est clair que μ sera égal à l'un des deux nombres $2n + \nu_1$ et $2m + \nu_2$, où ν_1 et ν_2 représentent les degrés des fonctions $\varphi_1 x$, $\varphi_2 x$. Soit p. ex.

$$\mu = 2n + \nu_1,$$

on doit avoir en même tems:

$$\mu \geqq 2m + \nu_2,$$

d'où, en ajoutant, on tire

$$\mu \geqq m + n + \frac{\nu_1 + \nu_2}{2},$$

ou

$$\nu' = \mu - \mu' = \mu - m - n - 1,$$

donc

$$\nu' \geqq \frac{\nu_1 + \nu_2}{2} - 1,$$

ou bien, désignans le degré de φx par ν,

$$38. \quad \nu' \geqq \frac{\nu}{2} - 1.$$

De là on voit, que la plus petite valeur de ν' est $\frac{\nu - 1}{2}$ ou $\frac{\nu}{2} - 1$, selon que ν est impair ou pair.

Donc cette valeur est indépendante du nombre $\mu_1 + \mu_2$ des fonctions données; elle est précisément la même que le nombre total des

coëfficiens δ_0, δ_1, δ_2, ... dans le 6me théorème. On aura maintenant ce théorème:

Théorème VIII. Soit $\psi x = \int \frac{r\,\partial x}{\sqrt{\varphi x}}$, où r est une fonction rationnelle quelconque de x, et φx une fonction entière de degré $2\nu-1$ ou 2ν, et soient $x_1, x_2, \ldots x_\mu, x'_1, x'_2, \ldots x'_{\mu_1}$ des variables données. Cela posé, quel que soit le nombre $\mu_1+\mu_2$ des variables, on pourra toujours trouver au moyen une équation algébrique, $\nu-1$ quantités $y_1, y_2, \ldots y_{\nu-1}$, telles que:

$$39.\quad \begin{cases} \psi x_1 + \psi x_2 + \ldots + \psi x_{\mu_1} - \psi x'_1 - \psi x'_1 - \psi x'_2 - \ldots - \psi' x'_\mu, \\ = v + \varepsilon_1 . \psi y_1 + \varepsilon_2 \psi y_2 + \ldots + \varepsilon_{\nu-1} \psi y_{\nu-1}, \end{cases}$$

v étant algébrique et logarithmique, et $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_{\nu-1}$ égales à $+1$ ou à -1.

On peut ajouter que les fonctions $y_1, y_2, \ldots y_{\nu-1}$ restent les mêmes, quelle que soit la forme de la fonction rationelle r, et que la fonction v ne change pas de valeur en ajoutant à r une fonction entière quelconque du degré $\nu-2$.

10.

Les équations (35.) qui déterminent les quantités $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ $c_0, c_1, \ldots$ deviendront en vertu de la formule (39.)

$$40.\quad \begin{cases} \theta x_1 . \sqrt{(\varphi_1 x_1)} = \theta_1 x_1 . \sqrt{(\varphi_2 x_1)}; \quad \theta x'_1 . \sqrt{(\varphi_1 x'_1)} = -\theta'_1 x'_1 . \sqrt{(\varphi_2 x'_1)}, \\ \theta x_2 . \sqrt{(\varphi_1 x_2)} = \theta_1 x_2 . \sqrt{(\varphi_2 x_2)}; \quad \theta x'_2 . \sqrt{(\varphi_1 x'_1)} = -\theta_1 x'_2 . \sqrt{(\varphi_2 x'_2)}, \\ \ldots\ldots\ldots\

11.

La formule (39.) a lieu si plusieurs des quantités $x_1, x_2, \ldots$ $x'_1, x'_2, \ldots$ sont égales entre elles, mais dans ce cas les équations (40.) ne suffisent plus pour déterminer les quantités $a_0, a_1, \ldots c_0, c_1, \ldots$; car si p. ex. $x_1 = x_2 = \ldots = x_k$, les k premières des équations (40.) deviendront identiques. Pour avoir les équations nécessaires dans ce cas, soit pour abréger

$$\theta x . \sqrt{(\varphi_1 x)} - \theta_1 x . \sqrt{(\varphi_2 x)} = \lambda x.$$

L'expression $\frac{\lambda x}{(x-x_1)^{k_1}}$ doit avoir une valeur finie en faisant $x = x_1$. De là on tire d'après les principes du calcul différentiel, les k équations

$$42. \quad \lambda x_1 = 0; \quad \lambda' x_1 = 0; \quad \lambda'' x_1 = 0; \quad \ldots \quad \lambda^{(k-1)} x_1 = 0,$$

et ce sont elles, qu'il faut substituer à la place des équations

$$\lambda x = 0, \quad \lambda x_2 = 0, \quad \ldots \quad \lambda x_k = 0,$$

dans le cas où $x_1 = x_2 = \ldots x_k$.

31.
Ueber die Krümmung einer beliebigen Fläche in einem gegebenen Puncte.

(Von Herrn Dr. *Plücker* zu Bonn.)

1. In die Reihe der zierlichsten Resultate, zu welchen die allgemeinen Untersuchungen über krumme Oberflächen geführt haben, gehört unstreitig auch der von Euler zuerst bemerkte Satz, dafs jede Fläche in jedem ihrer Puncte nur zwei Krümmungen hat, und die Richtungen dieser beiden Krümmungen auf einander senkrecht stehen. Dafs dieser Satz allen möglichen continuirlichen, d. h. durch eine Gleichung darstellbaren Flächen zukommt, beruhet offenbar darauf, dafs ein Element einer solchen Fläche im Allgemeinen als ein Element einer Fläche zweiter Ordnung in allen denjenigen Beziehungen anzusehen ist, wo in der analytischen Entwicklung nicht höhere Differential-Coefficienten, als die der zweiten Ordnung, in Betracht kommen, oder mit andern Worten, wo wir auf der Fläche nach jeder Richtung hin nur drei auf einander folgende Puncte, oder, was dasselbe heifst, nur zwei geradlinige Elemente berücksichtigen. Zugleich erblickt man aber auch auf diese Weise, dafs der Eulersche Satz für gewisse Puncte seine Anwendung verliert, nemlich für solche Puncte, in welchen die Berührungs-Ebene mit der Fläche einen Contact höherer Ordnung hat, wobei zugleich mit den ersten Differential-Coefficienten (bei gehöriger Coordinaten-Bestimmung) auch die zweiten verschwinden. Alsdann kann man aber noch immer nach den Krümmungsrichtungen der Fläche, d. h. nach denjenigen Richtungen fragen, nach welchen man zu Puncten der Fläche kommt, in denen die Normalen der Normale im Berührungs-Puncte begegnen. Die Absicht dieses Aufsatzes geht nun eines Theils dahin, den Eulerschen Satz in sofern zu vervollständigen, dafs jene Krümmungsrichtungen bestimmt und geometrische Beziehungen derselben nachgewiesen werden sollen.

Ferner hat Euler ebenfalls zuerst gezeigt dafs, wenn man durch einen gegebenen Punct irgend einer Fläche nach allen beliebigen Richtungen Normalebenen legt, von allen, auf diese Weise auf der Fläche be-

stimmten Durchschnittscurven, diejenigen in dem gegebenen Puncte ein Maximum oder Minimum der Krümmung haben, welche in den beiden, die Krümmungsrichtungen der Fläche enthaltenen Normalebenen sich befinden; und dafs, wenn die Krümmungen nach diesen zwei Richtungen bekannt sind, sogleich sich die Krümmung nach jeder beliebigen dritten Richtung bestimmen läfst. Für die in dem Obigen schon bezeichneten Puncte ist, nach dem gewöhnlichen Ausdrucke, die Krümmung nach allen Richtungen hin Null, d. h. der Osculations-Kreis und überhaupt jede Osculations-Linie zweiter Ordnung geht in eine gerade Linie über. Aber nichts desto weniger lassen sich die nach verschiedenen Richtungen genommenen Krümmungen in solchen Puncten unter einander vergleichen, und für das Maafs solcher Krümmungen können wir allgemein den reciproken Werth des Parameters p einer Parabel der n Ordnung

$$(1.2....n)py = x^n$$

nehmen, wenn der Contact von der $(n-1)$ Ordnung ist. Wir können also auch nach einem Maximum oder Minimum der Krümmung fragen und uns die Aufgabe stellen, die Krümmung nach einer beliebigen Richtung zu bestimmen, wenn dieselbe nach gewissen Richtungen schon bekannt ist.

2. Es sei, in der Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten,

$$(1.)\quad u = \varphi(f, y, z) = 0$$

die Gleichung der gegebenen Fläche. Zugleich sei der auf der Fläche gegebene Punct zum Anfangspuncte der Coordinaten und die Tangentialebene in diesem Puncte zur Ebene der x, y genommen, wonach also die Normale, Axe der z wird. Die Normale in irgend einem andern Puncte der Fläche, dessen Coordinaten x, y und z sind, hat, auf die Tangentialebene projicirt, folgende Gleichung:

$$Y - y = -\frac{dx}{dy}(X - x),$$

indem wir Y und X als die eigentlichen veränderlichen Gröfsen (*coordonnées courantes*) betrachten und $\left(\frac{dx}{dy}\right)$ aus (1.) in der Voraussetzung herleiten, dafs z constant sei. Soll die Normale der Axe z begegnen, so mufs offenbar ihre Projection durch den Anfangspunct gehen. Hiernach erhalten wir folgende Bedingungsgleichung:

$$(2.)\quad y + \frac{dx}{dy}x = 0.$$

Diese Gleichung stellt, indem wir x, y und z als veränderliche Gröſsen betrachten, eine Fläche dar, deren Durchschnitt mit der gegebenen Fläche diejenigen Puncte bestimmt, denen Normalen entsprechen, die der Normale im Anfangspuncte begegnen. Diese Puncte liegen im Allgemeinen auf einer Curve doppelter Krümmung. Wenn $\left(\frac{dx}{dy}\right)$ unabhängig ist von z, d. h. wenn die Gleichung der gegebenen Fläche unter folgender Form sich darstellt:

$$z = \psi(x, y),$$

so ist (2.) auch die Gleichung der Projection dieser Curve. Im entgegengesetzten Falle müssen wir, um diese Gleichung zu erhalten, z zwischen (1.) und (2.) eliminiren. Unsere Aufgabe, diejenigen Richtungen zu bestimmen, nach welchen wir, von dem auf der Fläche gegebenen Puncte aus, gehen müssen, um zu solchen consecutiven Puncten zu kommen, denen Normalen entsprechen, die der Normale in jenem Puncte begegnen, — reducirt sich hiernach offenbar darauf: an die eben bezeichnete Linie doppelter Krümmung, im Anfangspuncte der Coordinaten (der ein vielfacher Punct ist) Tangenten zu legen. Da diese Tangenten auch die gegebene Fläche berühren müssen, so liegen sie in der Ebene der x, y, und die Construction derselben läuft darauf hinaus, an die Durchschnittscurve dieser Ebene und der Fläche (2.) [Curve, deren Gleichung man erhält, indem man in (2.) $z = 0$ setzt] im Anfangspuncte der Coordinaten Tangenten zu ziehen.

3. Nachdem wir diese Bemerkungen vorausgeschickt haben, wollen wir nun die einzelnen Fälle discutiren und zu diesem Ende annehmen, die Entwicklung von (1.) gebe:

$$(3.)\quad z = Ay^2 + Byx + Cx^2 + Dy^3 + Ey^2x + Fyx^2 + Gx^3 + \ldots.$$
$$+ My^n + Ny^{n-1}x + Oy^{n-2}x^2 + \ldots. + Qy^2x^{n-2} + Ryx^{n-1} + Sx^n + \ldots.$$

(Nach der oben gemachten Coordinatenbestimmung fehlen nothwendig das constante Glied und die mit x und y behafteten Glieder.) Alsdann erhalten wir, wenn wir entwickeln, statt (2.) folgende Gleichung:

$$(4.)\quad \begin{cases} 0 = By^2 + 2(C-A)yx - Bx^2 \\ \quad + Ey^3 + (2F-3D)y^2x + (3G-2E)yx^2 - Fx^3 \\ \quad + \ldots. \\ \quad + Ny^n + (2Q-nM)y^{n-1}x + \ldots. + (nS-2O)yx^{n-1} - Rx^n \\ \quad + \ldots. \end{cases}$$

Die drei ersten Glieder dieser Gleichung für sich allein gleich Null gesetzt:

$$By^2 + 2(C-A)yx - Bx^2 = 0$$

stellen das System der beiden Tangenten im Anfangspuncte dar, und die trigonometrischen Tangenten derjenigen Winkel, welche diese beiden Tangenten mit der Axe der x bilden, sind durch die Wurzeln folgender Gleichung gegeben:

$$(5.) \quad Bt^2 + 2(C-A)t - B = 0,$$

die wir erhalten, indem wir alle Glieder der vorhergehenden Gleichung durch x^2 dividiren und $\frac{y}{x} = t$ setzen *). Diese Gleichung hat immer reelle Wurzeln; bezeichnen wir dieselbe durch t' und t'', so kommt:

$$t't'' + 1 = 0$$

d. h. die durch (5.) bestimmten Richtungen, die Krümmungsrichtungen der gegebenen Fläche in dem gegebenen Puncte, sind auf einander senkrecht.

4. Wenn wir die Axe der y in der Ebene der x, y drehen, bis sie mit der Axe der x irgend einen Winkel ω bildet, so erhalten wir nach den bekannten Coordinatenformeln

$$x + y\cos\omega \text{ für } x, \qquad y\sin\omega \text{ für } y.$$

Um ferner zu der Gleichung der Durchschnittscurve der gegebenen Fläche und der neuen Ebene der z, y zu kommen, brauchen wir nur in der Gleichung (1.) oder (3.) die der obigen Coordinatenverwandlung entsprechenden Substitutionen zu machen und alsdann $x = 0$ zu setzen; oder, was dasselbe ist, sogleich in diesen Gleichungen $y\cos\omega$ für x und $y\sin\omega$ für y zu schreiben. Auf diese Weise ergiebt sich aus (3.):

$$(6.) \quad \begin{cases} z = y^2(A\sin^2\omega + B\sin\omega\cos\omega + C\cos^2\omega) \\ \quad + y^3(D\sin^3\omega + E\sin^2\omega\cos\omega + F\sin\omega\cos^2\omega + G\cos^3\omega) \\ \quad + \ldots. \\ \quad + y^n(M\sin^n\omega + N\sin^{n-1}\omega\cos\omega + \ldots. + R\sin\omega\cos^{n-1}\omega + S\cos^n\omega) \\ \quad + \ldots. \end{cases}$$

Der Krümmungshalbmesser dieser Curve im Anfangspuncte der Coordinaten ist, da $\frac{dz}{dy}$ verschwindet, gleich dem reciproken Werthe von

$$\frac{d^2z}{dy^2} = 2(A\sin^2\omega + A\sin\omega\cos\omega + \cos^2\omega).$$

---

*) Vergl. Euler *Introductio in Analysin infinitorum II.*

Um das Maximum oder Minimum dieses Krümmungshalbmessers, wenn wir den Winkel ω als veränderlich betrachten, zu erhalten, brauchen wir nur den vorstehenden Werth für $\frac{d^2z}{dy^2}$ in Beziehung auf ω zu differentiiren und alsdann $\frac{d.\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)}{d\omega}$ gleich Null zu setzen. Auf diese Weise kommt, wenn wir zugleich durch $\cos^2\omega$ dividiren und t für $\text{tang}\omega$ schreiben:

$$Bt^2+(C-A)t-B=0.$$

Diese Gleichung ist identisch mit (5.). Die beiden Krümmungsrichtungen der gegebenen Fläche in dem auf derselben gegebenen Puncte sind also zugleich diejenigen Richtungen, nach welchen Ebenen, die auf der Tangentialebene senkrecht stehen, die Fläche in Curven schneiden, deren Krümmungshalbmesser in dem gegebenen Puncte gröfste oder kleinste Werthe erhalten.

Wenn wir endlich den Werth des zweiten Differentialcoëfficienten gleich Null setzen, so erhalten wir diejenigen Richtungen, nach welchen wir Schnitte führen müssen, damit die Krümmungshalbmesser der Durchschnittscurven unendlich werden. Auf diese Weise kommt, wenn wir hier $\text{tang}\,\omega=u$ setzen:

$$Au^2+Bu+C=0.$$

Diese Gleichung hat reelle, imaginäre oder gleiche Wurzeln, je nachdem der Ausdruck (B^2-4AC) positiv, negativ oder Null ist. Bezeichnen wir die Wurzeln dieser Gleichung durch u' und u'', so ist

$$u'+u''=-B.$$

Wenn wir also voraussetzen, dafs die Coordinaten-Axen ursprünglich so angenommen worden sind, dafs $u'+u''=0$, so verschwindet auch B, und die Gleichung (5.) giebt $t=0$ oder $t=\infty$. Wir sehen hieraus, dafs die Krümmungsrichtungen der Fläche die Scheitelwinkel halbiren, welche von denjenigen Richtungen, nach welchen die Krümmungshalbmesser der Schnitte unendlich sind (von den Richtungen höhern Contacts), gebildet werden.

Die Bestimmung der Richtungen höhern Contacts, wenn die beiden Krümmungsrichtungen gegeben sind, ist eine unbestimmte Aufgabe.

5. Wir gehen nun weiter und wollen voraussetzen, dafs in der Gleichung (3.) der gegebenen Fläche A, B und C Null seien. Alsdann erhalten wir folgende Gleichung:

$$(7.)\quad Ey^3 + (2F - 3D)y^2x + (3G - 2E)yx^2 - Fx^3 = 0;$$

welche das System dreier Tangenten der durch (4.) dargestellten Curve in dem Anfangspuncte der Coordinaten, welcher ein dreifacher Punct (*point triple*) derselben ist, darstellt. Durch diese Tangenten sind die Krümmungsrichtungen der gegebenen Fläche bestimmt, d. h. wenn wir nach der Richtung dieser Tangenten, vom gegebenen Punct aus, auf der Fläche fortgehen, so begegnen wir solchen consecutiven Normalen, welche die Normale in jenem Puncte schneiden. Diese Richtungen bilden mit der ersten Axe Winkel, deren trigonometrische Tangenten durch nachstehende Gleichung, die wir aus (7.) erhalten, indem wir durch x^3 dividiren und t für $\frac{y}{x}$ schreiben, gegeben sind:

$$(8.)\quad Et^3 + (2F - 3D)t^2 + (3G - 2E)t - F = 0.$$

Wir erhalten die Gleichung der Durchschnittscurve der Fläche und einer durch die Axe der z gehenden Ebene, die mit der Ebene der zx irgend einen Winkel ω bildet, wenn wir in (6.) A, B und C gleich Null setzen. Da für diese Gleichung alsdann die beiden Differentialcoefficienten $\frac{dz}{dy}$ und $\frac{d^2z}{dy^2}$ verschwinden, wenn wir z und y gleich Null setzen, so wird der Radius des Krümmungskreises für den Anfangspunct unendlich und das Maafs der Krümmung der Durchschnittscurve in diesem Puncte ist der dritte Differentialcoefficient:

$$\frac{d^3z}{dy^3} = 2.3(D\sin^3\omega + E\sin^2\omega\cos\omega + F\sin\omega\cos^2\omega + G\cos^3\omega).$$

Wenn wir ω als veränderlich betrachten, so erhalten wir für das Maximum oder Minimum dieses Ausdrucks, indem wir wie oben $\mathrm{tang}\,\omega = t$ setzen, folgende Bedingungsgleichung zu erfüllen:

$$Et^3 + (2F - 3D)t^2 + (3G - 2E)t - F = 0.$$

Diese Gleichung ist identisch mit (8) und somit ist dargethan, dafs die Krümmungsrichtungen der Fläche zugleich diejenigen Richtungen sind, nach welchen die Schnitte der Fläche ein Maximum oder Minimum der Krümmung haben.

Der dritte Differentialcoefficient verschwindet, wenn wir den Winkel ω vermittelst folgender Gleichung, in der wir u für $\mathrm{tang}\,\omega$ schreiben, bestimmen:

$$(9.)\quad Du^3 + Eu^2 + Fu + G = 0.$$

Da diese Gleichung vom dritten Grade ist, so giebt es im Allgemeinen

drei Richtungen, nach welchen hin die Fläche mit der Tangentialebene einen Contact noch höherer Ordnung (der dritten) hat. Diese Richtungen höhern Contacts stehen mit den Krümmungsrichtungen in gegenseitigen Beziehungen, worüber wir in einige Entwicklungen eingehen wollen.

6. Wenn $F = 0$, so wird eine Wurzel der Gleichung (8) gleich Null, d. h. die Axe der x fällt mit einer der drei Krümmungsrichtungen zusammen. Aber alsdann ist zugleich, wenn wir die drei Wurzeln der Gleichung (9.) u', u'' und u''' nennen:

$$u'u'' + u'u''' + u''u''' = 0;$$

mithin auch, wenn wir durch $u'u''u'''$ dividiren:

$$(10.) \quad \frac{1}{u'''} + \frac{1}{u''} + \frac{1}{u'} = 0.$$

Es ist also die Summe der Cotangenten derjenigen drei Winkel, welche die drei Richtungen höhern Contacts mit einer beliebigen der drei Krümmungsrichtungen bilden, gleich Null. Wenn wir also, bei einer beliebigen Annahme der ersten Axe, die Winkel, welche die erstgenannten drei Richtungen mit dieser Axe bilden, α', α'' und α''' nennen, und ω denjenigen Winkel, welchen eine der drei Krümmungsrichtungen mit derselben Axe bildet, so ist

$$(11.) \quad \cot(\alpha' - \omega) + \cot(\alpha'' - \omega) + \cot(\alpha''' - \omega) = 0,$$

mithin:

$$\frac{1 + \operatorname{tang}\alpha' \operatorname{tang}\omega}{\operatorname{tang}\alpha' - \operatorname{tang}\omega} + \frac{1 + \operatorname{tang}\alpha'' \operatorname{tang}\omega}{\operatorname{tang}\alpha'' - \operatorname{tang}\omega} + \frac{1 + \operatorname{tang}\alpha''' \operatorname{tang}\omega}{\operatorname{tang}\alpha''' - \operatorname{tang}\omega} = 0.$$

Diese Gleichung ist, wenn wir entwickeln, in Beziehung auf $\operatorname{tang}\omega$ vom dritten Grade, und durch ihre drei Wurzeln sind die Krümmungsrichtungen alle drei bestimmt.

7. Wenn wir $G = 0$ setzen, so ergiebt sich aus dem Anblick der Gleichung (9.), dafs ein Werth von u Null wird, d. h. dafs die Axe der x mit einer der drei Richtungen höhern Contacts zusammenfällt. Alsdann folgt aus (8.), wenn wir die Wurzeln dieser Gleichung t', t'' und t''' nennen:

$$t't'' + t't''' + t''t''' = -2,$$

oder

$$(12.) \quad \frac{1}{t'''} + \frac{1}{t''} + \frac{1}{t'} = -2\left(\frac{1}{t'} \cdot \frac{1}{t''} \cdot \frac{1}{t'''}\right).$$

Es ist also die Summe der Producte je zweier der trigonometrischen Tangenten derjenigen drei Winkel, welche die Krümmungsrichtungen der

Fläche mit einer beliebigen der drei Richtungen höhern Contacts bilden gleich (—2.), oder, was dasselbe heifst, die Summe der Cotangenten dieser drei Winkel, negativ genommen, ist gleich dem doppelten Product derselben Cotangenten. Wenn wir, bei einer beliebigen Annahme der ersten Axe, diejenigen Winkel, welche die drei Krümmungsrichtungen mit dieser Axe bilden, ω', ω'' und ω''' nennen und α denjenigen Winkel, welchen mit derselben Axe eine beliebige der drei Richtungen höhern Contacts bildet, so erhalten wir folgende Gleichung:

$$(13.)\quad \begin{aligned}&\operatorname{tang}(\omega'-\alpha)\operatorname{tang}(\omega''-\alpha)+\operatorname{tang}(\omega'-\alpha)\operatorname{tang}(\omega'''-\alpha)\\&+\operatorname{tang}(\omega''-\alpha)\operatorname{tang}(\omega'''-\alpha)+2=0,\end{aligned}$$

die zur Bestimmung von α durch ω', ω'' und ω''' zu einer Gleichung des dritten Grades führt.

8. Wir wollen noch einige einzelne Fälle besonders bemerklich machen. Wenn zwei der drei Richtungen höhern Contacts zusammenfallen, so fällt mit denselben auch eine der drei Krümmungsrichtungen zusammen. Dies folgt sogleich daraus, dafs, wenn man die Coefficienten F und G der Gleichung (9.) gleich Null setzt, auch in der Gleichung (8.) das von t unabhängige Glied ausfällt. Wenn alle drei Richtungen höhern Contacts zusammenfallen, so fallen mit ihnen auch zwei der drei Krümmungsrichtungen zusammen und die dritte steht auf ihnen senkrecht. Der letztere Theil dieser Behauptung ergiebt sich aus dem Anblick von (13.), in der, wenn $\omega'-\alpha=\omega''-\alpha=0$, nothwendig $\omega'''-\alpha$ gleich sein mufs $\frac{\pi}{2}$. Die Fläche hat also im engern Sinne nur eine einzige Krümmung, und die Richtung derselben ist senkrecht auf den Richtungen höhern Contacts.

Wenn eine der Richtungen höhern Contacts und eine der Krümmungsrichtungen auf einander senkrecht stehen, so halbiren dieselben sowohl diejenigen Scheitelwinkel, welche von den beiden übrigen Linien höhern Contacts, als auch diejenigen, welche von den beiden übrigen Krümmungsrichtungen gebildet werden. Dies erhellet daraus, dafs wenn man in (12.) $\frac{1}{t'''}=0$ und in (10.) $\frac{1}{u'''}=0$ setzt, man aus diesen beiden Gleichungen folgende zieht:

$$t'+t''=0, \qquad u'+u''=0.$$

Wenn die drei Richtungen höhern Contacts lauter gleiche Winkel bilden, so werden dieselben von den drei Krümmungsrichtungen halbirt, so

dafs diese unter einander ebenfalls gleiche Winkel bilden und auf jenen senkrecht stehen.

Es können zwei der drei Krümmungsrichtungen zusammenfallen. Soll diefs in der ersten Axe geschehen, so erhalten wir folgende beide Bedingungsgleichungen:

$$F = 0, \qquad 3G = 2E,$$

und hiernach zur Bestimmung der Richtungen höhern Contacts, aus (9.):

$$\frac{1}{u^3} + \tfrac{3}{2}\frac{1}{u} + \tfrac{3}{2}\frac{D}{E} = 0.$$

Zwei Wurzeln dieser Gleichung sind nothwendig imaginär, weil der Coefficient von $\frac{1}{u}$ positiv ist. Wenn alle drei Krümmungsrichtungen zusammenfallen, so ist zugleich $D = 0$. Die letzte Gleichung zeigt, dafs alsdann die einzige reelle Richtung höhern Contacts auf jenen Krümmungsrichtungen senkrecht ist.

9. Die vorstehenden Entwiklungen können wir ohne Schwierigkeit auf den allgemeinen Fall ausdehnen, wo die Fläche in dem gegebenen Puncte mit einer Ebene einen Contact der $(n-1)$ten Ordnung hat, und also der zweite Theil der Gleichung (3.) mit denjenigen Gliedern anfängt, die y und x in der $n$ten Potenz enthalten. Statt der Gleichungen (8.) und (9.) finden wir alsdann folgende:

$$(14.)\quad Nt^n + (2O - nM)t^{n-1} + \ldots + (nS - 2Q)t - R = 0,$$

$$(15.)\quad Mu^n + Nu^{n-1} + Ou^{n-2} + \ldots + Qu^2 + Ru + S = 0.$$

Diese Gleichungen haben beide, wenn n eine ungerade Zahl ist, wenigstens eine reelle Wurzel; es giebt also, wenn eine Fläche in einem ihrer Puncte mit einer Ebene einen Contact von gerader Ordnung hat, in diesem Puncte wenigstens eine Krümmungsrichtung und eine Richtung eines Contacts der $n$ten Ordnung. In demjenigen Falle, wo die Ordnung des Contacts eine ungerade ist, braucht die Fläche in dem gegebenen Puncte nach keiner Richtung hin mit der Tangentialebene einen Contact höherer Ordnung zu haben; sie hat aber immer wenigstens zwei Krümmungen. Um diese letztere Behauptung zu beweisen, wird es hinreichend sein, beispielsweise denjenigen Fall zu betrachten, wo $n = 6$. Die Gleichungen (15.) und (14.) werden in diesem Falle:

$$(16.)\quad Mu^6 + Nu^5 + Ou^4 + Pu^3 + Qu^2 + Ru + S = 0,$$

$$(17.)\quad Nt^6 + (2O - 6M)t^5 + (3P - 5N)t^4 + 4(Q - O)t^3 + (5R - 3P)t^2 + (6S - 4Q)t - R = 0.$$

Wir können, ohne der Allgemeinheit dieser Gleichungen irgend Abbruch zu thun, annehmen, N sei positiv. Wenn alle Wurzeln der Gleichung (17.) imaginär sein sollen, so mufs nach der allgemeinen Theorie der Gleichungen, bei obiger Voraussetzung, R negativ sein; es mufs ferner der Coefficient von t^2 positiv sein, und folglich ist, da $R<0$, auch P nothwendig negativ; endlich mufs auch der Coefficient von t^4 positiv sein, und folglich ist, da $P<0$, auch N nothwendig negativ: was im Widerspruche mit dem Vorstehenden ist. Wir können also als vollständig bewiesen ansehen, dafs jede Fläche in jedem ihrer Puncte wenigstens eine oder zwei Krümmungen hat, je nachdem sie in jenem Puncte mit einer Ebene einen Contact von grader oder von ungerader Ordnung hat.

10. Wenn wir die erste Axe so bestimmen, dafs sie mit einer Krümmungsrichtung zusammenfällt, so wird eine Wurzel der Gleichung (17.) Null, und mithin kommt $R=0$; und hiernach folgt aus der Gleichung (16.), dafs die Summe der reciproken Werthe der Wurzel dieser Gleichung Null ist. Also:

Wenn irgend eine Fläche in irgend einem ihrer Puncte mit einer Ebene einen Contact der $(n-1)$ten Ordnung hat, so ist die Summe der Cotangenten derjenigen Winkel, welche die n Richtungen, nach denen die Fläche (im Allgemeinen) mit der Tangentialebene in jenem Puncte einen Contact der $n$ten Ordnung hat, mit einer beliebigen der n Krümmungsrichtungen bilden, gleich Null.

Wenn wir $n=2$ nehmen, so erhalten wir aus dem vorstehenden Satze, als besondern Fall, den Eulerschen Satz, dafs in den gewöhnlichen Fällen die beiden Krümmungen in beliebigen Puncten einer Fläche auf einander senkrecht stehen.

11. Es bleibt uns jetzt nur noch übrig, die Krümmung der Fläche in dem gegebenen Puncte nach einer gegebenen Richtung zu bestimmen, wenn dieselbe nach gewissen Richtungen bekannt ist. Nehmen wir sogleich den allgemeinen Fall, dafs die Fläche mit der Tangentialebene in dem gegebenen Puncte einen Contact der $(n-1)$ten Ordnung habe, so erhalten wir (nach No. 4.) für die Gleichung der Curve des Durchschnittes der Fläche und einer Normalebene, die mit der Ebene der zx irgend einen Winkel ω bildet:

$$z=y^n(M\sin^n\omega+N\sin^{n-1}\omega\cos\omega+\ldots.+R\sin\omega\cos^{n-1}\omega+S\cos^n\omega)+\ldots.$$

Bezeichnen wir ferner (nach No. 1.) den Krümmungsparameter dieser

Curve im Anfangspuncte der Coordinaten durch p (bei einem Contacte der ersten Ordnung ist p gleich dem Krümmungshalbmesser) so ergiebt sich:

$$(17.\,a.)\quad \frac{1}{p}\left(=\frac{d^n z}{dy^n}\right)$$
$$=2.3....n(M\sin^n\omega+N\sin^{n-1}\omega\cos\omega+.....+R\sin\omega\cos^{n-1}\omega+S\cos^n\omega).$$

Wir können diese Gleichung als einer Curve angehörig betrachten, indem wir p und ω als Polarcoordinaten construiren. Um zu rechtwinkligen Coordinaten überzugehen, brauchen wir nur $\frac{x}{p}$ für $\cos\omega$, $\frac{y}{p}$ für $\sin\omega$ und $\pm\sqrt{(x^2+y^2)}$ für p zu substituiren. Auf diese Weise kommt:

$$(18.)\quad (x^2+y^2)^{\frac{n-1}{2}}\pm 2.3....n(My^n+Ny^{n-1}x+....+Rxy^{n-1}+Sx^n)=0,$$

die Gleichung einer Curve, die im Anfangspuncte der Coordinaten einen conjugirten Punct hat. Wenn wir also diese Curve in der Tangentialebene construiren und von dem Berührungspuncte, dem conjugirten Puncte der Curve, nach einem beliebigen Puncte derselben eine gerade Linie ziehen, so bestimmt die Länge dieser Linie den Parameter p einer Parabel der $n$ten Ordnung (nach No. 1.), die mit derjenigen Durschnittscurve, welche in der durch jene gerade Linie gelegten Normalebene sich befindet, im Anfangspuncte der Coordinaten dieselbe Krümmung hat. Wenn n eine ungerade Zahl ist, so können wir zum Behuf der eben angezeigten Construction in der Gleichung (18.) beliebig das Zeichen + oder — nehmen. Wenn ader n eine gerade Zahl ist, so steigt diese Gleichung durch Fortschaffung der Wurzelgröfse bis zum $2n$ten Grade; alsdann ist der conjugirte Punct zugleich der Mittelpunct der Curve.

Die Asymptoten der Curve (18.) sind parallel den Richtungen höhern Contacts; die von dem conjugirten Puncte nach der Curve gezogenen Normalen bestimmen die Krümmungsrichtungen der Fläche, die im Allgemeinen zugleich das Maximum oder Minimum der Krümmung der verschiedenen Durchschnittscurven anzeigen.

Da die Gleichung (18.) $m+1$ Constanten hat und die bezügliche Curve also durch eben so viele Puncte vollständig bestimmt ist, so braucht man auch nur irgend $n+1$ Krümmungen der Fläche nach gegebenen Richtungen zu kennen, um die Krümmung derselben nach jeder beliebigen Richtung zu bestimmen. Zu dieser Bestimmung ist ebenfalls hinreichend, die n Richtungen höhern Contacts und aufserdem noch die Krümmung nach einer beliebigen Richtung zu kennen.

12. Wir wollen das Vorstehende an zwei Beispielen anschaulich machen. Es seien:

$$(19.)\quad \begin{cases} z = \frac{1}{6}(3y^2x - 2yx^2) + U, \\ z = \frac{1}{6}(y^3 + 3y^2x + 2x^3) + U, \end{cases}$$

(indem wir in U alle diejenigen Glieder zusammenfassen, in denen y und x in höherem als dem dritten Grade vorkommen), die Gleichungen zweier gegebenen Flächen. Diese Flächen haben mit der Ebene der xy einen Contact der zweiten Ordnung. Für dieselben verwandelt sich die Gleichung (18.) der vorigen Nummer, wenn wir in derselben das Zeichen + nehmen, in folgende beiden:

$$y^2 + x^2 + 3y^2x - 2yx^2 = 0,$$
$$y^2 + x^2 + y^3 + 3y^2x + 2x^3 = 0.$$

Diese Gleichungen sind (für eine beliebig angenommene Einheit) in (Fig. 1. und Fig. 2. Taf. V.) construirt, was sehr leicht ist, weil, wenn man in denselben $y = mx$ setzt, für jede beliebige Annahme von m, für x drei Werthe sich ergeben, von denen zwei Null sind. Denken wir uns nun die Ebene der Zeichnung als die Tangentialebene der beiden Flächen, OY und OX als die beiden ursprünglichen Axen der y und x, so stellt die von O nach einem beliebigen Puncte M einer der beiden Curven gezogene gerade Linie OM den Krümmungsparameter derjenigen Curve dar, die aus der bezüglichen Fläche durch eine Normalebene geschnitten werden kann, welche die Tangentialebene in eben dieser geraden Linie OM schneidet.

Im ersten Falle sind (Fig. 1.) DD, EE und FF die drei Richtungen des Contacts der dritten Ordnung zwischen Fläche und Tangentialebene. Im zweiten Falle (Fig. 1.) giebt es nur eine solche Richtung, nemlich DD. Wenn in den Gleichungen (19.) U fehlt, so bestimmen die eben genannten Richtungen gerade Linien, in welchen die Tangentialebene von der bezüglichen Fläche geschnitten wird.

Im ersten Falle sind die trigonometrischen Tangenten derjenigen Winkel, welche die Krümmungsrichtungen mit der ersten Axe bilden (nach No. 5.) durch folgende Gleichung gegeben:

$$3t^3 - 4t^2 - 6t + 2 = 0.$$

Die Richtungen dieser Krümmungen sind (Fig. 1.) durch die drei geraden Linien OA, OB und OC gegeben und die Parameter derselben durch die Länge dieser Linien. Diese drei Parameter sind Minima. Im

zweiten Falle erhalten wir statt der letzten Gleichung folgende:

$$t^3 - t^2 = 0,$$

und mithin fallen zwei dieser Krümmungsrichtungen in die erste Axe, (Fig. 2.) in OA zusammen, während die dritte in OB fällt. Nach OA ist der Krümmungsparameter der Fläche ein Maximum, nach OB weder ein Maximum noch ein Minimum.

13. Wir können auch, indem wir in der Gleichung (17. *a.*) $p = r^m$ setzen, in dieser Gleichung:

$$\frac{1}{r^m} = 2.3....n(M\sin^n\omega + N\sin^{n-1}\omega\cos\omega + ... + R\sin\omega\cos^{n-1}\omega + S\cos^n\omega)$$

r und ω als Polarcoordinaten betrachten. Wenn wir alsdann, wie in der 11. Nummer, zu rechtwinkligen Coordinaten übergehen, so kommt:

$$(20.)\quad (x^2+y^2)^{\frac{n-m}{2}} \pm 2.3....n(My^n + Ny^{n-1}x + ... + Ryx^{n-1} + Sx^n).$$

Wenn wir diese Gleichung, wie oben die Gleichung (18.), in der Tangentialebene construiren, so ist allgemein durch die $m$te Potenz der, vom Anfangspuncte der Coordinaten nach irgend einem Puncte der Curve gezogenen geraden Linie der Krümmungsparameter der Fläche nach der bezüglichen Richtung gegeben. Wenn m positiv ist und kleiner als n, so hat die durch (20.) dargestellte Curve im Anfangspuncte einen conjugirten Punct. Wenn $m = n$, so verwandelt sich diese Gleichung in:

$$1 = 2.3....n(My^n + Ny^{n-1}x + ... + Ryx^{n-1} + Sx^n).$$

Die Construction, welche dieser Gleichung entspricht, hat Herr Dupin für den gewöhnlichen Fall $n = 2$ vor längerer Zeit schon gegeben. Wenn m negativ ist, so hat die durch (20.) dargestellte Curve im Allgemeinen mehrere Zweige, die sich im Anfangspuncte der Coordinaten schneiden; und die Tangenten der Curve in diesem Puncte bestimmen die Richtungen eines Contacts der $n$ten Ordnung.

32.
Analytische Auflösung dreier Aufgaben der Calendarographie.

(Von Hrn. *W. Matzka*, Ober-Feuerwerker im K. K. Bombardier-Corps zu Wien.)

Der julianische und gregorianische Calender bieten dem Analytiker einige interessante Aufgaben dar, von denen ich folgende drei allgemein aufzulösen versuchte, da bisher, so viel mir bekannt ist, nur von einzelnen Fällen derselben durch Herrn Ritter von Ciccolini in dem 10. und 11. Bande der „*Correspondance astronomique, géographique, hydrographique et statistique du Baron* de Zach, *à Gênes* 1824 *et* 1825." Auflösungen gegeben worden. Zur gröfsern Einfachheit in der Darstellung bediene ich mich hier nebst den gewöhnlichen in den algebraischen Formen vorkommenden Zeichen noch folgender:

$\left(\frac{A}{n}\right)_e$ bezeichnet die ganze Zahl des Quotienten, welche man bei der Division der Gröfse A durch n erhält,

$\left(\frac{A}{n}\right)_r$ stellt den bei dieser Division sich ergebenden Rest vor.

So ist z. B.

$$\left(\frac{76}{9}\right)_e = 8,\ \left(\frac{76}{9}\right)_r = 4;\quad \left(\frac{35}{5}\right)_e = 7,\ \left(\frac{35}{5}\right)_r = 0.$$

Verlangt man jedoch in einer algebraischen Form, dafs für den besonderen Fall, wo A durch n vollkommen getheilt werden kann, die ganze Zahl des Quotienten um Eine Einheit vermindert und der Rest dem Divisor gleich gesetzt werde, so sollen die Buchstaben e und r mit E und R vertauscht werden; die Ausdrücke $\left(\frac{A}{n}\right)_E$ und $\left(\frac{A}{n}\right)_R$ fordern demnach, dafs

$\left(\frac{an}{n}\right)_E$ nicht $= a$ sondern $= a - 1$,

$\left(\frac{an}{n}\right)_R$ nicht $= 0$ sondern $= n$

genommen werde.

Es ist also

$$\left(\frac{84}{7}\right)_e = 12,\ \left(\frac{84}{7}\right)_E = 11;\ \left(\frac{84}{7}\right)_r = 0,\ \left(\frac{84}{7}\right)_R = 7.$$

1. Aufgabe. **Es sollen die zu demselben Jahrhunderte gehörigen Jahre der christlichen Aera bestimmt werden, welche einerlei Sonntagszeiger (d. i. den nemlichen zweiten Sonntagsbuchstaben) haben.**

Es sei

N ein gegebenes Jahr unserer Aera,

S die Zahl der in N enthaltenen vollen Hunderte, oder $S = \left(\frac{N}{100}\right)_e$,

n die von den zwei rechts stehenden Ziffern des Jahres N gebildete Zahl oder $n = \left(\frac{N}{100}\right)_r$,

folglich

$$N = 100S + n;$$

ferner sei

$h = \left(\frac{S+3}{7}\right)_r$ im julianischen und

$h = \left(\frac{2\left(\frac{S}{4}\right)_r + 1}{7}\right)_r$ im gregorianischen Kalender,

so findet man den Sonntagszeiger

$$(1.)\quad L = \left(\frac{h + 2\left(\frac{n}{4}\right)_r + 4\left(\frac{n}{7}\right)_r}{7}\right)_R$$

und den ersten Sonntagsbuchstaben

$$L' = \left(\frac{L+\delta}{7}\right)_R,$$

wenn δ in Schaltjahren 1, in gemeinen aber 0 ist.

Aus (1.) erhält man

$$(2.)\quad 2\left(\frac{n}{4}\right)_r + 4\left(\frac{n}{7}\right)_r + h = 7\alpha + L;$$

es ist jedoch

$$(3.)\quad \left(\frac{n}{4}\right)_r = n - 4\left(\frac{n}{4}\right)_e \text{ und } \left(\frac{n}{7}\right)_r = n - 7\left(\frac{n}{7}\right)_e,$$

daher verwandelt sich die Gleichung (2.), wenn man um abzukürzen

$$\beta = n - \left(\frac{n}{4}\right)_e - 4\left(\frac{n}{7}\right)_e - \alpha$$

setzt, in

$$n + \left(\frac{n}{4}\right)_e = h - L + 7\beta.$$

Soll nun in demselben Jahrhunderte, nemlich bei gleichem Werthe von S und h auch das Jahr $100S + n'$ diesen Sonntagszeiger L haben, so

mufs auch

$$n' + \left(\frac{n'}{4}\right)_e = h - L + 7\beta'$$

sein. Diese beiden letzten Gleichungen geben, falls n' gröfser als n vorausgesetzt wird,

$$n' - n + \left(\frac{n'}{4}\right)_e - \left(\frac{n}{4}\right)_e = 7(\beta' - \beta) = 7\gamma,$$

welcher Ausdruck, wegen der Gleichungen (3.), in

$$(4.) \quad 5(n' - n) = 28\gamma + \left(\frac{n'}{4}\right)_r - \left(\frac{n}{4}\right)_r$$

übergeht. Weil $n' - n$, wie alle in dieser Gleichung enthaltenen allgemeinen Gröfsen, ganz und positiv sein mufs, so findet man mittelst des bekannten Verfahrens der unbestimmten Analysis

$$n' - n = 28\lambda + 17\left(\frac{n'}{4}\right)_r + 11\left(\frac{n}{4}\right)_r$$

oder, wenn man

$$\omega = \lambda + \left(\frac{17\left(\frac{n'}{4}\right)_r + 11\left(\frac{n}{4}\right)_r}{28}\right)_e$$

setzt,

$$(I.) \quad n' = n + \left(\frac{17\left(\frac{n'}{4}\right)_r + 11\left(\frac{n}{4}\right)_r}{28}\right)_r + 28\omega.$$

Nimmt man nun für n die Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5 und 9, für $\left(\frac{n'}{4}\right)_r$ und ω aber 0, 1, 2 und 3, so erhält man nachstehendes Täfelchen der zugehörigen Werthe von n'.

n	0	1	2	3	4	5	9
n'	6	7	13	8	10	11	15
	17	12	19	14	21	16	20
	23	18	24	25	27	22	26
	28	29	30	31	32	33	37
	34	35	41	36	38	39	43
	45	40	47	42	49	44	48
	51	46	52	53	55	50	54
	56	57	58	59	60	61	65
	62	63	69	64	66	67	71
	73	68	75	70	77	72	76
	79	74	80	81	83	78	82
	84	85	86	87	88	89	93
	90	91	97	92	94	95	99
		96		98			

Alle in einer verticalen Reihe stehenden Jahre haben daher in jedem Jahrhunderte denselben Sonntagszeiger. Ist es demnach bekannt, dafs ein Jahr (z. B. 12) einen gewissen Sonntagszeiger (z. B. 7) hat, so kennt man sogleich mittelst dieses Täfelchens auch alle übrigen Jahre (1, 7, 12, 18, 29, 35 u. s. w.) dieses Saeculums, welche gleichfalls diesen Sonntagszeiger (7 oder den Sonntagsbuchstaben *G*) haben.

2. Aufgabe. **Diejenigen Jahre eines gewissen Jahrhunderts zu suchen, denen ein gegebener Sonntagszeiger angehört.**

Aus der Gleichung

$$n + \left(\frac{n}{4}\right)_e = h - L + 7\beta$$

erhält man, wenn darin

$$n = 4\left(\frac{n}{4}\right)_e + \left(\frac{n}{4}\right)_r$$

substituirt wird,

$$5\left(\frac{n}{4}\right)_e = h - L - \left(\frac{n}{4}\right)_r + 7\beta,$$

folglich auch mittelst der Methode der unbestimmten Analysis:

$$\left(\frac{n}{4}\right)_e = 7\varepsilon + 3\left(h - L - \left(\frac{n}{4}\right)_r\right)$$

oder

$$\left(\frac{n}{4}\right)_e = 7\vartheta + \left(\frac{3h + 4L + 4\left(\frac{n}{4}\right)_r}{7}\right)_r,$$

daher

$$(5.) \quad n = 28\vartheta + 4\left(\frac{3h + 4L + 4\left(\frac{n}{4}\right)_r}{7}\right)_r + \left(\frac{n}{4}\right)_r,$$

und wenn man

$$b = \left(\frac{n}{4}\right)_r = \left(\frac{N}{4}\right)_r$$

setzt:

$$(\text{II.}) \quad N = 100S + 28\vartheta + 4\left(\frac{3h + 4L + 4b}{7}\right)_r + b.$$

Bestimmt man demnach zu dem gegebenen Werthe von *S*, nach dem in der ersten Aufgabe aufgestellten Ausdrucke, jenen des *h*, und setzt sowohl ihn als auch den gegebenen Werth von *L* in diese Gleichung: nimmt man endlich für *b* und ϑ die Zahlen 0, 1, 2 und 3; so erhält man aus ihr alle jene Jahre *N* dieses Jahrhunderts, deren Sonntagszeiger *L* ist.

Vereinfacht wird die Auflösung dieser Aufgabe, wenn man das erste Schaltjahr dieses Jahrhunderts bestimmt, welchem der gegebene

Sonntagszeiger zugehört und welches aus Gleichung (5.) durch die Annahme $\vartheta = b = 0$ leicht gefunden wird; man erhält nemlich

$$(6.)\quad n = 4\left(\frac{3h+4L}{7}\right)_r = 4\left(\frac{3(h-L)}{7}\right)_r = 4\left(\frac{4(L-h)}{7}\right)_r.$$

Sucht man nun dieses gefundene Jahr in dem eben aufgestellten Täfelchen, so haben sofort auch alle anderen mit ihm in derselben Vertical-Reihe stehenden Jahre den nemlichen Sonntagszeiger.

Beispiele. *a*) In welchen Jahren des laufenden Jahrhunderts hat der Februar des gregorianischen Calenders 5 Sonntage?

Wenn irgend ein Jahr in diesem Monate 5 Sonntage haben soll, so mufs es ein Schaltjahr oder $b = 0$ und $L = 3$ sein. Dann ist (nach II.)

$$N = 100S + 4\left(\frac{3h+5}{7}\right)_r + 28\vartheta.$$

Nimmt man nun $S = 18$, so ist für den gregorianischen Calender $h = 5$, daher auch

$$N = 1824 + 28\vartheta,$$

und die Jahre

$$1824,\ 1852,\ 1880$$

haben die verlangte Eigenschaft.

Anmerk. Von dieser Aufgabe giebt Herr Ritter von Ciccolini in der *Correspondance astronomique vol. 10. pag.* 380. eine andere Auflösung. Hieher gehören auch die *ibid. vol. 10. p.* 448. und *vol. 11. p.* 150. vorgelegten und hiernach leicht zu lösenden Probleme.

b) Die katholische Kirche feiert das Schutzengelfest stets an demjenigen Sonntage, welcher der nächste an dem 1. September ist; man fragt nun: in welchen Jahren unseres Jahrhunderts fällt dieses Fest auf den 1. September selbst?

Der erwähnten Anordnung gemäfs feiert man dieses Fest allgemein

$$\text{den } 28 + \left(\frac{L+5}{7}\right)_R \text{ten August} = \left(\frac{L+5}{7}\right)_R - 3\text{ten September:}$$

es kann folglich nur für $L = 6$ auf den 1. September treffen.

Setzt man sonach in der Gleichung (II.) $L = 6$, $S = 18$ und $h = 5$, so sind alle Jahre welche diese Eigenschaft haben und zu dem gegenwärtigen Jahrhunderte gehören in dem Ausdrucke

$$N = 1800 + 28\vartheta + 4\left(\frac{4+4b}{7}\right)_r + b$$

enthalten, und man findet sowohl nach dieser Gleichung, als auch (weil,

nach Gleich. (6.), $n = 16$ ist) mittelst obiger Tafel die Jahre

1805, 1811, 1816, 1822; 1833, 1839, 1844, 1850;
1861, 1867, 1872, 1878; 1889, 1895;

in welchen das Schutzengelfest mit dem 1. September zusammentrifft.

3. Aufgabe. Wenn man unter Festzahl die Anzahl von Tagen begreift, welche von dem 21. März bis zu dem Ostersonntage verfliefst; so sollen diejenigen Jahre eines gegebenen Jahrhunderts gesucht werden, welche eine bestimmte Festzahl haben.

Erste Auflösungsart. Ist f diese bekannte Festzahl, so bestimme man, indem

für e die Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5 und 6

gesetzt werden, die Gröfse d aus

$$d = (f-1) - e,$$

behalte aber von diesen Werthen des d nur jene, welche positiv und unter 30 sind.

Setzt man nun für das gegebene, nemlich $(S+1)$te Jahrhundert,

$m = 15$ im julianischen und

$$m = \left(\frac{15 + \left(\frac{3S+3}{4}\right)_e - \left(\frac{8S+13}{25}\right)_e}{30}\right)_r$$ im gregorianischen Calender,

so berechne man a aus

$$a = \left(\frac{11m + 19d}{30}\right)_r,$$

tilge jedoch alle jene Werthe, welche die Zahl 18 überschreiten. Mit den annehmbaren Werthen von a erhält man

$$\bar{n} = 19a + \left(\frac{14S+a}{19}\right)_r,$$

wo $a = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ ist und $\bar{n}$ stets kleiner als 100 sein mufs.

Ferner berechne man h aus

$h = \left(\frac{S+3}{7}\right)_r$ im julianischen und

$h = \left(\frac{2\left(\frac{S}{4}\right)_r + 1}{7}\right)_r$ im gregorianischen Calender.

Alsdann ist

$$(n) = 28\Phi + 4\left(\frac{3h+5+4f+4b}{7}\right)_r + b,$$

indem man φ und b gleich 0, 1, 2 und 3 setzt, und (n) die Zahl 99 nicht überschreiten läfst.

Die Zahlen n welche in der Reihe der (n) und $\overline{n}$ erscheinen, geben sodann die gesuchten Jahre aus

$$N = 100\,S + n.$$

Hierbei beachte man jedoch folgende zwei Ausnahmen:

1) Wenn $f = 29$ und m eine der Zahlen 0, 2, 3, 5, 6, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 19, 21, 22, 24, 25, 27, 29 ist, so setze man bei $e = 6$ nebst $d = 22$ auch noch $d = 29$.

2) Falls $f = 28$ ist und m einer der Zahlen 2, 5, 10, 13, 16, 21, 24, 29 gleicht, so nehme man $d = 28$ und $= 21$, bei $e = 6$. Bei denselben Werthen von m und e ist jedoch für $f = 35$ jener von d unmöglich.

Anwendung. *a*) Herr Baron von Zach erzählt in seiner *Correspondance astron. vol.* 10. *pag.* 439., dafs die Kirche des heil. Johann des Täufers zu Lyon bereits seit dem 15ten Jahrhunderte das Privilegium besitze, ein besonderes Jubiläum zu feiern, wenn das Frohnleichnamsfest auf den Tag dieses Heiligen, nemlich auf den 24. Juni fällt. In welchen Jahren unseres Jahrhunderts wird dieses Jubiläum Statt finden?

Das Frohnleichnamsfest fällt jederzeit auf den

$$f + 20\text{sten Mai} = f - 11\text{ten Juni},$$

demnach mufs im vorliegenden Falle $f = 35$ werden; dann erhält man zu

$$e = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,$$
$$d = 34,\ 33,\ 32,\ 31,\ 30,\ 29,\ 28,$$

wovon nur

$$d = 29 \text{ und } 28$$

angenommen werden kann.

Da ferner $S = 18$, folglich auch $m = 23$ ist, so findet man

$$a = 24,\ 5,$$

von welchen nur das zweite anwendbar ist; dieses giebt

$$\overline{n} = 19\alpha + 10, \text{ nemlich}$$
$$\overline{n} = 10,\ 29,\ 48,\ 67,\ \underline{86}.$$

Ferner ist $h = 5$, daher auch

$$(n) = 28\varphi + 4\left(\frac{6+4b}{7}\right)_r + b, \text{ oder}$$

$$(n) = 2,\ 13,\ 19,\ 24;\ 30,\ 41,\ 47,\ 52;\ 58,\ 69,\ 75,\ 80;\ \underline{86},\ 97;$$

demnach $n = 86$, und blofs das Jahr 1886 des neunzehnten Jahrhunderts hat ein solches Jubiläum.

Setzt man diese Rechnung fort, so findet man, dafs in den Jahren 1886, 1943, 2038, 2190, 2258, 2326, 2410 u. s. w. dieses Fest zu Lyon Statt haben könne, oder dann die Festzahl ihren gröfsten Werth erhalten werde.

Diese, nebst zwei verwandten Aufgaben, löset Herr von Ciccolini in der *Correspondance astron. vol.* 10. *pag.* 549., dann *vol.* 11. *pag.* 48. und 144. nach einer andern Methode.

b) Man suche diejenigen Jahre des zwanzigsten Jahrhunderts, in welchen der Fastnachtssonntag (Esto mihi) auf den 1. März fällt.

Dieser Sonntag trifft auf den $f -$ 28sten März, daher mufs für die vorgelegte Frage $f = 29$ sein; ferner ist $S = 19$, daher $m = 24$ und $h = 0$; sonach hat man

$$\begin{aligned}
e &= 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 6,\\
d &= 28,\ 27,\ 26,\ 25,\ 24,\ 23,\ 22,\ 29, \quad \text{(Ausnahme 1.)}\\
a &= 16,\ \not{27},\ 8,\ \not{19},\ 0,\ 11,\ \not{22},\ 5,\\
\bar{n} &= 16,\ .\ \underline{8},\ .\ 19,\ 30,\ .\ 5,\\
&\quad 35,\ .\ 27,\ .\ 38,\ 49,\ .\ 24,\\
&\quad 54,\ .\ 46,\ .\ 57,\ 68,\ .\ 43,\\
&\quad 73,\ .\ 65,\ .\ 76,\ \underline{87},\ .\ 62,\\
&\quad \underline{92},\ .\ 84,\ .\ 95,\ .\ \underline{81}.
\end{aligned}$$

$(n) = 3,\ \underline{8},\ 14,\ 25,\ 31,\ 36,\ 42,\ 53,\ 59,\ \underline{64},\ 70,\ \underline{81},\ \underline{87},\ \underline{92},\ 98,$

daher auch

$$n = 8,\ 81,\ 87,\ 92 \quad \text{und} \quad N = 1908,\ 1981,\ 1987,\ 1992.$$

Zweite Auflösungsart. Einfacher jedoch und interessanter ist folgende Auflösung dieses Problems.

Aus der gegebenen Festzahl f berechne man, indem man $e = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ und 6 annimmt, die Werthe von d aus

$$d = (f - 1) - e,$$

indem man zugleich jene dieser Werthe tilgt, welche negativ oder über 29 sind, und obige zwei Ausnahmen berücksichtiget.

Berechnet man nun gleichfalls a aus

$$a = \left(\frac{11m + 19d}{30}\right)_r$$

und vernachläfsiget diejenigen Werthe von a, welche die Zahl 18 übersteigen, bestimmt ferner g und T aus

$$g = \left(\frac{14S+a}{19}\right)_r \text{ und } T = 4\left(\frac{3h+5+4f+4b}{7}\right)_r + b,$$

indem man

$$b = 0,\ 1,\ 2,\ 3$$

setzt, wobei

$$\left.\begin{aligned} m &= 15 \\ h &= \left(\frac{S+3}{7}\right)_r \end{aligned}\right\} \text{ im julianischen und}$$

$$\left.\begin{aligned} m &= \left(\frac{15+\left(\frac{3S+3}{4}\right)_e-\left(\frac{8S+13}{25}\right)_e}{30}\right)_r \\ h &= \left(\frac{2\left(\frac{S}{4}\right)_r+1}{6}\right)_r \end{aligned}\right\} \text{ im gregorianischen Calender}$$

angenommen wird; so hat man sofort

$$t = \left(\frac{2(T-g)}{19}\right)_r$$

und das gesuchte Jahr

$$N = 100S + (28t + T).$$

Da jedoch t die Zahl 3 nicht überschreiten darf, so kann $T-g$ nur einen der folgenden Werthe annehmen, zu denen der darunter stehende von $28t+T$ gehört, welcher stets kleiner als 100 sein mufs. Es verbindet sich nemlich

nur $T-g = -18,\ -9,\ -8,\ 0,\ 1,\ 10,\ 11,\ 19,\ 20$
mit $28t+T = g+38,\ g+19,\ g+76,\ g,\ g+57,\ g+38,\ g+95,\ g+19,\ g+76.$

Z. B. In welchen Jahren unsers Jahrhunderts fällt Ostern auf den 1. April?

Hier ist

$$S = 18,\quad m = 23,\quad h = 5,$$

ferner mufs $f = 11$ sein, wenn der Ostersonntag mit dem 1. April zusammentreffen soll.

Man hat sonach

$e =$	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,
$d =$	10,	9,	8,	7,	6,	5,	4,
$a =$	~~23~~,	4,	15,	~~26~~,	7,	18,	~~29~~,
$g =$	....,	9,	1,	....,	12,	4,	....,

$$
\begin{array}{rcccccccc}
T = & 4, & 10, & 21, & 27 & & & & \\
T-g = & . & -5, & 3, & . & (-8), & (0), & . \\
 & . & (1), & 9, & . & -2, & 6, & . \\
 & . & 12, & (20), & . & 9, & 17, & . \\
 & . & 18, & 26, & . & 15, & 23, & .
\end{array}
$$

Nun giebt nach dem Obigen

$$
\begin{array}{rcccc}
T-g = & 1, & 20, & -8, & 0, \\
28t+T = & g+57, & g+76, & g+76, & g,
\end{array}
$$

folglich, wegen

$$
\begin{array}{rcccc}
g = & 9, & 1, & 12, & 4, \\
28t+T = & 66, & 77, & 88, & 4,
\end{array}
$$

und die Jahre

$$N = 1804,\quad 1866,\quad 1877,\quad 1888$$

haben die geforderte Eigenheit.

Die Gründe, auf welche sich dieses Verfahren, so wie mehreres hier blofs Berührte stützt, werde ich dem mathematischen Publico eigens im Zusammenhange vorzulegen die Ehre haben, sobald alles hiezu Nöthige vorbereitet sein wird.

33.
Auflösungen der Aufgabe No. 19. S. 99. im ersten Hefte des zweiten Bandes dieses Journals.

Aufgabe. Aus dem Cardanischen Ausdrucke der Wurzeln der Gleichungen vom dritten Grade, oder demjenigen durch trigonometrische Linien, die Wurzeln der Gleichung $a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$ für den Fall herzuleiten, wenn $a_0=0$ ist.

I. Solution par Mr. Victor Bouniakowsky de St. Petersbourg, docteur ès sciences mathématiques de l'académie royale de Paris.

On sait que l'équation

$$1.\quad a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$$

peut être mise sous la forme

$$y^3+py+q=0$$

en faisant $x=y-\frac{1}{3}.\frac{a_1}{a_0}$, les valeurs de p et de q étant fonctions des coëfficiens a_0, a_1, a_2, a_3 savoir

$$p=\frac{a_2}{a_0}-\tfrac{1}{3}.\frac{a_1^2}{a_0^2};\quad q=\tfrac{2}{27}.\frac{a_1^3}{a_0^3}-\tfrac{1}{3}.\frac{a_1.a_2}{a_0^2}+\frac{a_3}{a_0},$$

et les trois valeurs de y, que l'on obtient suivant la règle de Cardan, seront

$$y=-\sqrt[3]{\left[\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\left(\tfrac{1}{4}q^2+\frac{p^3}{27}\right)}\right]}-\sqrt[3]{[\tfrac{1}{2}q-\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2+\tfrac{1}{27}p^3)}]},$$

$$y=\frac{1+\sqrt{-3}}{2}.\sqrt[3]{[\tfrac{1}{2}q+\sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3)}]}+\frac{1-\sqrt{-3}}{2}.\sqrt[3]{[\tfrac{1}{2}q-\sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3)}]},$$

$$y=\frac{1-\sqrt{-3}}{2}.\sqrt[3]{[\tfrac{1}{2}q+\sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3)}]}+\frac{1+\sqrt{-3}}{2}.\sqrt[3]{[\tfrac{1}{2}q-\sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3)}]}.$$

Actuellement il est facile de voir que les trois valeurs de x de l'équation (1.) seront les suivantes:

$$2.\quad \begin{cases} x=\dfrac{-\frac{1}{3}a_1-\sqrt[3]{(A+\sqrt{B})}-\sqrt[3]{(A-\sqrt{B})}}{a_0}, \\ x=\dfrac{-\frac{1}{3}a_1+\frac{1+\sqrt{-3}}{2}.\sqrt[3]{(A+\sqrt{B})}+\frac{1-\sqrt{-3}}{2}.\sqrt[3]{(A-\sqrt{B})}}{a_0}, \\ x=\dfrac{-\frac{1}{3}a_1+\frac{1-\sqrt{-3}}{2}.\sqrt[3]{(A+\sqrt{B})}+\frac{1+\sqrt{-3}}{2}.\sqrt[3]{(A-\sqrt{B})}}{a_0}, \end{cases}$$

après avoir posé, pour abréger

$$A = \tfrac{1}{27}\,a_1^3 - \tfrac{1}{6}\,.\,a_1 a_2 a_0 + \tfrac{1}{2}\,.\,a_3 a_0^2$$

et

$$B = \left(\tfrac{1}{27}\,a_1^3 - \tfrac{1}{6}\,.\,a_1 a_2 a_0 + \tfrac{1}{2}\,a_3 a_0^2\right)^2 + \left(\frac{a_2 \,.\, a_9}{3} - \tfrac{1}{9}\,.\,a_1^2\right)^3.$$

Si à présent l'on fait $a_0 = 0$, on obtiendra l'équation

$$3. \quad a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0,$$

et il s'agit de trouver au moyen des expressions (2.) les racines de cette dernière équation. Donc il faudra dans les expression (2.) supposer $a_0 = 0$. Cette supposition réduit premièrement A et B aux valeurs suivantes

$$A = \tfrac{1}{27}\,.\,a_1^3; \quad \text{et} \quad B = 0,$$

et par suite, les trois valeurs de x, en vertu des formules (2.) seront:

$$4. \quad \begin{cases} x = \dfrac{-\frac{1}{3}a_1 - \frac{1}{3}a_1 - \frac{1}{3}a_1}{0} = -\dfrac{a_1}{0}, \\ x = \dfrac{-\frac{1}{3}a_1 + \frac{1+\sqrt{-3}}{2}\,.\,\frac{1}{3}a_1 + \frac{1-\sqrt{-3}}{2}\,.\,\frac{1}{3}a_1}{0} = \frac{0}{0}, \\ x = \dfrac{-\frac{1}{3}a_1 + \frac{1-\sqrt{-3}}{2}\,.\,\frac{1}{3}a_1 + \frac{1+\sqrt{-3}}{2}\,.\,\frac{1}{3}a_1}{0} = \frac{0}{0}. \end{cases}$$

La première de ces valeurs est indifferente relativement à l'équation du second degré (3.). Elle se rapporte évidemment à l'équation (1.) mise sous la forme

$$x^3 + \frac{a_1}{a_0}x^2 + \frac{a_2}{a_0}x + \frac{a_3}{a_0} = 0.$$

En effet, substituant à la place de x cette première valeur, et faisant dans cette équation $a_0 = 0$, on obtient

$$-\frac{a_1^3}{0^3} + \frac{a_1^3}{0^3} + \frac{a_2 a_1}{0^2} + \frac{a_3}{0} = 0.$$

Or les deux derniers termes étant des quantités infiniment grandes d'un ordre inférieur aux deux premiers termes, ils doivent être rejetés, et il ne restera que

$$-\frac{a_1^3}{0^3} + \frac{a_1^3}{0^3} = 0.$$

Cela est exact en effet.

Pour ce qui est relatif aux deux dernières valeurs de x des expressions (4.), nous allons voir comment on peut en déduire les expressions des deux racines de l'équation (3.).

En effet, puisque les deux dernières valeurs de x des équations (2.) se réduisent à la valeur indéterminée $\frac{0}{0}$; il est clair que pour trouver la veritable valeur de ces expressions, on pourra appliquer la règle que

prescrit le calcul différentiel; c'est-à-dire, diviser la différentielle du numerateur par la différentielle du dénominateur, prenant a_0 pour variable. D'après cela les deux valeurs de x seront representées par

$$x = \tfrac{1}{3}.\frac{1+\sqrt{-3}}{2}.(A+\sqrt{B})^{-\frac{2}{3}}\left(\frac{\partial A}{\partial a_0}+\frac{\left(\frac{\partial B}{\partial a_0}\right)}{2\sqrt{B}}\right)$$
$$+\tfrac{1}{3}.\frac{1-\sqrt{-3}}{2}.(A-\sqrt{B})^{-\frac{2}{3}}\left(\frac{\partial A}{\partial a_0}-\frac{\left(\frac{\partial B}{\partial a_0}\right)}{2\sqrt{B}}\right),$$
$$x = \tfrac{1}{3}.\frac{1-\sqrt{-3}}{2}.(A+\sqrt{B})^{-\frac{2}{3}}\left(\frac{\partial A}{\partial a_0}+\frac{\left(\frac{\partial B}{\partial a_0}\right)}{2\sqrt{B}}\right)$$
$$+\tfrac{1}{3}.\frac{1+\sqrt{-3}}{2}.(A-\sqrt{B})^{-\frac{2}{3}}\left(\frac{\partial A}{\partial a_0}-\frac{\left(\frac{\partial B}{\partial a_0}\right)}{2\sqrt{B}}\right).$$

Or l'on a

$$\frac{\partial A}{\partial a_0} = -\tfrac{1}{6}.a_1.a_2+a_3.a_0;$$

5. $$\frac{\partial B}{\partial a_0} = 2\left(\tfrac{1}{27}.a_1^3-\tfrac{1}{6}.a_1a_2a_0+\tfrac{1}{2}a_3a_0^2\right)\left(-\tfrac{1}{6}.a_1a_2+a_3a_0\right)+a_2\left(\frac{a_2a_0}{3}-\frac{a_1^2}{9}\right)^2;$$

et en supposant $a_0 = 0$, les valeurs de A, de B et de $\frac{\partial A}{\partial a_0}$, $\frac{\partial B}{\partial a_0}$ se réduiront à

$$A = \tfrac{1}{27}.a_1^3;\quad B = 0;\quad \frac{\partial A}{\partial a_0} = -\tfrac{1}{6}.a_1a_2;\quad \frac{\partial B_9}{\partial a_0} = 0.$$

Donc, en conservant pour un moment $\frac{\partial A}{\partial a_0}$, on aura

6. $$\begin{cases} x = \tfrac{1}{3}.\dfrac{1+\sqrt{-3}}{2}.\dfrac{9}{a_1^2}\left(\dfrac{\partial A}{\partial a_0}+\dfrac{\left(\frac{\partial B}{\partial a_0}\right)}{2\sqrt{B}}\right)+\tfrac{1}{3}.\dfrac{1-\sqrt{-3}}{2}.\dfrac{9}{a_1^2}\left(\dfrac{\partial A}{\partial a_0}-\dfrac{\left(\frac{\partial B}{\partial a_0}\right)}{2\sqrt{B}}\right) \\ \qquad = \dfrac{3}{a_1^2}\left\{\dfrac{\partial A}{\partial a_0}+\dfrac{\left(\frac{\partial B}{\partial a_0}\right)}{2\sqrt{B}}.\sqrt{-3}\right\}, \\ x = \tfrac{1}{3}.\dfrac{1-\sqrt{-3}}{2}.\dfrac{9}{a_1^2}\left(\dfrac{\partial A_0}{\partial a_0}+\dfrac{\left(\frac{\partial B}{\partial a_0}\right)}{2\sqrt{B}}\right)+\tfrac{1}{3}.\dfrac{1+\sqrt{-3}}{2}.\dfrac{9}{a_1^2}\left(\dfrac{\partial A}{\partial a_0}-\dfrac{\left(\frac{\partial B}{\partial a_0}\right)}{2\sqrt{B}}\right) \\ \qquad = \dfrac{3}{a_1^2}\left\{\dfrac{\partial A}{\partial a_0}-\dfrac{\left(\frac{\partial B}{\partial a_0}\right)}{2\sqrt{B}}.\sqrt{-3}\right\}. \end{cases}$$

Remarquons qu'une partie de ces valeurs de x est encore indéterminée, puisque la valeur de la fraction $\frac{\left(\frac{\partial B}{\partial a_0}\right)}{2\sqrt{B}}$ devient $\frac{0}{0}$ pour $a_0 = 0$, car l'on a $\frac{\partial B}{\partial a_0} = 0$ et $B = 0$. Donc il faudra employer de nouveau la règle prescrite

par le calcul différentiel pour chercher sa valeur. Cela donne

$$\frac{\left(\frac{\partial B}{\partial a_0}\right)}{2\sqrt{B}} = \frac{\partial\left(\frac{\partial B}{\partial a_0}\right)}{2\,\partial.\sqrt{B}} = \frac{\left(\frac{\partial^2 B}{\partial a_0^2}\right)}{\frac{\left(\frac{\partial B}{\partial a_0}\right)}{\sqrt{B}}}.$$

Or cette seconde valeur de la fraction est indéterminée, comme celle de la première, puisque pour $a_0 = 0$, l'on a $B = 0$ et $\frac{\partial B}{\partial a_0} = 0$. Il en serait de même si l'on continuait la différentiation. Donc il paroit au premier abord, que l'on ne puisse rien conclure sur la véritable valeur de la fraction que nous examinons; mais un artifice fort simple nous donnnera cette valeur immédiatement. Pour cela il n'y a qu'à resoudre la dernière équation par rapport à $\frac{\left(\frac{\partial B}{\partial a_0}\right)}{2\sqrt{B}}$. Cette équation donne immédiatement

$$\tfrac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{\partial B}{\partial a_0}\right)}{\sqrt{B}}\right\}^2 = \frac{\partial^2 B}{\partial a_0^2},$$

d'où l'on conclut

$$\frac{\left(\frac{\partial B}{\partial a_0}\right)}{2\sqrt{B}} = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 B}{\partial a_0^2}\right)}.$$

Telle est la valeur finale de la fraction qu'il s'agissait de déterminer. Pour ce qui regarde la valeur de $\frac{\partial^2 B}{\partial a_0^2}$, il est facile de la trouver: il n'y a qu'à différentier encore une fois l'équation (5.) savoir:

$$\frac{\partial^2 B}{\partial a_0^2} = 2a_3\left(\tfrac{1}{27}a_1^3 - \tfrac{1}{6}a_1a_2 + \tfrac{1}{3}a_3a_0^2\right) + 2\left(a_3a_0 - \tfrac{1}{6}a_1a_2\right)^2 + \tfrac{2}{3}a_2^2\left(\tfrac{1}{3}a_2a_0 - \frac{a_1^2}{9}\right)$$

et faire $a_0 = 0$; ce qui réduira la valeur de $\frac{\partial^2 B}{\partial a_0^2}$ à

$$\frac{\partial^2 B}{\partial a_0^2} = \tfrac{2}{27}\cdot a_3a_1^3 + \tfrac{1}{18}a_1^2a_2^2 - \tfrac{2}{27}a_2^2a_1^2 = \tfrac{2}{27}\cdot a_3a_1^3 - \tfrac{1}{2\cdot 27}\cdot a_2^2a_1^2,$$

et par suite

$$\frac{\left(\frac{\partial B}{\partial a_0}\right)}{2\sqrt{B}} = \sqrt{\left(\frac{a_3a_1^3}{27} - \frac{1}{4\cdot 27}\cdot a_2^2a_1^2\right)}.$$

Substituant cette valeur de $\frac{\left(\frac{\partial B}{\partial a_0}\right)}{2\sqrt{B}}$, et celle de $\frac{\partial A}{\partial a_0}$, c'est-à-dire $-\frac{1}{6}\cdot a_1a_2$ dans les expressions (6.) des deux racines de l'équation

$$a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0,$$

on trouvera

$$x = \frac{3}{a_1^2}\left\{-\tfrac{1}{6}a_1a_2 + \sqrt{\left(\frac{a_3a_1^3}{27} - \frac{1}{4.27}a_2^2a_1^2\right)}.\sqrt{-3}\right\} = -\tfrac{1}{2}.\frac{a_2}{a_1} + \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}.\frac{a_2^2}{a_1^2} - \frac{a_3}{a_1}\right)},$$

$$x = \frac{3}{a_1^2}\left\{-\tfrac{1}{6}a_1a_2 - \sqrt{\left(\frac{a_3a_1^3}{27} - \frac{1}{4.27}a_2^2a_1^2\right)}.\sqrt{-3}\right\} = -\tfrac{1}{2}.\frac{a_2}{a_1} - \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}.\frac{a_2^2}{a_1^2} - \frac{a_3}{a_1}\right)},$$

valeurs, qui, comme l'on sait, sont en effet les racines de l'équation du second degré:

$$a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0.$$

II. Auflösung von einem Ungenannten, mitgetheilt von Herrn Professor Dr. Lehmus zu Berlin.

Aus der Gleichung

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

folgt, wenn man $z - \frac{b}{3a}$ für x schreibt:

$$z^3 + \frac{3ac - b^2}{3a^2}.z + \frac{2b^3 - 9abc + 27a^3d}{27a^3} = 0;$$

oder, $\frac{3ac-b^2}{3a^2} = p$ und $\frac{2b^3-9abc+27a^2d}{27a^3} = q$ gesetzt:

$$z^3 + pz + q = 0.$$

Wird nun z durch $u - \frac{\frac{1}{3}p}{u}$ ausgedrückt, so erhält man

$$u^3 = -\tfrac{1}{2}q \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3)};$$

folglich

$$z = \frac{3u^2 - p}{3u}$$

und

$$x = z - \frac{b}{3a} = \frac{3au^2 - pa - bu}{3au},$$

und es ist die Frage, welchen Werth $x = F(a) = \frac{3au^2-pa-bu}{3au}$ für $a = 0$ annimmt, d. h. wie grofs $F(0)$ ist.

Um sie zu beantworten, setze man die Werthe für p und q in den Ausdruck für u^3, so erhält man

$$u^3 = \frac{-b^3 + \frac{9}{2}bca - \frac{27}{2}da^2 \pm 3a\sqrt{[3b^2(bd - \frac{1}{4}c^2) + 3c(c^2 - \frac{9}{2}bd)a + \frac{81}{4}d^2a^2]}}{27a^3},$$

oder, $\frac{9}{2}bc$ durch A; $\frac{27}{2}d$ durch B; $3b^2(bd - \frac{1}{4}c^2)$ durch P; $3c(c^2 - \frac{9}{2}bd)$ durch Q und $\frac{81}{4}d^2$ durch R bezeichnet:

$$u^3 = \frac{-b^3 + A.a - Ba^2 \pm 3a\sqrt{(P + Qa + Ra^2)}}{27a^3};$$

also, wenn der Zähler dieses Ausdrucks $= v^3$ gesetztwird:

$$u = \frac{v}{3a};$$

worinnen

$$v^3 = -b^3 + Aa - Ba^2 \pm 3a\sqrt{(P + Qa + Ra^2)} \text{ ist.}$$

Substituirt man nun $\frac{v}{3a}$ für u und $\frac{3ac - b^2}{3a^2}$ für p in

$$x = Fa = \frac{3au^2 - pa - bu}{3au},$$

so entsteht

$$x = \frac{v^2 - bv - 3ac + b^2}{3av}.$$

Für $a = 0$ wird aber $v^3 = -b^3$; und hieraus entspringen 3 Werthe für v:

1. $v = -1.b,$
2. $v = \frac{1 + \sqrt{-3}}{2}.b,$
3. $v = \frac{1 - \sqrt{-3}}{2}.b.$

ad 1. Für den ersten Werth von v wird der Zähler

$$v^2 - bv - 3ac + b^2$$

des Werths von x gleich

$$b^2 + b^2 - 3.0.c + b^2 = 3b^2,$$

der Nenner aber $= 0$; folglich

$$x = \frac{3b^2}{0} = \infty.$$

Dieses Resultat erklärt sich leicht folgendergestalt:

Aus der Gleichung

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

entspringt

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0,$$

und es ist also $-\frac{d}{a}$ das Product der 3 Wurzeln derselben. Für $a = 0$ wird aber dieses Product unendlich grofs, also mufs nothwendig wenigstens eine dieser 3 Wurzeln unendlich grofs sein, wenn $a = 0$ ist.

ad 2. Für den zweiten Werth von v, nemlich für $v = \frac{1 + \sqrt{-3}}{2}$, wird der Zähler

$$v^2 - bv - 3ac + b^2$$

des Werths von x gleich

$$\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}.b^2 - \frac{1 + \sqrt{-3}}{2}b^2 - 3.0.c + b^2 = 0;$$

der Nenner auch $= 0$, also $x = \frac{0}{0} =$ unbestimmt. Um den wahren Werth zu finden, entspringt auf dem gewöhnlichen Wege:

$$x = \frac{2v.\frac{\partial v}{\partial a} - b\frac{\partial v}{\partial a} - 3c}{3a.\frac{\partial v}{\partial a} + 3v} \text{ für } a = 0.$$

Es ist aber aus $v^3 = -b^3 + Aa - Ba^2 \pm 3a.\sqrt{(P + Qa + Ra^2)}$:

$$3v^2.\frac{\partial v}{\partial a} = A - 2Ba \pm 3a.\frac{Q + 2Ra}{2\sqrt{(P + Qa + Ra^2)}} \pm 3\sqrt{(P + Qa + Ra^2)},$$

also, für $a = 0$,

$$3.\left(\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right)^2 b^2.\frac{\partial v}{\partial a} = A \pm 3\sqrt{P} = \tfrac{9}{2}bc \pm 3.\sqrt{[3b^2(bd - \tfrac{1}{4}c^2)]};$$

folglich, für $a = 0$:

$$\frac{\partial v}{\partial a} = \frac{3c \pm \sqrt{(12bd - 3c^2)}}{b(-1+\sqrt{-3})},$$

und demnach, für $a = 0$:

$$x = \frac{(2v-b).\frac{3c \pm \sqrt{(12bd - 3c^2)}}{b(-1+\sqrt{-3})} - 3c}{3.v}$$

$$= \frac{b\sqrt{-3}.\frac{3c \pm \sqrt{(12bd - 3c^2)}}{b(-1+\sqrt{-3})} - 3c}{3.\frac{1+\sqrt{-3}}{2}.b}$$

$$= \frac{3c \pm \sqrt{(9c^2 - 36bd)}}{-6b} = -\frac{c}{2b} \pm \sqrt{\left(\frac{c^2}{4b^2} - \frac{d}{b}\right)}.$$

ad 3. Für den 3ten Werth von v erhält man eben so

$$x = -\frac{c}{2b} \pm \sqrt{\left(\frac{c^2}{4b^2} - \frac{d}{b}\right)};$$

welches wirklich die beiden Wurzeln der Gleichung $bx^2 + cx + d = 0$ oder $x^2 + \frac{c}{b}x + \frac{d}{b} = 0$ sind.

34.
Mémoire sur l'impossibilité de quelques équations indéterminées du cinquième degré.

(Par Mr. *Lejeune Dirichlet*, professeur en mathématiques.)

Lu a l'académie royale des sciences (institut de France), le 11. Juillet 1825, par l'auteur.

(D'après le rapport de MM. Lacroix et Legendre, ce mémoire a été approuvé, et doit être imprimé dans le recueil des mémoires de savans étrangers *).)

On sait que la théorie des équations indéterminées des degrés supérieurs au second, est encore très peu avancée; il est vrai qu'il y a une infinité d'équations de tous les degrés dont on peut démontrer l'impossibilité en faisant voir que quelles que soient les valeurs que l'on attribue aux indéterminées, les deux membres de l'équation proposée ne peuvent jamais donner le même reste lorsqu'on les divise par un certain nombre ou module; mais lorsqu'une équation ne peut pas être traitée par ce moyen, il devient difficile de prouver qu'elle est impossible, et on n'y est parvenu, jusqu'à présent, que pour un très petit nombre d'équations. Toutes ces équations sont très particulières, et d'une forme telle, que lorsqu'on cherche à les résoudre, on est naturellement conduit à une ou plusieurs formules quadratiques qu'il s'agit d'égaler à des puissances parfaites. On satisfait ensuite de la manière la plus générale à cette condition, en exprimant les indéterminées par d'autres indéterminées, dont les premières deviennent des fonctions entières, et il se trouve, du moins dans tous les cas où la méthode dont il est question réussit, que les nouvelles indéterminées ou d'autres quantités qui en dépendent d'une manière très simple, satisfont également à une équation semblable à l'équation proposée. Comme les nouvelles indéterminées sont en même temps plus petites que les indéterminées primitives, l'impossibilité de l'équation proposée se trouve établie; car il est évident que si elle était possible, on aurait le moyen d'obtenir une suite décroissante et indéfinie de nombres entiers, ce qui implique contradiction. C'est de cette manière que Fermat et Euler ont prouvé l'impossibilité de plusieurs équations du troisième et du quatrième degré.

---

*) Ce mémoire n'a pas encore été publié jusqu'ici. (Note d. red.)

En essayant d'appliquer des considérations semblables à quelques équations du cinquième degré et d'une forme analogue à celles des équations traitées par Fermat et Euler, on est arrêté tout aussitôt. La formule quadratique à laquelle on arrive, et qu'il faut égaler à une cinquième puissance, admet plusieurs solutions différentes, et parmi ces solutions, il n'y en a qu'une seule qui conduise à une équation semblable à l'équation proposée. En réfléchissant à cette difficulté, j'ai reconnu qu'elle pouvait être levée très simplement en assujettissant à quelques conditions le nombre déterminé qui entre dans l'équation. Il résulte d'un théorème exposé dans les préliminaires, que lorsque ces conditions se trouvent remplies, les différentes solutions dont la formule quadratique est susceptible, en général, doivent être rejetées, à l'exception d'une seule, qui est précisément celle de laquelle on déduit des nombres qui satisfont à une équation semblable à l'équation proposée. On parvient ainsi à établir l'impossibilité d'une classe assez étendue d'équations indéterminées du cinquième degré. Le premier membre de ces équations est la somme ou la différence de deux cinquièmes puissances, et le second membre est le produit d'une cinquième puissance et d'un nombre déterminé assujetti à différentes conditions. En attribuant à ce nombre des valeurs particulières compatibles avec ces conditions, on peut obtenir autant de théorèmes particuliers que l'on veut. Cette généralité de nos théorèmes est d'autant plus singulière, que les équations analogues du troisième et du quatrième degré, dont l'impossibilité a été démontrée jusqu'à présent, ne sont qu'en nombre fini et même très petit.

Théorème I.

„Soit l un nombre premier impair non-diviseur du nombre a et supposons que l'on ait $\delta^2 - a\varepsilon^2 = l$ (1.); on satisfera, comme on sait, à l'équation $d^2 - ae^2 = l^n$ (2.) par les nombres d et e que donne la formule $(\delta + \varepsilon\sqrt{a})^n = d + e\sqrt{a}$ (3.), lorsqu'on y égale les parties rationnelles et les coëfficiens de $\sqrt{a}$; je dis de plus que les nombres d et e ainsi obtenus seront premiers entre eux*)."

*) Si le nombre l, au lieu d'être premier, était un nombre impair quelconque et que les nombres δ et $a\varepsilon$ fussent premiers entre eux, les nombres d et ae seraient également premiers entre eux, comme il est facile de s'en assurer par un raisonnement parfaitement semblable à celui dont nous faisons usage dans le texte.

Il est evident, par l'équation (2.), que si les nombres d et e avaient un diviseur commun, ce ne pourrait être que le nombre l ou une puissance de ce nombre. Il suffira donc de faire voir que d n'est pas divisible par l. La formule (3.) donne cette valeur de d:

$$d = \delta^n + \frac{n(n-1)}{1.2} a\,\delta^{n-2}\varepsilon^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} a^2\delta^{n-4}\varepsilon^4 + \text{etc.}$$

D'un autre coté on conclut de l'équation (1.), en se servant du signe employé par M. Gaufs

$$\delta^2 \equiv a\varepsilon^2,\quad \delta^4 \equiv a^2\varepsilon^4,\quad \delta^6 \equiv a^3\varepsilon^6,\quad \ldots\ldots \pmod{l},$$

et en multipliant respectivement par δ^{n-2}, δ^{n-4}, ...

$$\delta^n \equiv a\,\delta^{n-2}\varepsilon^2,\quad \delta^n \equiv a^2\delta^{n-4}\varepsilon^4,\quad \ldots\ldots \pmod{l}.$$

En combinant ces congruences avec l'équation qui donne d, on aura

$$d \equiv \delta^n\left(1 + \frac{n(n-1)}{1.2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} + \text{etc.}\right),$$

ou ce qui est la même chose, la quantité entre les crochets étant le développement de $\frac{1}{2}[(1+1)^n + (1-1)^n]$ et parconséquent égale à 2^{n-1},

$$d \equiv 2^{n-1}\delta^n \pmod{l}.$$

Il est maintenant facile de voir que d n'est pas divisible par l, car il faudrait pour cela que δ fut divisible par l; mais la seule inspection de l'équation (1.) montre que cela est impossible, δ et ε étant évidemment premiers entre eux et a non divisible par l.

Théorème II.

„La lettre l désignant un nombre premier impair non-diviseur de a, si l'on suppose que l'on ait $d^2 - ae^2 = l^n$ (4.), $d'^2 - ae'^2 = l^n$ (5.), les nombres d et e; d' et e' étant premiers entre eux, je dis que l'on pourra trouver deux nombres t et u satisfaisant a l'équation $t^2 - au^2 = 1$ (6.) et en outre tels que l'on ait $(d' \pm e'\sqrt{a})(t \pm u\sqrt{a}) = d + e\sqrt{a}$ (7.), les signes étant convenablement choisis et les parties rationnelles et les coëfficiens de $\sqrt{a}$ égalés separément."

Les équations (4.) et (5.) donnent immediatement

$$d^2 \equiv ae^2,\quad d'^2 \equiv ae'^2,\quad \pmod{l^n},$$

on conclut de la en multipliant membre par membre:

$$d^2d'^2 \equiv a^2e^2e'^2 \pmod{l^n},$$

et en transposant

$$d^2d'^2 - a^2e^2e'^2 \equiv (dd' + aee')(dd' - aee') \equiv 0 \pmod{l^n}.$$

On voit par cette congruence qu'un des nombres $dd' + aee'$, $dd' - aee'$ est divisible par l^n ou qu'ils sont l'un et l'autre divisibles par l *).

Mais il est facile de voir que ce dernier cas est impossible; en effet, si ces nombres étoient tous les deux divisibles par l, leur somme $2dd'$ le serait également; il faudrait donc, dans ce cas, qu'un des nombres d, d' fut divisible par l; mais on s'assurera facilement que cela ne saurait être, en ayant égard aux suppositions faites dans l'énoncé du théorème. L'expression $\frac{dd' \pm aee'}{l^n}$ avec le signe convenable sera donc un entier. Nous ferons, pour plus de simplicité, $i = \pm 1$, i étant choisi de manière a rendre entière l'expression précédente.

Si l'on multiplie membre par membre les équations (4.) et (5.), on aura celle-ci

$$(dd' \pm aee')^2 - a(d'e \pm de')^2 = e^{2n},$$

dans laquelle on peut prendre à volonté les signes superieurs ou les signes inferieurs. On a donc aussi

$$(dd' + iaee')^2 - a(d'e + ide')^2 = l^{2n}.$$

Le nombre $dd' + iaee'$ étant divisible par l^n, et a n'étant pas divisible par l, on voit, par l'équation précédente, que $d'e + ide'$ est également divisible par l^n. Cela posé, je dis qu'on aura

$$t = \frac{dd' + iaee'}{l^n}, \quad u = \frac{i'(d'e + ide')}{l^n},$$

i' étant 1, ou -1 selon que la quantité entre les paranthèses est positive ou négative. En effet, on aura en divisant les deux nombres de l'équation donnée plus haut par l^{2n},

$$\left(\frac{dd' + iaee'}{l^n}\right)^2 - a\left(\frac{d'e + ide'}{l^n}\right)^2 = 1,$$

ou ce qui est la même chose, $t^2 - au^2 = 1$, et on s'assurera facilement par la substitution que les valeurs précédentes de t et u satisfont aussi a l'équation (7.), en y déterminant les signes de cette manière

$$(d' - ie'\sqrt{a})(t + i'u\sqrt{a}) = d + e\sqrt{a}.$$

Remarque. Comme il est évident qu'on peut changer simultanément les signes de e', u, e dans l'équation

$$(d' \pm e'\sqrt{a})(t \pm u\sqrt{a}) = d + e\sqrt{a},$$

---

*) Dans le cas de $n = 1$, la première hypothèse est comprise dans la seconde et a parconséquent necessairement lieu; mais le même raisonnement prouverait toujours l'impossibilité de la seconde.

on voit que l'on peut poser

$$(d' \pm e' \sqrt{a})(t \pm u \sqrt{a}) = (d \pm e \sqrt{a}),$$

le signe de e étant a volonté et les signes de e' et u étant convenablement choisis.

Théorème III.

„La lettre l désignant un nombre premier impair non-diviseur de a et k un nombre impair qui n'a pas de diviseur commun avec a et qui n'est pas divisible par l, si nous supposons que l'on ait ces deux équations $D^2 - aE^2 = l^n k$, $d^2 - ae^2 = l^n$, et que les nombres D et E; d et e soient premiers entre eux, je dis que l'on pourra trouver deux nombres D' et E', premiers entre eux, satisfaisant à l'équation $D'^2 - 5E'^2 = k$, et en outre tels que l'on ait

$$(D' \pm E' \sqrt{a})(d \pm e \sqrt{a}) = D + E \sqrt{a},$$

les signes étant convenablement choisis et les parties rationnelles et les coëfficiens de $\sqrt{a}$ étant égalés separément."

La demonstration de ce théorème est tellement semblable à celle du théorème II. que nous nous dispenserons de la développer ici.

Il y a ici une remarque semblable à faire et l'on voit très facilement que l'on peut poser

$$(D' \pm E' \sqrt{a})(d \pm e \sqrt{a}) = D \pm E \sqrt{a},$$

le signe de E étant à volonté et les signes de E' et e étant convenablement choisis.

Les théorèmes que nous venons d'établir et qui peuvent être utiles dans plusieurs occasions, vont nous servir maintenant à établir une proposition relative à la manière de rendre le binome $P^2 - 5Q^2$, dans lequel P et Q sont des nombres indeterminés soumis à la restriction d'être premiers entre eux, égal à une cinquième puissance. Cette proposition consiste en ce que, pour égaler le binome $P^2 - 5Q^2$ de la manière la plus générale à une cinquième puissance impaire et non-divisible par 5, on n'a qu'à poser

$$P + Q\sqrt{5} = (M \pm N\sqrt{5})^5 (t \pm u\sqrt{5}),$$

M et N étant de nouvelles indeterminées soumises à la seule restriction d'être premières entre elles, l'une paire, l'autre impaire et la première de plus non-divisible par 5; et les lettres t et u désignant la solution générale de l'équation $t^2 - 5u^2 = 1$; ce qui veut dire que toutes les fois que P et Q étant premiers entre eux, le binome $P^2 - 5Q^2$ est une cin-

quième puissance impaire non-divisible par 5, il existe des nombres M et N premiers entre eux et tels qu'on ait

$$P+Q\sqrt{5} = (M\pm N\sqrt{5})^5(t\pm u\sqrt{5}),$$

t et u satisfaisant à l'équation $t^2-5u^2=1$.

Pour nous assurer de la verité de cette proposition, posons $P^2-5Q^2=L$, L désignant une cinquième puissance impaire, non-divisible par 5 et voyons ce qui en resulte sur la nature des nombres P et Q. Désignons par l l'un quelconque des diviseurs premiers de L et soit l^{5n} la puissance la plus élevée de l, qui divise L, de sorte qu'en faisant $L=l^{5n}L'$, L' soit premier à l. Il résulte d'un théorème connu, que le nombre l qui divise P^2-5Q^2 sera lui même de la forme $\delta^2-5\varepsilon^2$. Si nous posons maintenant

$$(\delta+\varepsilon\sqrt{5})^n = d+e\sqrt{5}, \quad (\delta+\varepsilon\sqrt{5})^{5n} = D+E\sqrt{5},$$

d et e, D et E seront premiers entre eux en vertu du théorème I., et l'on aura l'équation

$$(d+e\sqrt{5})^5 = D+E\sqrt{5}.$$

Si l'on applique ensuite le théorème III. aux équations

$$D^2-5E^2 = l^{5n}, \quad P^2-5Q^2 = l^{5n}L',$$

qui se déduisent immédiatement de ce qui précède, on verra qu'il existe des nombres P' et Q', premiers entre eux et tels qu'on ait

$$P'^2-5Q'^2 = L', \quad P+Q\sqrt{5} = (D\pm E\sqrt{5})(P'\pm Q'\sqrt{5}),$$

ou ce qui revient au même en remplaçant $D+E\sqrt{5}$ par $(d+e\sqrt{5})^5$,

$$P+Q\sqrt{5} = (d\pm e\sqrt{5})^5(P'\pm Q'\sqrt{5}).$$

L'équation $P'^2-5Q'^2=L'$ à laquelle nous venons de parvenir, est entièrement analogue à l'équation $P^2-5Q^2=L$, car le nombre L' que l'on obtient en divisant L par l^{5n} est une cinquième puissance, comme L. Supposons pour un instant que la proposition que nous cherchons à démontrer soit vraie pour l'équation $P'^2-5Q'^2=L'$, et voyons comment on pourrait en conclure qu'elle a également lieu pour le binome P^2-5Q^2. Dans la supposition que nous venons de faire, il existe des nombres M' et N' tels qu'on ait

$$P+Q\sqrt{5} = (M'\pm N'\sqrt{5})^5(t\pm u\sqrt{5}).$$

En mettant cette valeur de $P'+Q'\sqrt{5}$ dans l'équation obtenue plus haut et dont le premier membre renferme $P+Q\sqrt{5}$, il viendra celle-ci:

$$P+Q\sqrt{5} = (M'\pm N'\sqrt{5})^5(d\pm e\sqrt{5})^5(t\pm u\sqrt{5}),$$

dans laquelle les signes dépendent de ceux qui se trouvent dans les deux

équations dont la combinaison l'a produite. Si nous posons maintenant

$$(M' \pm N'\sqrt{5})(d \pm e\sqrt{5}) = M \pm N\sqrt{5},$$

le signe de N étant $+$ ou $-$, selon que le coëfficient de $\sqrt{5}$, dans la valeur développée du premier nombre est positif ou négatif, l'équation précedente se changera en celle-ci:

$$P + Q\sqrt{5} = (M \pm N\sqrt{5})^5 (t \pm u\sqrt{5}),$$

qui est conforme à l'énoncé de la proposition dont nous nous occupons.

Ayant ainsi fait voir que la proposition en question et vraie pour le binome $P^2 - 5Q^2$ égal à la cinquième puissance L, si elle est supposée avoir lieu pour le binome $P'^2 - 5Q'^2$, égal à la cinquième puissance L', qui a un diviseur premier de moins que L, il ne reste, pour rendre la démonstration complète, qu'à prouver la vérité de notre proposition pour le cas où le binome $P^2 - 5Q^2$ est une cinquième puissance qui n'a qu'un seul diviseur premier l. Or, c'est ce qu'il est très facile de faire en s'appuyant sur le théorème II. En effet, dans le cas que nous venons d'énoncer, on a $P^2 - 5Q^2 = l^{5n}$; d'un autre coté, le nombre l pouvant être mis sous la forme $\delta^2 - 5\varepsilon^2$, si l'on fait

$$(\delta + \varepsilon\sqrt{5})^n = M + N\sqrt{5}, \quad (\delta + \varepsilon\sqrt{5})^{5n} = D + E\sqrt{5},$$

l'on aura aussi

$$D + E\sqrt{5} = (M + N\sqrt{5})^5, \quad D^2 - 5E^2 = l^{5n},$$

D et E étant premiers entre eux en vertu du théorème I. Cela posé, il resulte immédiatement de l'application du théorème II. aux équations

$$P^2 - 5Q^2 = l^{5n}, \quad D^2 - 5E^2 = l^{5n},$$

qu'on a la relation

$$P + Q\sqrt{5} = (D \pm E\sqrt{5})(t \pm u\sqrt{5}),$$

t et u satisfaisant à l'équation $t^2 - 5u^2 = 1$ et les signes étant convenablement choisis; ou, ce qui revient au même, en mettant $(M \pm N\sqrt{5})^5$ à la place de $D \pm E\sqrt{5}$,

$$P + Q\sqrt{5} = (M \pm N\sqrt{5})^5 (t \pm u\sqrt{5})$$

résultat conforme à l'énoncé de notre proposition. Il est ainsi prouvé que toutes les fois que $P^2 - 5Q^2$ est une cinquième puissance impaire, il existe des nombres M et N qui satisfont à la formule précédente. Quant à l'inverse de cette proposition, savoir qu'en attribuant dans la formule précédente à M et N des valeurs soumises aux seules restrictions déja plusieurs fois énoncées, on obtiendra des nombres P et Q premiers entre eux et tels que $P^2 - 5Q^2$ soit une cinquième puissance; la démonstra-

tion en est tellement simple qu'il est inutule de nous y arrêter. — Au moyen de ce qui précède il sera facile d'établir le théorème que nous allons énoncer et qui servira de base aux propositions qui font l'objet principal de ce mémoire.

Théorème IV.

„Les nombres P et Q devant être premiers entre eux, l'un pair, l'autre impair, et le dernier devant être de plus divisible par 5, je dis que pour égaler le binome P^2-5Q^2 de la manière la plus générale à une cinquième puissance, il suffira de poser

$$P+Q\sqrt{5} = (\varphi+\psi\sqrt{5})^5.$$

Les indéterminées φ et ψ étant premières entre elles, l'une paire, l'autre impaire, et la première de plus non-divisible par 5 *)."

Pour égaler P^2-5Q^2 à une cinquième puissance, nous poserons, d'après ce qui vient d'être dit,

$$P+Q\sqrt{5} = (M\pm N\sqrt{5})^5(t\pm u\sqrt{5}).$$

M n'étant pas divisible par 5, si nous faisons pour un instant

$$(M+N\sqrt{5})^5 = M'+N'\sqrt{5},$$

il sera facile de voir que N' est divisible par 5, et que M' ne l'est pas. En substituant l'expression précédente dans la valeur de $P+Q\sqrt{5}$, on aura

$$P+Q\sqrt{5} = (M'\pm N'\sqrt{5})(t\pm u\sqrt{5}),$$

d'où l'on tire

$$Q = \pm M'u \pm N't.$$

N' étant divisible par 5, et M' ne l'étant pas, il est évident que Q ne pourra être divisible par 5, qu'autant que u le sera. Les valeurs les plus petites qui satisfassent à l'équation

$$t^2-5u^2 = 1,$$

sont celles-ci,

$$t = 9, \quad u = 4.$$

Les valeurs générales seront par conséquent données par cette formule,

$$t+u\sqrt{5} = (9+4\sqrt{5})^p,$$

dans laquelle p est un nombre entier, positif quelconque **); on tire de là

$$u = \frac{p}{1}9^{p-1}.4 + \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}9^{p-3}.4^3.5 + \text{ etc.}$$

---

*) Il n'est peut-être pas inutile de faire remarquer qu'il y a des théorèmes analogues pour beaucoup d'autres nombres premiers, et que pour les établir, on peut faire usage des mêmes considérations dont nous nous servons ici.

**) Voyez les Additions à l'Algèbre d'Euler (art. 75.).

Tous les termes de cette valeur, à partir du second, étant divisibles par 5, quel que soit p, on voit que pour que u puisse être divisible par 5, il faut que le premier terme, et par conséquent aussi p, soit divisible par 5. Si nous faisons donc $p = 5p'$, p' étant un entier, et qne nous substituions la valeur de $t + u\sqrt{5}$ dans celle de $P + Q\sqrt{5}$, nous aurons

$$P + Q\sqrt{5} = (M \pm N\sqrt{5})^5 (9 \pm 4\sqrt{5})^{5p'},$$

résultat qui, par l'introduction des nouvelles indéterminées, φ et ψ qui sont telles que

$$(M \pm N\sqrt{5})(9 \pm 4\sqrt{5})^{p'} = \varphi + \psi\sqrt{5},$$

se change en celui-ci,

$$P + Q\sqrt{5} = (\varphi + \psi\sqrt{5})^5.$$

La forme de la solution donnée par l'énoncé du théorème se trouvant ainsi justifiée, il ne reste plus qu'à déterminer la nature des indéterminées.

Comme on a

$$P^2 - 5Q^2 = (\varphi^2 - 5\psi^2)^5,$$

et que les nombres P et Q sont respect. divisibles par φ et ψ, on voit facilement que les indéterminées φ et ψ, doivent être supposées premières entre elles, l'une paire, l'autre impaire, et la première de plus non-divisible par 5. On peut même ajouter que φ ou ψ sera impaire selon que P et Q l'est. Réciproquement, si les indéterminées φ et ψ satisfont aux conditions précédentes, les nombres P et Q déterminés par la formule

$$P + Q\sqrt{5} = (\varphi + \psi\sqrt{5})^5,$$

seront premiers entre eux, comme il est facile de s'en assurer. Ces préliminaires établis, nous pourrons nous occuper des théorèmes qui font l'objet principal de ce Mémoire. Le premier de ces théorèmes peut s'énoncer de la manière suivante.

Théorème V.

„Les nombres m et n étant positifs, plus grands que zéro, et le second de plus différent de 2, et le nombre B n'étant divisible ni par 2 ni par 5, ni par aucun nombre premier de la forme $10k + 1$, il sera impossible de trouver deux nombres x et y premiers entre eux, tels que $x^5 \pm y^5 = 2^m 5^n A z^5$ (α)."

Supposons, contre l'énoncé du théorème, que l'équation soit possible. Comme le second membre est pair (m ayant été supposé > 0), il faut

que les nombres x et y, qui sont premiers entre eux, soient impairs l'un et l'autre. Si nous faisons $x \pm y = 2p$, $x \pm y = 2q$, et par suite

$$x = p + q, \quad \pm y = p - q,$$

les nombres p et q seront entiers, premiers entre eux, et de plus l'un pair, l'autre impair. En substituant les valeurs précédentes de x et $\pm y$ dans l'équation (α), on la changera en celle-ci:

$$2p(p^4 + 10p^2q^2 + 5q^4) = 2^m 5^n A z^5.$$

Le premier membre ne peut être égal au second membre, qui est divisible par 5, qu'autant qu'on suppose p divisible par 5. Faisant donc $p = 5r$, nous aurons

$$2.5^2 r(q^4 + 2.5^2 q^2 r^2 + 5^3 r^4) = 2^m 5^n A z^5.$$

Le nombre n est par hypothèse égal à l'unité ou plus grand que 2. Si n est égal à l'unité, il faudra, dans l'équation précédente, supposer z divisible par 5. On pourra, dans ce cas, mettre $5z$ à la place de z, ou, ce qui est la même chose, donner à 5 l'exposant 6, doù l'on voit que l'on peut supposer dans tous les cas, $n > 2$. Si l'on met maintenant l'équation précédente sous cette forme,

$$r(q^4 + 2.5^2 q^2 r^2 + 5^3 r^4) = 2^{m-1} 5^{n-2} A z^5,$$

et qu'on se rappelle que les nombres q et $p = 5r$, sont premiers entre eux, et de plus, l'un pair, l'autre impair, il sera facile de voir que le facteur trinome est impair, non-divisible par 5, et premier à r; il faut donc que r soit divisible par 5, n étant > 2. Choisissons actuellement deux nombres positifs, μ et ν, tels que *) $m + \mu - 1$, $n + \nu - 2$, soient divisibles par 5, et un nombre B qui n'ait d'autres diviseurs premiers que le nombre A, et tel que le produit AB soit une cinquième puissance. Si nous multiplions l'équation précédente par $2^\mu 5^\nu B$, nous aurons celle-ci:

$$2^\mu 5^\nu B r(q^4 + 2.5^2 q^2 r^2 + 5^3 r^4) = 2^{m+\mu-1} 5^{n+\nu-2} AB z^5.$$

Le second membre de cette équation étant une cinquième puissance, le premier membre en sera pareillement une. Or, je dis que les deux facteurs dans lesquels ce premier membre peut se décomposer, le facteur $2^\mu 5^\nu B r$ et le facteur trinome, sont premiers entre eux. En effet, nous avons déjà vu plus haut que le facteur trinome est premier à $2^\mu 5^\nu r$, et il résulte d'un autre coté des théorèmes connus d'Euler sur la forme linéaire des diviseurs premiers de la formule $x^n \pm y^n$ (*Théorie des nom-*

*) Si $m - 1$ était divisible par 5, on choisirait pour μ une autre valeur que zéro pour éviter les exposans négatifs dans ce qui va suivre.

bres, no. 156.) que le facteur trinome, dans lequel q et r n'ont pas de diviseur commun, n'est divisible que par des nombres premiers de la forme $10k+1$, qui d'après les suppositions faites dans l'énoncé du théorème ne convient à aucun des diviseurs de A, et par conséquent aussi de B, B n'ayant pas d'autres diviseurs premiers que A. Il faut donc que le nombre $2^\mu 5^\nu Br$ et le facteur trinome soient de cinquièmes puissances l'un et l'autre.

Le facteur trinome pouvant s'écrire de cette manière,

$$(q^2+5^2r^2)^2-5(10r^2)^2,$$

et les nombres $q^2+5^2r^2$, $10r^2$ étant premiers entre eux, le premier impair et le second pair et divisible par 5, il suffira, en vertu du théorème I., pour égaler le facteur trinome avec toute la généralité convenable à une cinquième puissance, de poser ces deux équations,

$$q^2+5^2r^2 = t(t^4+2.5^2t^2s^2+5^3s^4),$$
$$10r^2 = 5s(t^4+10t^2s^2+5s^4).$$

Les nombres s et t doivent être supposés premiers entre eux, et de plus le premier pair et le second impair et non-divisible par 5. Il suit de là que s doit être divisible par 5; en effet t n'étant pas divisible par 5, le second nombre de la seconde équation ne peut être divisible par 5^2 qu'autant que s est divisible par 5; mais le premier nombre qui a r^2 pour facteur, est divisible par 5^2; donc s est divisible par 5.

Nous avons vu plus haut que $2^\mu 5^\nu Br$ devait être une cinquième puissance. Le nombre $2^{2\mu}5^{2\nu}B^2r^2$, carré du nombre précédent, devra donc être une puissance du même degré, et même du dixième degré. Or, en multipliant par $2^{2\mu-1}5^{2\nu-1}B^2$ les deux membres de la dernière équation, on aura celle-ci:

$$2^{2\mu}5^{2\nu}B^2r^2 = 2^{2\mu-1}5^{2\nu}B^2s(t^4+10t^2s^2+5s^4).$$

Si donc nous faisons pour abréger, $2\mu-1=g$, $2\nu=h$, $B^2=C$, tout se réduira à faire voir qu'il est impossible de trouver deux nombres s et t premiers entre eux, et dont le premier soit de plus pair et divisible par 5, tels que le produit

$$2^g5^hCs(t^4+10t^2s^2+5s^4) \quad (\beta)$$

soit une cinquième puissance.

En ayant égard à la nature des diviseurs premiers de C, on s'assurera facilement que le facteur 2^g5^hCs et le facteur trinome sont premiers entre eux. Il faudrait donc, pour que le produit (β) pût être une

cinquième puissance, que chacun de ces facteurs en fût pareillement une. Le facteur trinome peut s'écrire de cette manière:

$$(t^2+5s^2)^2-5(2s^2).$$

Comme les nombres t^2+5s^2, $2s^2$ sont évidemment premiers entre eux, et de plus le premier impair et le second pair et divisible par 5, le théorème I. est applicable ici, et l'on pourra poser

$$t^2+5s^2 = t'(t'^4+2.5^2t'^2s'^2+5^3s'^4),$$
$$2s^2 = 5s'(t'^4+10t'^2s'^2+5s'^4).$$

Les nombres s' et t' doivent être supposés premiers entre eux, et de plus le premier pair et le second impair et non-divisible par 5. Comme t' n'est pas divisible par 5, il est évident par la seconde équation, dont le premier membre renferme le facteur s^2, et est par conséquent divisible par 5^2, que s' doit être divisible par 5. Ainsi, les nombres s' et t' sont premiers entre eux, de même que les nombres s et t, et le premier s' est en outre pair et divisible par 5 comme s.

Il est facile encore de voir que s' est plus petit que s; car on conclut immédiatement la dernière équation $5^2s'^5<2s^2$ et par suite $s'<\sqrt[5]{\left(\frac{2s^2}{25}\right)}$.

On a vu plus haut que 2^g5^hCs devait être une cinquième puissance. Le nombre $2^{2g}5^{2h}C^2s^2$, carré du précédent, devra donc être une puissance du même degré. Or, en multipliant les deux membres de la dernière équation par $2^{2g-1}5^{2h}C^2$, on aura

$$2^{2g}5^{2h}C^2s^2 = 2^{2g-1}5^{2h+1}C^2s'(t'^4+10t'^2s'^2+5s'^4),$$

ou ce qui est la même chose en faisant $2g-1=g'$, $2h+1=h'$, $C^2=C'$, dans le second membre,

$$2^{2g}5^{2h}C^2s^2 = 2^{g'}5^{h'}C's'(t'^4+10t'^2s'+5s'^4) \quad (\beta')$$

équation dont les deux membres doivent être des puissances du cinquième degré.

Nous voilà donc arrivés à un produit (β') semblable au produit (β), mais dans lequel le nombre s' est plus petit que le nombre s du produit (β), et ce produit (β') serait une cinquième puissance, si le produit (β) en était une. En traitant le produit (β') comme nous avons traité le produit (β), on arriverait à un troisième produit (β''), dans lequel le nombre s'' serait plus petit que s', et l'on pourrait continuer ce procédé aussi loin que l'on voudrait. Il est facile de voir en outre que quelque

loin que l'on prolonge les séries $s, s', s'', \ldots .; t, t', t'', \ldots .$, on ne pourra jamais rencontrer un terme égal à zéro; car il est évident que si l'on supposait nul un de ces termes, on conclurait en remontant que $s = 0$, cas évident, et qui d'ailleurs est exclu, puisque les nombres s et t ont été supposés premiers entre eux.

Si donc le produit (β) pouvait être une cinquième puissance, on pourrait obtenir, par l'analyse précédente, une suite indéfinie de nombres entiers positifs, dans laquelle chaque terme serait plus petit que le terme précédent, sans qu'aucun des termes ne fût nul; ce qui implique contradiction. On doit conclure de là que le produit (β) ne saurait être une puissance du cinquième degré.

Le théorème V. se trouvant ainsi établi, nous allons donner le moyen d'en déduire un autre plus général. Considérons l'équation

$$x^5 \pm y^5 = 2^m A z^5,$$

dans laquelle nous supposons x et y premiers entre eux, $m > 0$, et A soumis aux mêmes restrictions que dans l'énoncé du théorème V. Soient α, β, γ des nombres positifs moindres que 5, et tels que $x \equiv \alpha$, $\pm y \equiv \beta$, $z \equiv \gamma \pmod 5$ et soit encore H un nombre positif < 25 et tel que $2^m A \equiv H \pmod{25}$. Comme 5 est un nombre premier, on aura

$$x^5 \equiv x, \quad y^5 \equiv y, \quad z^5 \equiv z, \pmod 5.$$

On conclut de là, en ayant égard à l'équation posée plus haut,

$$x \pm y \equiv 2^m A z \pmod 5,$$

et partant

$$\alpha + \beta \equiv H\gamma \pmod 5.$$

Comme α est le reste de x, on pourra poser $x = \alpha + 5k$, k étant un entier; on tire de là, en élevant les deux membres à la cinquième puissance,

$$x^5 = \alpha^5 + 5.\alpha^4(5k) + \frac{5.4}{1.2}\alpha^3(5k)^2 + \text{etc.},$$

on aura donc

$$x^5 \equiv \alpha^5 \pmod{25}.$$

On trouvera de la même manière $\pm y^5 \equiv \beta^5$, $z^5 \equiv \gamma^5 \pmod{25}$, et comme on a aussi $2^m A \equiv H \pmod{25}$, on trouvera, en ayant égard à l'équation citée,

$$\alpha^5 + \beta^5 \equiv H\gamma^5 \pmod{25}.$$

Si maintenant, en substituant dans cette congruence, successivement pour α, β, toutes les combinaisons que l'on peut former avec les

nombres positifs moindres que 5, et pour γ les valeurs correspondantes également moindres que 5, données par la formule

$$\alpha + \beta \equiv H\gamma \pmod 5,$$

on trouve que la congruence $\alpha^5 + \beta^5 \equiv H\gamma^5 \pmod{25}$ ne peut subsister que lorsque γ est nul, on sera assuré que l'équation

$$x^5 \pm y^5 = 2^m A z^5$$

ne peut avoir lieu, à moins qu'on ne suppose z divisible par 5. On pourra donc, dans ce cas, mettre $5z$ à la place de z, ce qui change notre équation en celle-ci:

$$x^5 \pm y^5 = 2^m 5^5 A z^5,$$

qui rentre évidemment dans le théorème II., et par conséquent est impossible. Or, ce cas a lieu toutes les fois que le nombre H est un des huit nombres suivans 3, 4, 9, 12, 13, 16, 21, 22, comme on peut s'en assurer par un calcul très simple. Nous avons donc ainsi ce nouveau théorème:

Théorème VI.

„Le nombres m et A étant soumis aux mêmes restrictions que dans l'énoncé du théorème II., si le nombre $2^m A$, étant divisé par 25, donne un des huit restes suivans, 3, 4, 9, 12, 13, 16, 21, 22, il sera impossible de trouver deux nombres x et y premiers entre eux, tels que l'on ait $x^5 \pm y^5 = 2^m A z^5$."

Pour donner un exemple bien simple, considérons les deux équations: $x^5 \pm y^5 = 4z^5$, $x^5 \pm y^5 = 16z^5$.

Comme dans ces équations on peut, sans nuire à la généralité, supposer les nombres x et y premiers entre eux, il sera facile de voir qu'elles rentrent dans le théorème II. En effet, si l'on fait $A = 1$, et successivement $m = 2$, $m = 4$, on aura respectivement

$$2^m A = 4, \quad 2^m A = 16.$$

Il est donc prouvé que les deux équations précédentes sont impossibles.

Considérons encore l'équation

$$x^5 \pm y^5 = z^5,$$

qui est une de celles que Fermat a assuré être impossibles. Par des considérations semblables à celles qui nous ont servi pour établir le théorème précédent, on peut s'assurer que cette équation ne saurait subsister, à moins qu'une des indéterminées x, y, z, ne soit divisible par 5. Soit z l'indéterminée divisible par 5, car il est évident qu'on peut faire

en sorte qu'une quelconque des indéterminées se trouve toute seule dans un membre. D'un autre côté, si l'on suppose ces indéterminées premières entre elles, l'une d'elles sera paire et les deux autres seront impaires. Si z était paire, on pourrait remplacer cette indéterminée par $2.5.z$, ce qui changerait l'équation précédente en celle-ci:

$$x^5 \pm y^5 = 2^5 5^5 z^5,$$

qui est impossible, puisqu'elle rentre évidemment dans le théorème II. Il ne resterait donc qu'à traiter le cas où l'indéterminée divisible par 5, serait impaire; mais la méthode exposée dans ce Mémoire paraît insuffisante pour ce cas, et je ne vois pas comment on pourrait compléter la démonstration du cas particulier du théorème de Fermat, dont il vient d'être question.

Addition au Mémoire précédent.

Depuis que le Mémoire précédent a été présenté à l'Académie, M. Legendre a publié un second supplément à sa Théorie des Nombres, dans lequel il démontre l'impossibilité de l'équation

$$x^5 \pm y^5 = z^5.$$

Le cas de l'indéterminée divisible en même temps par 2 et par 5, est traité dans cet ouvrage comme dans le Mémoire précédent, et l'auteur prouve ensuite l'impossibisité de l'autre cas au moyen d'une analyse nouvelle. L'objet de cette addition est d'établir deux théorèmes nouveaux sur les équations indeterminées du cinquième degré et qui comprennent, comme cas particulier, le théorème de Fermat pour les cinquièmes puissances. J'y parviens en partant des resultats obtenus dans ce qui précède et en faisant usage d'une analyse qui diffère a plusieurs égards de celle de M. Legendre et entièrement analogue à la methode qui est exposée dans le Mémoire précédent. On a vu que le succès de l'analyse que nous y avons employée, est fondé sur ce que, pour égaler à une cinquième puissance impaire le binome $P^2 - 5Q^2$, dans lequel doit être divisible par 5, il suffit de poser

$$P + Q\sqrt{5} = (\varphi + \psi\sqrt{5})^5,$$

parceque cette circonstance donne lieu à la réproduction continuelle de l'expression que nous avons appelée facteur trinome. En traitant les nouvelles équations qui font l'objet de cette addition on est également

conduit au binome $P^2 - 5Q^2$, Q étant toujours divisible par 5; mais il y a cette difference que les nombres P et Q, qui précédemment étaient l'un pair, l'autre impair, sont ici impairs tous les deux et que le binome $P^2 - 5Q^2$, qui dans l'autre cas devait être une cinquième puissance impaire, doit être égalé ici au quadruple d'une pareille puissance. Or, la formule qui satisfait de la manière la plus générale à cette dernière condition, est susceptible d'être rendue parfaitement semblable à celle qui sert à remplir la première; car j'ai remarqué q'on peut la présenter de cette manière

$$P + Q\sqrt{5} = \frac{(\varphi + \psi\sqrt{5})^5}{16},$$

expression qui ne se distingue du résultat qu'on vient de rappeler qu'en ce que les indeterminées φ et ψ, au lieu d'être l'une paire, l'autre impaire, doivent être impaires toutes les deux. Dès qu'on a fait cette remarque et qu'en traitant les nouvelles équations qui vont nous occuper, on est arrivé au binome qu'il s'agit d'égaler au quadruple d'une cinquième puissance, on voit d'un seul coup d'oeil qu'on doit réussir à prouver l'impossibilité de ces équations, en faisant usage d'un procédé tout à fait analogue à la marche que nous avons suivie dans la démonstration du théorème V. — Nous allons maintenant entrer en matière, en commençant par établir la proposition que nous avons déjà énoncée.

Les nombres P et Q, dont le premier est supposé n'être pas divisible par 5, étant impairs tous les deux, et n'ayant pas de diviseur commun, le nombre $P^2 - 5Q^2$ sera de la forme $8k+4$, et l'on pourra faire

$$P^2 - 5Q^2 = 4L,$$

L étant un nombre impair et non-divisible par 5. Si nous multiplions membre par membre l'équation précédente et celle-ci:

$$3^2 - 5.1^2 = 4,$$

nous aurons

$$(3P \pm 5Q)^2 - 5(P \pm 3Q)^2 = 16L.$$

Comme les nombres P et Q sont impairs tous les deux, il est évident qu'en déterminant convenablement le signe, les expressions

$$\frac{3P \pm 5Q}{4}, \quad \frac{P \pm 3Q}{4},$$

seront entières l'une et l'autre; faisant en conséquence

$$\frac{3P \pm 5Q}{4} = P', \quad \frac{\pm(P \pm 3Q)}{4} = Q',$$

le signe en dehors de la parenthèse étant choisi de manière à donner une valeur positive pour Q', l'équation obtenue plus haut se changera en celle-ci: $P'^2 - 5Q'^2 = L$, et l'on s'assurera facilement que l'on a

$$P + Q\sqrt{5} = (P' \pm Q'\sqrt{5})(3 \pm \sqrt{5}),$$

les signes étant convenablement choisis, et que les nombres P' et Q' sont premiers entre eux, et de plus l'un pair, l'autre impair.

Supposons maintenant que le nombre L doive être une cinquième puissance. On satisfera à cette condition de la manière la plus générale en posant

$$P' + Q'\sqrt{5} = (M \pm N\sqrt{5})^5 (9 \pm 4\sqrt{5})^p.$$

En substituant cette valeur dans la dernière équation, on aura celle-ci:

$$P + Q\sqrt{5} = (M \pm N\sqrt{5})^5 (9 \pm 4\sqrt{5})^p (3 \pm \sqrt{5}),$$

dans laquelle les signes sont indépendans, comme dans les deux équations précédentes. On peut faire $p = 5k \pm r$, k étant entier et positif, et r ayant une de ces trois valeurs, 0, 1, 2; la quantité $(9 \pm 4\sqrt{5})^p$ se décomposera ainsi en ces deux facteurs $(9 \pm 4\sqrt{5})^{5k}$ et $(9 \pm 4\sqrt{5})^{\pm r}$ dont le premier peut être omis parcequ'il rentre dans $(M \pm N\sqrt{5})^5$. Si nous observons de plus qu'en vertu de l'équation

$$9 \pm 4\sqrt{5} = (9 \mp 4\sqrt{5})^{-1},$$

on peut changer dans $(9 \pm 4\sqrt{5})^{\pm r}$ simultanément les signes de r et du radical, nous pouvons supposer le signe de r positif, et l'équation donnée plus haut deviendra

$$P + Q\sqrt{5} = (M \pm N\sqrt{5})^5 (9 \pm 4\sqrt{5})^r (3 \pm \sqrt{5}).$$

L devant toujours être la cinquième puissance d'un nombre impair et non-divisible par 5, déterminons les conditions nécessaires pour que Q soit divisible par 5. Comme le coëfficient de $\sqrt{5}$ dans le développement de $(M \pm N\sqrt{5})^5$ est divisible par 5, et que la partie rationnelle de ce développement ne l'est pas, M n'étant pas divisible par 5, on conclut, comme dans la démonstration du théorème IV., que pour que Q puisse être divisible par 5, il faut que le coëfficient de $\sqrt{5}$, dans la valeur développée de $(9 \pm 4\sqrt{5})^r (3 \pm \sqrt{5})$ le soit.

Or, en substituant pour r successivement les trois valeurs 0, 1, 2, on trouve que cela n'a lieu que dans le cas de $r = 2$, les signes des radicaux dans les deux facteurs $(9 \pm 4\sqrt{5})^r$ et $(3 \pm \sqrt{5})$ étant en même temps opposés. Si l'on fait attention que l'on a

$$\frac{(3 \pm \sqrt{5})^3}{2^3} = 9 \pm 4\sqrt{5} \quad \text{et} \quad 3 \mp \sqrt{5} = \frac{4}{3 \pm \sqrt{5}},$$

l'on trouvera que le produit précédent sera, dans le cas dont il s'agit, équivalent à $\frac{(3\pm\sqrt{5})^5}{2^4}$,

valeur dont la substitution dans l'équation obtenue plus haut, la change en celle-ci:

$$P+Q\sqrt{5}=\frac{(M\pm N\sqrt{5})^5(3\pm\sqrt{5})^5}{2^4}.$$

Les nombres M et N étant l'un pair, l'autre impair, les nombres φ et ψ déterminés par l'équation

$$\varphi+\psi\sqrt{5}=(M\pm N\sqrt{5})(3\pm\sqrt{5})$$

seront impairs l'un et l'autre, et l'on aura

$$P+Q\sqrt{5}=\frac{(\varphi+\psi\sqrt{5})^5}{2^4}$$

et par conséquent

$$P=\varphi\frac{(\varphi^4+2.5^2\varphi^2\psi^2+5^3\psi^4)}{2^4},$$

$$Q=5\psi\frac{(\varphi^4+10\varphi^2\psi^2+5\psi^4)}{2^4}.$$

Pour que P et Q soient premiers entre eux, il faut que φ et ψ n'aient pas de diviseur commun, et que le premier de ces nombres ne soit pas divisible par 5, et réciproquement, si les nombres φ et ψ, dont le premier est supposé ne pas être divisible par 5, n'ont pas de diviseur commun, et sont impairs l'un et l'autre, les nombres P et Q seront entiers et premiers entre eux. En effet, le quart de la quantité $\varphi^4+10\varphi^2\psi^2+5\psi^4$ pouvant se mettre sous la forme

$$\left(\frac{\varphi^2+5\psi^2}{2}\right)^2-5(\psi^2)^2,$$

et cette dernière expression étant évidemment le quadruple d'un nombre impair, on voit que la valeur de Q est entière et impaire; la même chose se prouvera pour la valeur de P, et l'on s'assurera facilement que les nombres P et Q, qui sont impairs tous les deux, n'ont pas de diviseur commun. Nous avons donc ainsi ce théorème:

Théorème VII.

„Les nombres P et Q devant être premiers entre eux, et impairs l'un et l'autre, et le dernier devant être divisible par 5, je dis que pour égaler le binome P^2-5Q^2 au quadruple d'une cinquième puissance avec toute la généralité convenable, il suffira de poser

$$P+Q\sqrt{5}=\frac{(\varphi+\psi\sqrt{5})^5}{2^4},$$

les nombres indéterminés φ et ψ étant premiers entre eux, impairs l'un et l'autre, et le premier de plus non-divisible par 5 *)."

Voici maintenant le premier des théorèmes nouveaux que nous avons annoncés au commencement de cette addition.

Théorème VIII.

„La lettre n désignant un nombre positif autre que 0 et 2, et le nombre A n'étant divisible ni par 2 ni par 5, ni par aucun nombre premier de la forme $10k+1$, il sera impossible de trouver deux nombres x et y premiers entre eux, et tels que

$$x^5 \pm y^5 = 5^n A z^5 \quad (\gamma)."$$

Les nombres x et y peuvent être impairs tous les deux, ou l'un pair et l'autre impair. Dans le premier cas, z sera divisible par 2, et l'on pourra mettre $2z$ à la place de z, ce qui changera l'équation (γ) en celle-ci:

$$x^5 \pm y^5 = 2^5 5^n A z^5,$$

qui est impossible puisqu'elle rentre évidemment dans le théorème V. Reste donc à prouver l'impossibilité du second cas où l'on suppose les nombres x, y, l'un pair, l'autre impair. Si nous faisons

$$x \pm y = p, \quad x \mp y = q,$$

nous aurons

$$2x = p+q, \quad \pm 2y = p-q,$$

et les nombres p et q seront premiers entre eux, et de plus impairs l'un et l'autre. En substituant les valeurs précédentes de $2x$ et $\pm 2y$ dans l'équation (γ), après en avoir multiplié les deux membres par 2^5, on aura

$$p(p^4+10p^2q^2+5q^4) = 2^4 5^n A z^5.$$

Comme p doit évidemment être divisible par 5, nous ferons $p = 5r$, ce qui donnera

$$5^2 r(q^4+2.5^2q^2r^2+5^3r^4) = 2^4 5^n A z^5.$$

Le nombre n est par hypothèse égal à l'unité ou plus grand que 2. Si n est égal à l'unité, il faudra, dans l'équation précédente, supposer z divisible par 5. On pourra donc, dans ce cas, mettre $5z$ à la place de z, ou, ce qui est la même chose, donner à 5 l'exposant 6, d'où l'on voit que l'on peut supposer dans tous les cas que $n > 2$.

Si l'on met l'équation précédente sous cette forme

$$r(q^4+2.5^2q^2r^2+5^3r^4) = 2^4 5^{n-2} A z^5,$$

*) Ce théorème, comme le théorème IV., a ses analogues pour beaucoup d'autres nombres premiers.

et qu'on fasse attention que $n>2$, et que q est premier à $p=5r$, on voit que r doit être supposé divisible par 5.

Choisissons maintenant un nombre positif ν tel que $n+\nu-2$ soit divisible par 5 et un nombre B qui n'ait d'autre diviseur premier que le nombre A et tel que le produit AB soit une cinquième puissance. Multipliant la dernière équation par $5^\nu B$, nous aurons

$$5^\nu Br(q^4+2.5^2q^2r^2+5^3r^4) = 2^4 5^{n+\nu-2} ABz^5.$$

Tous les diviseurs du facteur trinome dans lequel q et r sont premiers entre eux, étant de la forme $10k+1$, il est evident qu'il n'a aucun diviseur commun avec B; il n'est pas moins évident qu'il est aussi premier à $5^\nu r$, et par conséquent à $5^\nu Br$.

Comme le facteur $5^\nu Br$ et le facteur trinome sont premiers entre eux, et que le premier de ces facteurs est impair, il faut en vertu de la dernière équation, dont le second nombre est le produit de 2^4 et de la cinquième puissance d'un nombre impair, que $5^\nu Br$ soit une cinquième puissance, et le facteur trinome une cinquième puissance multipliée par 2^4.

Le quart du facteur trinome devant être le quadruple d'une cinquième puissance, et ce quart pouvant se mettre sous la forme

$$\left(\frac{q^2+5^2r^2}{2}\right)^2 - 5(5r^2)^2,$$

où les nombres $\frac{q^2+5^2r^2}{2}$, $5r^2$, sont évidemment premiers entre eux, impairs l'un et l'autre, et le dernier de plus divisible par 5, il suffira en vertu du théorème établi au commencement de cette addition, pour égaler le quart du facteur trinome au quadruple d'une cinquième puissance, de poser ces deux équations

$$\frac{q^2+5^2r^2}{2} = t\frac{(t^4+2.5^2t^2s^2+5^3s^4)}{2^4},$$

$$5r^2 = 5s\frac{(t^4+10t^2s^2+5s^4)}{2^4},$$

les nombres indéterminés t et s devant être supposés premiers entre eux, impairs l'un et l'autre, et le premier de plus non-divisible par 5. Comme t n'est pas divisible par 5, et que r l'est comme nous l'avons vu ci-dessus, il faut, en vertu de la dernière des équations précédentes, que s soit divisible par 5.

Nous avons vu plus haut que $5^\nu Br$ devait être une cinquième puissance. Le nombre $5^{2\nu}B^2r^2$, carré du précédent, devra donc être une puissance du même degré, et même du dixième degré.

Or, en multipliant par $2^4.5^{2\nu-1}B^2$ les deux membres de la dernière équation, on aura celle-ci:

$$2^4 5^{2\nu} B^2 r^2 = 5^{2\nu} B^2 s(t^4+10t^2s^2+5s^4).$$

Si donc nous faisons pour abréger $2\nu = h$, $B^2 = C$, tout se réduit à faire voir qu'il est impossible de trouver deux nombres t et s premiers entre eux, impairs l'un et l'autre, et dont le dernier s soit de plus divisible par 5, tels que le produit

$$5^h Cs(t^4+10t^2s^2+5s^4) \quad (\delta)$$

soit une cinquième puissance multipliée pas 2^4.

Il est facile de voir que l'expression (δ) ne saurait être le produit de 2^4 et d'une cinquième puissance, à moins que $5^h Cs$ ne soit une cinquième puissance, et le facteur trinome une cinquième puissance multipliée par 2^4.

Le quart du facteur trinome devant être le quadruple d'une cinquième puissance, et ce quart pouvant se mettre sous la forme

$$\left(\frac{t^2+5s^2}{2}\right)^2 - 5(s^2)^2,$$

où les nombres $\frac{t^2+5s^2}{2}$, s^2, sont évidemment premiers entre eux, impairs l'un et l'autre, et le dernier de plus divisible par 5, il suffira, pour égaler le facteur trinome divisé par 4 au quadruple d'une cinquième puissance, de poser ces équations

$$\frac{t^2+5s^2}{2} = t'\frac{(t'^4+2.5^2t'^2s'^2+5^3s'^4}{2^4},$$

$$s^2 = 5s'\frac{(t'^4+10t'^2s'^2+5s'^4)}{2^4},$$

les nombres t' et s' étant supposés premiers entre eux, impairs l'un et l'autre, et le premier t' de plus non-divisible par 5. Comme s est divisible par 5, et que t' ne l'est plus, il faut, d'après la dernière équation, que s' soit aussi divisible par 5. On conclut encore de la dernière équation, que $\frac{2}{1}\frac{5}{6}s'^5 < s^2$ et par suite que s' est beaucoup plus petit que s.

Le nombre $5^h Cs$ devant être une cinquième puissance, $5^{2h}C^2s^2$ carré du nombre précédent, devra être une puissance du même degré, et même du dixième degré. Or, en multipliant par $2^4 5^{2h}C^2$ les deux membres de la dernière équation, on aura celle-ci:

$$2^4 5^{2h} C^2 s^2 = 5^{2h+1} C^2 s'(t'^4+10t'^2s'^2+5s'^4)$$

ou ce qui est la même chose, en faisant $2h+1 = h'$, $C^2 = C'$, dans le second membre,

$$2^4 5^{2h} C^2 s^2 = 5^{h'} C' s' (t'^4 + 10 t'^2 s'^2 + 5 s'^4), \quad (\delta')$$

équation dont les deux membres devront être des cinquièmes puissances multipliées par 2^4.

Le produit (δ') étant parfaitement semblable au produit (δ), et le nombre s' étant beaucoup plus petit que le nombre s, on conclura, comme dans la démonstration du théorème V. du mémoire précédent, que le produit (δ) ne saurait être égal à une cinquième puissance, multipliée par 2^4, et que par conséquent l'équation (γ) ne saurait avoir lieu.

Le théorème de Fermat, pour le cas des cinquièmes puissances, est compris comme cas particulier dans le théorème que nous venons d'établir. En effet, l'équation $x^5 \pm y^5 = z^5$ ne pouvant avoir lieu, à moins qu'une des indéterminées, z par exemple, ne soit divisible par 5, nous pouvons mettre $5z$ à la place de z; ce qui donnera $x^5 \pm y^5 = 5^5 z^5$, équation impossible, puisqu'elle rentre dans le dernier théorème.

Un raisonnement tout-à-fait semblable à celui au moyen duquel nous avons établi le théorème VI., en partant du théorème V., peut servir à déduire du théorème que nous venons de démontrer un nouveau théorème qui peut s'énoncer comme il suit:

Théorème IX.

„Le nombre A étant soumis aux mêmes restrictions que dans l'énoncé du théorème VIII., et ce nombre donnant un des huit restes suivans, 3, 4, 9, 12, 13, 16, 21, 22, lorsqu'il est divisé par 25, il sera impossible de trouver deux nombres x et y premiers entre eux, et tels que l'on ait $x^5 \pm y^5 = Az^5$."

35.

Ueber die Anwendung der elliptischen Transcendenten auf ein bekanntes Problem der Elementargeometrie:

„Die Relation zwischen der Distanz der Mittelpuncte und den Radien zweier Kreise zu finden, von denen der eine einem unregelmäfsigen Polygon eingeschrieben, der andere demselben umgeschrieben ist."

(Von Herrn Prof. Dr. *C. G. J. Jacobi* zu Königsberg in Preufsen.)

1.

Bei einem jeden Dreieck findet bekanntlich eine Gleichung zwischen den Radien des eingeschriebnen und umgeschriebnen Kreises und der Distanz ihrer Mittelpuncte Statt, welche Euler zuerst aufgestellt hat. Weniger bekannt scheint die ähnliche Relation bei einem Viereck zu sein, das zu gleicher Zeit einem Kreise eingeschrieben und einem anderen umgeschrieben werden kann; doch kann sie hier noch leicht auf mannichfachen Wegen gefunden werden; wie denn die Theorie dieser Vierecke häufiger untersucht worden ist. Schwieriger ist das Problem beim Fünfeck und bei den höheren Polygonen, so dafs Herr Steiner, der es gewohnt ist, die bekannten Gränzen hinter sich zu lassen, diese Theorie wesentlich erweitert zu haben schien, indem er im 2ten Bande dieses Journals S. 289., nachdem er zuvor S. 96. desselben Bandes das Problem wieder in Anregung gebracht hatte, noch für das Fünfeck, Sechseck und Achteck die entsprechenden Gleichungen aufstellte. Leider aber hat dieser grofse Geometer nicht die Analysis dieser interessanten Resultate mitgetheilt.

Ehe wir nun aber selbst unsre Weise dieses Problem zu behandeln den Geometern vorlegen, sehen wir uns genöthigt, im Namen des vor Kurzem verstorbenen Russischen Staatsraths Nicolaus Fufs, die von Herrn Steiner gegebenen Resultate in Anspruch zu nehmen; welcher, ohne es zu wollen und ohne es zu wissen, dieselben und noch überdies die Gleichung für das Siebeneck, bei weitem die schwierigste, gefunden hat. Dieser ausgezeichnete Analyst war nämlich in dem leider nicht

häufigen Irrthum, das Problem, das er sich stellte, nur in einem particulären Falle aufgelöset zu haben, während er in der That die allgemeine Lösung gab.

Man liest nemlich in dem 13ten Bande der Petersburger *Nova Acta* eine Abhandlung von diesem Verfasser vom Jahre 1798, welche den Titel führt:

De Polygonis symmetrice irregularibus circulo simul inscriptis et circumscriptis.

S. 166 — 189. Schon im 10ten Bande der *Nova Acta* für das Jahr 1792 hatte Derselbe verschiedene und zum Theil neue Probleme über die Vierecke gelöset, welche zugleich einem Kreise eingeschrieben und umgeschrieben sind, und auch die Relation gegeben, welche zwischen den Radien beider Kreise und der Distanz ihrer Mittelpuncte Statt hat. Er habe seitdem, erzählt er, diese Untersuchungen auf Polygone von mehr als 4 Seiten auszudehnen gesucht; es sei ihm aber nicht gelungen. Denn mit der wachsenden Seitenzahl würden die Fundamentalformeln so verwickelt, dafs man an ihre Entwirrung Oel und Mühe verschwende. Er habe daher das mit den gröfsten Schwierigkeiten behaftete allgemeine Problem verlassen, und wolle sich hier auf solche Polygone beschränken, welche man symmetrisch unregelmäfsige (*symmetrice irregularia*) nennen könne, die nemlich einen Durchmesser haben, der durch beide Centra geht, und das Polygon in zwei gleiche und ähnliche Theile theilt.

Es thut aber diese Beschränkung bei dem Problem, das sich Fufs in seiner Abhandlung stellt, nemlich jene Gleichung zwischen den Radien und der Distanz der Centra zu finden, keinesweges der Allgemeinheit Eintrag. Denn zuerst ist klar, dafs, wenn eine Ecke des Polygons in jenem durch beide Centra gehenden Durchmesser sich befindet, das Polygon auch zu beiden Seiten des Durchmessers symmetrisch liegen wird. Es kann aber immer eine Ecke des Polygons in dem Umfange des Kreises, in welchen es eingeschrieben sein soll, beliebig angenommen werden. Denn Herr J. V. Poncelet hat in seinem berühmten Werke, *Traité des Propriétés projectives des Figures S.* 361. den schönen Satz bewiesen, dafs

„wenn irgend ein Polygon zugleich einem Kegelschnitt eingeschrieben und einem andern umgeschrieben ist, es eine unendliche Menge

ähnlicher giebt, welche diese Eigenschaft in Bezug auf die beiden Curven haben; oder wenn man nach dieser Bedingung von einem beliebigen Anfangspunct aus irgend ein anderes Polygon construiren will, es sich immer von selbst schliefsen wird; und umgekehrt, wenn man, von irgend einem Puncte aus, einem Kegelschnitt ein Polygon einschreiben will, dessen Seiten einen andern berühren, und es sich nicht von selbst schliefst, kein anderes diese Eigenschaft haben wird."

Für unsern Fall sind die Kegelschnitte nur Kreise. Aber auf diesen Fall läfst sich der allgemeinere leicht reduciren, indem man, wie Herr Poncelet an einem andern Orte gezeigt hat, zwei Kegelschnitte, wofern sie nur nicht 4 Puncte gemein haben, immer so perspectivisch projiciren kann, dafs man in der Projection zwei Kreise erhält.

Da also die Annahme, die Fufs gemacht, dafs eine Ecke in dem Durchmesser liege, welcher durch beide Centra geht, der Allgemeinheit nicht schadet, so ist es auch nicht zu verwundern, wenn die Formeln, die er in seinem beschränkten Falle findet, wirklich allgemein sind, und mit den von Herrn Steiner gegebnen übereinkommen. Dieses letzte wollen wir kürzlich im Folgenden zeigen, da es nicht sogleich in die Augen fällt.

2.

Nennt man den Radius des umgeschriebnen Kreises R, des eingeschriebnen r, und die Distanz der beiden Mittelpuncte a, so giebt Herr Steiner für das Fünfeck zwischen R, r, a, die Gleichung:

$$r(R-a) = (R+a)\sqrt{[(R-r+a)(R-r-a)]} + (R+a)\sqrt{[(R-r-a)2R]}.$$

Setzt man mit Fufs $R+a=p$, $R-a=q$, so verwandelt sich diese Gleichung in

$$qr = p\sqrt{[(p-r)(q-r)]} + p\sqrt{[(q-r)(p+q)]}.$$

Fufs findet S. 174 die Gleichung:

$$\frac{ppqq-rr(pp+qq)}{ppqq+rr(pp+qq)} = \pm\sqrt{\left(\frac{q-r}{p+q}\right)}.$$

Er bemerkt, dafs dieser Gleichung die Werthe $r=-p$ und $r=\frac{pq}{p+q}$ Genüge thun, und dafs sich daher die Gleichung, nachdem man das Wurzelzeichen weggeschafft, durch $p+r$ und $pq-r(p+q)$ werde dividiren lassen. Nach diesen Reductionen giebt er die Gleichung:

$$p^3q^3 + ppqqr(p+q) - pqrr(p+q)^2 - r^3(p+q)(p-q)^2 = 0.$$

Wenn man Herrn Steiners Gleichung:

$$qr = p\sqrt{[(p-r)(q-r)]} + p\sqrt{](q-r)(p+q)]}$$

quadrirt, so erhält man:

$$q^2r^2 - p^2(q-r)(2p+q-r) = 2p^2(q-r)\sqrt{[(p-r)(p+q)]}.$$

Wird diese Gleichung wieder quadrirt, so erhält man:

$$q^4r^4 - 2p^2q^2r^2(q-r)(2p+q-r) + p^4(q-r)^2(q+r)^2 = 0.$$

Nun ist:

$$\begin{aligned} 2(q-r)(2p+q-r) &= 2(q-r)^2 + 4p(q-r) \\ &= (q-r)^2 + (q+r)^2 + 4\{pq - r(p+q)\}, \end{aligned}$$

wonach sich die Gleichung so darstellen läfst:

$$q^4r^4 - p^2q^2r^2(q-r)^2 - 4p^2q^2r^2[pq - r(p+q)] + p^2(q+r)^2\{(q-r)^2p^2 - q^2r^2\} = 0.$$

Es ist aber

$$\begin{aligned} q^4r^4 - p^2q^2r^2(q-r)^2 &= -q^2r^2(qr+pq-pr)(pq-pr-rq), \\ (q-r)^2p^2 - q^2r^2 &= [(q-r)p+qr](pq-pr-qr). \end{aligned}$$

Man kann daher, wie bei Fufs, durch $pq - pr - qr$ dividiren, und erhält dann:

$$q^2r^2(pr-qr-pq) - 4p^2q^2r^2 + p^2(q+r)^2(pq+qr-pr) = 0.$$

Entwickelt man nach den Potenzen von r, so erhält man genau die von Fufs gegebene Gleichung. Nach den Potenzen von p geordnet wird sie:

$$p^3(q+r)^2(q-r) + p^2qr(q-r)^2 - pq^2r^2(q-r) - q^3r^3 = 0.$$

Fufs giebt ferner noch die Bedeutung seiner überflüssigen Factoren $p+r$ und $pq-r(p+q)$; und für diesen Fall, wie für die übrigen, numerische Beispiele.

3.

Für das Sechseck findet Herr Steiner:

$$3(R^2-a^2)^4 = 4r^2(R^2+a^2)(R^2-a^2)^2 + 16r^4a^2R^2,$$

welche Gleichung sich, wenn man wieder $R+a=p$, $R-a=q$ setzt, in folgende verwandelt:

$$3p^4q^4 = 2r^2(p^2+q^2)p^2q^2 + r^4(p+q)^2(p-q)^2,$$

welche mit der von Fufs gegebenen (S. 180.) übereinkommt:

$$3p^4q^4 - 2ppqqrr(pp+qq) = r^4(pp-qq)^2.$$

Für das Siebeneck findet Fufs die Gleichung:

$$\begin{aligned} &[pq - r(p-q) - 2rr]\,2pqr\sqrt{[(p-r)(p+q)]} \\ &+ [ppqq - rr(pp+qq)]\,2r\sqrt{[(q-r)(p+q)]} \\ &= \pm[pq - r(p-q)][ppqq + rr(pp-qq)]. \end{aligned}$$

Für das Achteck giebt Fufs die Gleichung:

$$ppr\sqrt{(qq-rr)}+qqr\sqrt{(pp-rr)}=pqrr-pq\sqrt{[(pp-rr)(qq-rr)]}.$$

Quadrirt man diese Gleichung, so resultirt:

$$4p^2q^2r^2\sqrt{[(pp-rr)(qq-rr)]}$$
$$=p^2q^2r^4+p^2q^2(p^2-r^2)(q^2-r^2)-p^4r^2(q^2-r^2)-q^4r^2(p^2-r^2)$$
$$=r^4(p^2+q^2)^2-2r^2p^2q^2(p^2+q^2)+p^4q^4=\{r^2(p^2+q^2)-p^2q^2\}^2.$$

Die Gleichung, rational gemacht, wird also:

$$\{r^2(p^2+q^2)-p^2q^2\}^4=16p^4q^4r^4(p^2-r^2)(q^2-r^2).$$

Aber diese Gleichung scheint nicht mit der sehr verwickelten, welche Herr Steiner giebt, in Uebereinstimmung gebracht werden zu können.

Fufs bemerkt noch, dafs wenn man einen Winkel μ aus dem Winkel ν durch die Gleichung $\cos\nu=-\cot\mu$ bestimmt, man setzen könne:

$$a=\frac{\sin\left(\frac{\mu-\nu}{2}\right)-\sin\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\mu-\nu}{2}\right)+\sin\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)}.R=\frac{-\operatorname{tang}\frac{\nu}{2}}{\operatorname{tang}\frac{\mu}{2}}.R,$$

$$r=\frac{2R\sin\left(\frac{\mu-\nu}{2}\right)\sin\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\mu-\nu}{2}\right)+\sin\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)}=\frac{R\sin\left(\frac{\mu-\nu}{2}\right)\sin\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)}{\sin\frac{\mu}{2}\sin\frac{\nu}{2}},$$

woraus auch

$$p=R+a=\frac{R\sin\left(\frac{\mu-\nu}{2}\right)}{\sin\frac{\mu}{2}\sin\frac{\nu}{2}},$$

$$q=R-a=\frac{R\sin\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)}{\sin\frac{\mu}{2}\sin\frac{\nu}{2}},$$

folgt, welche Formeln durch ihre Eleganz sich empfehlen.

Ich habe diese Formeln anführen wollen, weil es vielleicht Einigen interssant scheinen dürfte, sie mit den Resultaten zu vergleichen, welche sich aus der Theorie der elliptischen Transcendenten ergeben.

4.

Wir wollen jetzt die Fundamentalformeln aufstellen, auf welchen die hier anzustellenden Betrachtungen beruhen. Es seien demnach zwei Kreise gegeben, von denen der eine, mit dem Halbmesser R und Mittelpunct C, den andern mit dem Halbmesser r und Mittelpunct c umschliefsen möge. Die Distanz der Mittelpuncte Cc heifse a. Aus irgend einem Puncte A des Kreises C ziehe man eine Tangente an den Kreis c,

welche den ersten wieder in A' schneidet; auf gleiche Weise ziehe man an den Kreis c die Tangenten $A'A''$, $A''A'''$, $A'''A^{IV}$ u. s. w., wo A, A', A'', A''', A^{IV} u. s. w. in dem gröfsern Kreise C liegen, und $AA'A''A'''\ldots$ ein Stück eines Polygons oder ein ungeschlossenes Polygon ist, das dem Kreise C eingeschrieben, dem Kreise c umgeschrieben ist. Man ziehe den Durchmesser cC, welcher den Kreis C in P schneiden möge, so dafs $CP=R$, $cP=R+a$. Jetzt nenne man die Winkel $ACP=2\varphi$, $A'CP=2\varphi'$, $A''CP=2\varphi''$, $A'''CP=2\varphi'''$, u. s. w., so ist leicht zu sehen, dafs zwischen je zwei Winkeln, die aufeinander folgen, die Gleichungen Statt finden:

$$\begin{aligned} R\cos(\varphi'-\varphi)+a\cos(\varphi'+\varphi) &= r,\\ R\cos(\varphi''-\varphi')+a\cos(\varphi''+\varphi') &= r,\\ R\cos(\varphi'''-\varphi'')+a\cos(\varphi'''+\varphi'') &= r,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \end{aligned}$$

welche Gleichungen man auch so darstellen kann:

$$\begin{aligned} (R+a)\cos\varphi'\cos\varphi+(R-a)\sin\varphi'\sin\varphi &= r,\\ (R+a)\cos\varphi''\cos\varphi'+(R-a)\sin\varphi''\sin\varphi' &= r,\\ (R+a)\cos\varphi'''\cos\varphi''+(R-a)\sin\varphi'''\sin\varphi'' &= r,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \end{aligned}$$

Zieht man jede dieser Gleichungen von der folgenden ab, und bemerkt, dafs immer

$$\frac{\cos x-\cos y}{\sin y-\sin x}=\operatorname{tang}\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

so folgt sogleich:

$$\begin{aligned} \operatorname{tang}\left(\frac{\varphi''+\varphi}{2}\right) &= \frac{R-a}{R+a}\operatorname{tang}\varphi',\\ \operatorname{tang}\left(\frac{\varphi'''+\varphi'}{2}\right) &= \frac{R-a}{R+a}\operatorname{tang}\varphi'',\\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \end{aligned}$$

In dieser Form der Gleichungen springt es sogleich in die Augen, dafs sie mit denjenigen übereinkommen, welche zur Vervielfachung der elliptischen Transcendenten aufgestellt werden.

Setzt man nemlich das elliptische Integral, in dem $\varkappa$ irgend eine Constante bedeutet,

$$\int_0^{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\sqrt{(1-\varkappa\varkappa\sin\varphi^2)}}=u,$$

und setzt nach einer von mir angegebenen Bezeichnung die amplitudo φ

$$\varphi=\operatorname{am}(u);$$

ferner eben so

$$\alpha = \mathrm{am}(t),$$

wo α irgend einen Winkel bedeuten möge,

$$\varphi' = \mathrm{am}(u+t),$$
$$\varphi'' = \mathrm{am}(u+2t),$$

so wird in den Elementen der Theorie der elliptischen Functionen die Gleichung gegeben:

$$\mathrm{tang}\left(\frac{\varphi+\varphi''}{2}\right) = \Delta\,\mathrm{am}(t)\,\mathrm{tang}\,\varphi',$$

wo

$$\Delta\,\mathrm{am}(t) = \sqrt{(1-\varkappa\varkappa\sin\alpha^2)} = \sqrt{[1-\varkappa\varkappa\sin^2\mathrm{am}(t)]}.$$

Bestimmt man also in unserm Falle die Gröfsen $\varkappa$ und t oder α durch die beiden Gleichungen:

$$\frac{R-a}{R+a} = \Delta\,\mathrm{am}(t) = \sqrt{(1-\varkappa\varkappa\sin\alpha^2};\quad \varphi' = \mathrm{am}(u+t),$$

so wird man haben:

$$\varphi = \mathrm{am}(u),$$
$$\varphi' = \mathrm{am}(u+t),$$
$$\varphi'' = \mathrm{am}(u+2t),$$
$$\varphi''' = \mathrm{am}(u+3t),$$
$$\varphi^{\mathrm{IV}} = \mathrm{am}(u+4t),$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

wo $2\varphi'$, $2\varphi''$, $2\varphi'''$, $2\varphi^{\mathrm{IV}}$ durch die §. 4. angegebene Construction gefunden werden.

5.

Wir wollen jetzt die Gröfsen α und $\varkappa$ bestimmen; welches vermittelst der Gleichungen $\varphi = \mathrm{am}(u)$, $\alpha = \mathrm{am}(t)$, $\varphi' = \mathrm{am}(u+t)$, $\Delta\,\mathrm{am}(t) = \sqrt{(1-\varkappa\varkappa\sin\alpha^2)} = \frac{R-a}{R+a}$ geschieht. Die Elemente der Theorie der elliptischen Functionen geben uns die Gleichung:

$$\cos\varphi\cos\varphi' + \sin\varphi\sin\varphi'\sqrt{(1-\varkappa\varkappa\sin\alpha^2)} = \cos\alpha.$$

Nach unseren obigen Formeln ist:

$$\cos\varphi\cos\varphi' + \sin\varphi\sin\varphi'.\frac{R-a}{R+a} = \frac{r}{R+a}.$$

Dieses giebt uns zur Bestimmung von α und $\varkappa$ die beiden Gleichungen:

$$\sqrt{(1-\varkappa\varkappa\sin\alpha^2)} = \frac{R-a}{R+a} \text{ und } \cos\alpha = \frac{r}{R+a},$$

woraus folgt:

$$\varkappa\varkappa = \frac{4Ra}{(R+a)^2-rr},\quad 1-\varkappa\varkappa = \varkappa'\varkappa' = \frac{(R-a)^2-rr}{(R+a)^2-rr}.$$

Ferner hat man

$$R+a=\frac{r}{\cos\alpha},\quad 2R=\frac{r(1+\Delta)}{\cos\alpha},\quad r=\frac{2R\cos\alpha}{1+\Delta},$$
$$R-a=\frac{r\Delta}{\cos\alpha},\quad 2a=\frac{r(1-\Delta)}{\cos\alpha},\quad a=\frac{R(1-\Delta)}{1+\Delta},$$

wo der Kürze halber für $\Delta\,\mathrm{am}(t)$ blofs Δ geschrieben ist.

Diese Formeln geben ein leichtes Mittel, wenn man $\mathrm{am}(u)=\varphi$, und $\mathrm{am}(t)=\alpha$ kennt, daraus $\mathrm{am}(u+mt)$ zu finden, was die Aufgabe der Multiplication der elliptischen Functionen ist, und zwar durch eine Construction der Elementargeometrie. Man beschreibe nemlich aus einem Puncte c mit einem beliebigen Radius r einen Kreis, und aus dem Mittelpuncte C, der um $a=Cc$ von c entfernt ist, einen zweiten Kreis mit dem Radius R, wo a und R durch die Gleichungen

$$a=\frac{r(1-\Delta)}{2\cos\alpha},\quad R=\frac{r(1+\Delta)}{2\cos\alpha}$$

bestimmt werden. Bestimmt man nun den Punct A in der Peripherie des Kreises C, indem man $ACP=2\varphi$ macht (s. §. 4.), und bestimmt die Puncte A', A'', A''', . . ., $A^{(m)}$ durch die §. 4. angegebene Construction, so wird $\frac{A^{(m)}CP}{2}=\varphi^{(m)}=\mathrm{am}(u+mt)$.

Will man blofs $\mathrm{am}(mt)$ bestimmen, so fällt der Punct A mit dem Punct P zusammen. Uebrigens bemerke ich, dafs die Winkel 2φ, $2\varphi'$, $2\varphi''$, $2\varphi'''$, . . . immerfort wachsend angenommen werden, so dafs sie auch 360° überschreiten können.

Diese Construction scheint vor der Construction, die Lagrange mittelst des sphärischen Dreiecks gegeben hat, nicht ohne Vorzüge zu sein.

6.

Es ist ein bemerkenswerther Umstand, dafs die Gröfsen α, a gänzlich von φ oder u unabhängig sind. Wo man daher den Punct A in der Peripherie des Kreises C annimmt, wird immer, wenn man $\frac{ACP}{2}=\varphi=\mathrm{am}(u)$, $\frac{A'CP}{2}=\varphi'=\mathrm{am}(u+t)$ macht, die Linie AA' einen Kreis berühren, dessen Lage und Gröfse durch die Gleichungen $a=R\left(\frac{1-\Delta}{1+\Delta}\right)$, $r=\frac{2R\cos\alpha}{1+\Delta}$ bestimmt werden. Man denkt sich dann nemlich CP als eine feste Linie, von welcher an der Winkel 2φ gezählt wird, und in welcher der Mittelpunct des Kreises c zu liegen kommt. Eben so wird immer, wo man auch A angenommen hat, die

Linie AA'' einen Kreis berühren, dessen Lage und Gröfse durch die Gleichungen $a = R\left(\frac{1-\Delta^{(2)}}{1+\Delta^{(2)}}\right)$, $r = \frac{2R\cos\alpha^{(2)}}{1+\Delta^{(2)}}$ bestimmt werden, wenn man $\alpha^{(2)} = \mathrm{am}(2t)$, $\Delta^{(2)} = \sqrt{(1-\varkappa\varkappa\sin^2\alpha^{(2)})}$ setzt. Und allgemein wird immer, wo man auch den Anfangspunct A angenommen hat, die Linie $AA^{(m)}$, welche das Polygon zuschliefst, einen Kreis berühren, dessen Elemente durch die Gleichungen $a = R\left(\frac{1-\Delta^{(m)}}{1+\Delta^{(m)}}\right)$, $r = \frac{2R\cos\alpha^{(m)}}{1+\Delta^{(m)}}$ gegeben sind, wo $\alpha^{(m)} = \mathrm{am}(mt)$, $\Delta^{(m)} = \sqrt{(1-\varkappa\varkappa\sin^2\alpha^{(m)})}$. Die Mittelpuncte aller dieser Kreise liegen in der festen Linie AP.

Wir wollen jetzt beweisen, dafs diese Kreise ein System bilden, welche dieselbe Linie zum Orte der gleichen Tangenten haben, welche zweckmäfsige Benennung Herr Steiner in seinen geometrischen Arbeiten in diesem Journal eingeführt hat. Es ist dieses bei zwei Kreisen eine gerade Linie, welche auf der Verbindungslinie der Mittelpuncte senkrecht steht, und eben, was ihr Name andeutet, die Eigenschaft hat, dafs wenn man von irgend einem ihrer Puncte die Tangenten an die beiden Kreise legt, diese Tangenten gleich werden. Da wir schon wissen, dafs jene Kreise ihre Mittelpuncte in derselben geraden Linie haben, so brauchen wir blofs zu zeigen, dafs für irgend einen Punct die von ihm aus an alle Kreise gelegten Tangenten gleich sind, indem dieselbe Eigenschaft dann alle Puncte der durch ihn gehenden und auf AP senkrecht stehenden Linie haben werden.

Zu diesem Ende wollen wir den Punct in der Linie AP selbst aufsuchen, welcher diese Eigenschaft in Bezug auf die beiden Kreise C, c hat. Wir wollen D die Distanz dieses Punctes von C nennen, so wird seine Distanz von c, $D-a$. Die Tangente an den ersten Kreis wird $\sqrt{(DD-RR)}$, an den zweiten Kreis $\sqrt{[(D-a)^2-rr]}$. Beides gleich gesetzt giebt

$$DD - RR = (D-a)^2 - rr,$$

oder

$$D = \frac{RR+aa-rr}{2a} = \frac{(R+a)^2-rr}{2a} - R.$$

Oben aber fanden wir

$$\varkappa\varkappa = \frac{4aR}{(R+a)^2-rr},$$

woraus

$$\frac{(R+a)^2-rr}{2a} = \frac{2R}{\varkappa\varkappa},$$

und also:

$$D = \frac{2R}{\varkappa\varkappa} - R.$$

Wir sehen dafs α in dem Ausdruck für D gar nicht vorkommt, sondern dafs es blofs von $\varkappa$ abhängt. Für alle jene Kreise aber ist dieses $\varkappa$ dasselbe, und nur im α unterscheiden sie sich. Hätten wir daher für C und irgend einen anderen Kreis den Ort ihrer gleichen Tangenten gesucht, so hätten wir denselben Ausdruck für D gefunden, so dafs also alle jene Kreise einen gemeinschaftlichen Ort der gleichen Tangenten haben.

Die analytische Bestimmung der Elemente des Kreises, den die Linie $AA^{(m)}$ beständig berührt, während der Punct A sich in der Peripherie des Kreises C bewegt, wäre selbst für kleinere m ein Problem von kaum zu übersteigender Schwierigkeit gewesen, welches auf diese Weise auf die Elemente einer bekannten Theorie zurückgeführt und dadurch in aller Allgemeinheit gelöst ist.

Der specielle Satz, dafs AA'' beständig einen Kreis während seiner Bewegung berührt, läfst sich auch folgendermafsen aussprechen:

„Wenn man einen Winkel in einen Kreis einschreibt, der einem andern zu gleicher Zeit umgeschrieben ist, und man denselben sich unter diesen Bedingungen bewegen läfst, d. h. so, dafs seine Spitze die Peripherie des Kreises durchläuft, während seine Schenkel den anderen Kreis berühren, so wird die Sehne, die er in dem ersten Kreise, in den er eingeschrieben ist, abschneidet, während der Bewegung beständig einen dritten Kreis berühren, welcher mit dem gegebnen denselben Ort der gleichen Tangenten hat."

Diesen Satz giebt Herr Poncelet S. 326. seines angeführten Werks. Durch die oben angedeutete Weise perspectivischer Projection lassen sich diese Sätze auf das System zweier Ellipsen ausdehnen.

7.

Aber Herr Poncelet giebt diesen Sätzen noch eine weit gröfsere Ausdehnung. Wir haben angenommen, dafs die Seiten des Polygons einen und denselben Kreis, oder in der Projection, denselben Kegelschnitt berühren. Poncelet bestimmt nur, dafs sie überhaupt in einer bestimmten Folge gegebene Kegelschnitte berühren, so dafs auch, wenn man will, ein Kegelschnitt mehrere Seiten berühren kann, wo dann gedacht werden kann,

dafs in diesen Kegelschnitt mehrere zusammen fallen. Er unterwirft diese Kegelschnitte blofs der Bedingung, dafs sie alle mit dem Kegelschnitt, in welchen das Polygon eingeschrieben ist, die reellen oder idealen Secanten *) gemeinschaftlich haben. Es giebt demnach folgenden Satz S. 327:

„Wenn man einem Kegelschnitt ein Polygon einschreibt, dessen Seiten, mit Ausnahme einer, andere Kegelschnitte berühren, die mit einander und mit jenem gemeinschaftliche Secanten haben, und man das Polygon unter diesen Bedingungen variiren läfst, so werden die freie Seite und alle Diagonalen sich auf anderen Kegelschnitten wälzen, die mit den gegebenen gemeinschaftliche Secanten haben."

Aber auch diese Verallgemeinerung ergiebt sich leicht aus unseren Betrachtungen für Kreise, worauf man sogleich sie durch Projection auf Kegelschnitte erweitern kann. Ja wir erhalten sogleich unmittelbar wieder den analytischen Ausdruck für die Elemente des gesuchten Kreises in aller Allgemeinheit. Es seien die Kreise, wie sie aufeinander folgen, c, c', c'', c''', . . ., $c^{(m-1)}$, wie oben nach ihren Mittelpuncten benannt, ihre Radien resp. r, r', r'', r''', . . ., $r^{(m-1)}$; die Distanzen ihrer Mittelpuncte von C, $cC = a$, $c'C = a'$, $c''C = a''$, $c'''C = a'''$, . . ., $c^{(m-1)}C = a^{(m-1)}$. Man bestimme ferner die Winkel α, α_1, α_2, α_3, . . ., α_{m-1} durch die Gleichungen:

$$\cos\alpha = \frac{r}{R+a},\quad \cos\alpha_1 = \frac{r'}{R+a'},\quad \cos\alpha_2 = \frac{r''}{R+a''},\ \ldots,\ \cos\alpha_{m-1} = \frac{r^{(m-1)}}{R+a^{(m-1)}},$$

und setze

$$\alpha = \operatorname{am} t,\quad \alpha_1 = \operatorname{am} t',\quad \alpha_2 = \operatorname{am} t'',\ \ldots,\ \alpha_{m-1} = \operatorname{am} t^{(m-1)}.$$

Jetzt ziehe man aus einem beliebigen Puncte A des Kreises C die Tangente AA' an den Kreis c, die Tangente $A'A''$ an den Kreis c', die Tan-

---

*) Herr Poncelet bestimmt eine gemeinschaftliche Secante zweier Kegelschnitte aus folgenden Eigenschaften, welche zugleich zu ihrer allgemeinsten Definition dienen. Man bestimme in ihnen die Durchmesser AB, $A'B'$, welche zu ihrer Richtung conjugirt sind; so müssen sich 1) beide Durchmesser, wenn es nöthig ist, verlängert in demselben Punct O schneiden. Wenn ferner $AB = a$, $A'B' = a'$, und die mit der gegebenen Linie parallelen, diesen conjugirte Durchmesser resp. b, b' sind, so mufs 2) sein $\frac{bb}{aa}\,OA.OB = \frac{b'b'}{a'a'}.OA'.OB'$. Diese Bestimmungen, welche augenscheinlich erfüllt sind, wenn die Linie beide Kegelschnitte wirklich schneidet, behalten ihren Sinn auch wenn sie aufserhalb beider fällt, in welchem Falle sie Poncelet die ideale Secante nennt. Für zwei Kreise, die sich nicht schneiden, ist die ideale gemeinschaftliche Secante der Ort der gleichen Tangenten bei Herrn Steiner.

gente $A''A'''$ an den Kreis c'', u. s. w., die Tangente $A^{(m-1)}A^{(m)}$ an den Kreis $c^{(m-1)}$, wo A, A', A'', . . ., $A^{(m)}$ alle in der Peripherie des Kreises C liegen, und nenne wieder

$$ACP = 2\varphi,\quad A'CP = 2\varphi',\quad A''CP = 2\varphi'',\quad \ldots,\quad A^{(m)}CP = 2\varphi^{(m)},$$

so hat man, wenn $\varphi = \operatorname{am} u$:

$$\varphi' = \operatorname{am}(u+t),\quad \varphi'' = \operatorname{am}(u+t+t'),\quad \varphi''' = \operatorname{am}(u+t+t'+t''),$$
$$\varphi^{(m)} = \operatorname{am}(u+t+t'+\ldots+t^{(m-1)}).$$

Nach §. 6. also wird, wenn man $t+t'+t''+\ldots+t^{(m-1)} = 5$ setzt, die Linie $A^{(m)}A$, welche das Polygon schliefst, während der Drehung einen Kreis berühren, dessen Elemente durch die Gleichungen

$$r_m = \frac{2R\cos\operatorname{am}5}{1+\triangle\operatorname{am}5},$$
$$a_m = \frac{R(1-\triangle\operatorname{am}5)}{1+\triangle\operatorname{am}5},$$

bestimmt sind, wo r_m sein Radius, a_m die Distanz seines Mittelpunctes in der Linie AP von C bedeutet. Die Bedingung, dafs die Kreise einen gemeinschaftlichen Ort der gleichen Tangenten haben, kommt mit der Identität des Moduls überein.

Das Vorhergehende giebt eine Construction der Addition mehrerer elliptischen Functionen, wie wir oben die Construction der Multiplication fanden. Uebrigens erhellt aus unsern Formeln noch der Satz, dafs, in welcher Ordnung auch die Seiten AA', $A'A''$, $A''A'''$ u. s. w. die gegebenen Kreise berühren, der Endpunct $A^{(m)}$ immer derselbe sein wird.

8.

Man bestimme jetzt K durch die Gleichung $\operatorname{am}K = \frac{\pi}{2}$, so hat man bekanntlich $\operatorname{am}(u+2K) = \operatorname{am}(u)+\pi$, und allgemein, wenn i eine ganze Zahl ist, $\operatorname{am}(u+2iK) = i\pi + \operatorname{am}u$. Dieses vorausgeschickt, hätten wir eigentlich, wenn $AA'A''\ldots A^{(m)}A$, i Mal die ganze Peripherie durchmifset, genauer setzen müssen: $5 = 2iK' - (t+t'+t''+\ldots+t^{(m-1)})$. Doch ändert dies die Formeln für a_m und r_m nicht. Reduciren sich alle Kreise c, c', c'', . . ., $c^{(m-1)}$, c_m auf den einen c, so wird für diesen Fall das Polygon ein geschlossenes, dem Kreise c umgeschriebenes und dem Kreise C eingeschriebenes Polygon. Für diesen Fall wird $5 = t = t' = t'' = \ldots = t^{(m-1)}$, wodurch man erhält:

$$(m+1)t = 2iK',\ \text{oder}\ t = \frac{2iK'}{m+1}.$$

Dieses ist der analytische Ausdruck für die Relation, die zwischen der Gröfse und Lage zweier Kreise Statt finden mufs, damit sich dem einen ein $(m+1)$ Eck einschreiben lasse, das dem andern umgeschrieben ist, und i Mal die ganze Peripherie durchmifset. Für diejenigen, welche weniger an die hier gebrauchte Bezeichnung gewöhnt sind, wollen wir sie folgendermafsen als Theorem hinstellen:

Theorem.

„Wenn R und r die Radien zweier Kreise sind, von denen jener einem n Eck umgeschrieben, dieser demselben eingeschrieben ist, die Distanz ihrer Mittelpuncte a heifst, und man die Gröfsen $\varkappa$ und α durch die Gleichungen $\cos\alpha = \frac{r}{R+a}$, $\varkappa\varkappa = \frac{4aR}{(R+a)^2 - rr}$ bestimmt, so ist immer:

$$\int_0^{\alpha} \frac{\partial\varphi}{\sqrt{(1-\varkappa\varkappa\sin\varphi^2)}} = \frac{i}{n}\int_0^{\pi} \frac{\partial\varphi}{\sqrt{(1-\varkappa\varkappa\sin\varphi^2)}},$$

wo i die Zahl der Umläufe des Vielecks durch die ganze Peripherie bedeutet. Diese Gleichung giebt zugleich die zwischen r, R, a statt findende Bedingungsgleichung."

Da die Bedingungsgleichung $t = \frac{2iK}{n}$ von u gänzlich unabhängig ist, so folgt daraus, dafs die Wahl des Anfangspuncts A von keinem Einflufs ist, wie Poncelet in dem zu Anfang angeführten Satz gezeigt hat. Uebrigens kann man immer annehmen, dafs i und n keinen Factor gemein haben, weil sonst das Vieleck in sich zurückkehrt.

So ist die in der Ueberschrift bezeichnete Aufgabe vollständig und in ihrer ganzen Allgemeinheit gelöst.

9.

Es sei $n = 2m$, also das Polygon von einer geraden Seitenanzahl; dann sind A und $A^{(m)}$, A' und $A^{(m+1)}$, A'' und $A^{(m+2)}$, . . ., $A^{(m-1)}$ und $A^{(2m-2)}$ gegenüberstehende Ecken; und $AA^{(m)}$, $A'A^{(m+1)}$, $A''A^{(m+2)}$, u. s. w. die diese verbindenden Diagonalen. Diese werden dem Obigen zufolge einen Kreis berühren, dessen Elemente durch die Gleichungen

$$a = \frac{R[-\Delta\,\mathrm{am}(mt)]}{1+\Delta\,\mathrm{am}(mt)}, \quad r = \frac{2R\cos\mathrm{am}(mt)}{1+\Delta\,\mathrm{am}(mt)}$$

gegeben sind. Aber da $t = \frac{2iK}{2m}$, wo i eine ungerade Zahl ist, wird $mt = iK$, woraus $\mathrm{am}(mt) = \frac{i\pi}{2}$. Es wird daher $r = 0$, $a = R\frac{1-\sqrt{(1-\varkappa\varkappa)}}{1+\sqrt{(1-\varkappa\varkappa)}}$.

Der Kreis reducirt sich daher auf einen Punct, in welchem sich alle jene Diagonalen schneiden, und welcher für alle die unendlichen Vielecke, die sich nach einem verschiedenen Anfangspuncte A unter den gegebnen Bedingungen construiren lassen, derselbe bleibt, da seine Bestimmung, die in der Gleichung $a = R.\frac{1-\sqrt{(1-zz)}}{1+\sqrt{(1-zz)}}$ enthalten ist, von u oder φ gänzlich frei ist. Dieser Punct ist einer der beiden, welche für die Schaar Kreise, welche denselben Ort der gleichen Tangenten haben, eine Art Gränze bilden, und durch welche alle jene Kreise, welche diese Schaar Kreise rechtwinklig schneiden und ihren Mittelpunct in der Linie der gleichen Tangenten haben, gehen müssen. S. die Abhandlung von Herrn Steiner im 1sten Bande dieses Journals S. 161 ff.

Dieser Satz findet sich bei Herrn Poncelet am angef. O. S. 364. auf das System zweier Kegelchnitte erweitert.

Es dürfte nicht ohne Interesse für die Theorie der elliptischen Functionen sein, ähnliche Betrachtungen unmittelbar für das System zweier Kegelschnitte anzustellen. Das Integral dürfte dann in einer complicirteren Form erscheinen, die sich jedoch auf jene einfachere reduciren lassen mufs. Vielleicht nehme ich später Gelegenheit, hierauf wieder zurückzukommen.

Den 1. April 1828.

36.
Démonstrations nouvelles de quelques théorèmes relatifs aux nombres.

(Par Mr. *Lejeune-Dirichlet*, prof. de mathém.)

Parmi les différentes démonstrations que les géomètres ont successivement données du théorème de Wilson, celle que M. Gaufs a exposée dans ses „*Disquisitiones arithmeticae, art. 77.*" et qui est fondée sur la considération des nombres correspondans (*numeri socii*) est sans contredit la plus simple. En généralisant un peu la définition des nombres correspondans et en suivant ensuite une marche analogue à celle de M. Gaufs, on peut démontrer simultanément le théorème de Wilson et deux autres propositions qui sont d'un grand usage dans la théorie des nombres. C'est ce que nous allons faire voir en peu de mots.

La lettre p désignant un nombre premier, Euler qui le premier s'est servi de cette considération, nomme correspondans deux nombres m et n l'un et l'autre moindres que p et tels que leur produit mn donne l'unité pour reste lorsqu'il est divisé par p.

Généralisons cette définition et appelons correspondans deux nombres m et n moindres que p et dont le produit mn donne le même reste qu'un nombre déterminé a que nous supposons n'être pas divisible par p. Cela posé, considérons la suite

$$(1.) \quad 1, 2, 3, \ldots p-1.$$

Il est facile de voir que, si m désigne l'un quelconque des nombres qui composent cette suite, ce nombre m aura son correspondant n et n'en aura qu'un. Cela résulte immédiatement de ce que la congruence $my \equiv a \pmod{p}$ dans laquelle ni m ni a n'est divisible par p, a toujours une racine y moindre que p et n'en a qu'une.

Il peut arriver que n soit égal à m. On a alors $m^2 \equiv a \pmod{p}$, ce qui fait voir que ce cas ne peut avoir lieu qu'autant qu'il existe un quarré donnant le même reste que a, ou, en d'autres termes, qu'autant que a est résidu quadratique par rapport à p. Distinguons actuellement

deux cas selon que a est ou n'est pas résidu quadratique par rapport à p et commençons par le dernier de ces deux cas.

Soit, dans ce cas, m l'un quelconque des nombres (1.) et n son correspondant. On aura $mn \equiv a \pmod{p}$ et n sera différent de m. Après avoir oté les nombres m, n de la suite (1.), il restera $p-3$ nombres. Désignons par m' l'un quelconque de ces $p-3$ nombres restans et par n' son correspondant; n' sera différent de m' et l'on aura $m'n' \equiv a \pmod{p}$. En continuant de procéder ainsi, ou épuisera la suite (1) et l'on formera $\frac{p-1}{2}$ groupes composés chacun de 2 nombres correspondans; car chaque nombre n'ayant qu'un correspondant qui est mis de coté en même temps que lui, on ne peut jamais, pour former un nouveau groupe, avoir besoin d'un des nombres déjà mis de coté.

Le produit de deux nombres composant un groupe donnant le même reste que a, et les groupes étant au nombre de $\frac{p-1}{2}$, on voit que le produit des nombres dont l'ensemble des groupes est formé, c'est-à-dire le produit des nombres compris dans la serie (1.) donne le même reste que le nombre a élevé à la puissance $\frac{p-1}{2}$. On a donc dans le cas que nous venons d'examiner

$$(2.) \quad 1.2.3 \ldots p-1 \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}.$$

Passons au second cas qui a lieu lorsque a est résidu quadratique de p. Il existe dans ce cas un quarré k^2 (dont la racine k peut être supposé $< p$) tel que $k^2 \equiv a \pmod{p}$. Le quarré du nombre $p-k$, qui est également moindre que p, donne aussi le même reste que a lorsqu'il est divisé par p. Les nombres k et $p-k$ étant otés de la suite (1.), il n'y restera aucun nombre x tel que $x^2 \equiv a \pmod{p}$. Car si parmi les nombres restans il y en avait un satisfaisant à cette condition, $x^2 - k^2 = (x+k)(x-k)$ serait divisible par p; il faudrait donc qu'un des facteurs $x+k$, $x-k$ le fut pareillement; or c'est ce qui est manifestement impossible, x étant plus petit que p et différent de k et $p-k$. — Cela posé, on voit comme dans le cas déjà examiné, que les $p-3$ nombres qui restent dans la suite (1.) après en avoir oté k et $p-k$, se correspondent deux à deux, d'où l'on conclut comme précédemment que le produit de ces nombres donne le même reste que $a^{\frac{p-3}{2}}$. Il suit de là que

le produit de tous les nombres qui composent la suite (1.) donne le même reste que $a^{\frac{p-3}{2}} k(p-k)$ et comme, d'après ce qu'on a vu plus haut, on a $k(p-k) \equiv -k^2 \equiv -a \pmod{p}$, il vient ce résultat

$$1.2.3.... \; p-1 \equiv -a^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}.$$

Ce résultat et celui que nous avons obtenu plus haut, peuvent être réunis dans la formule suivante

$$(3.) \quad 1.2.3.... \; p-1 \equiv \mp a^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$$

dans laquelle il faut prendre le signe supérieur ou inférieur, selon que le nombre a que nous supposons n'être pas divisible par p, est ou n'est pas résidu quadratique de p. Si nous posons $a = 1$, le signe supérieur aura lieu, l'unité étant un quarré et parconséquent résidu quadratique de tout nombre. Nous avons donc

$$1.2.3.... \; p-1 \equiv -1 \pmod{p}$$

congruence qui constitue le théorème de Wilson.

Remplaçons le premier membre de la formule (3.) par le nombre -1, qui comme nous venons de le voir, n'en diffère que d'un multiple de p, et changeons ensuite les signes des deux membres; il viendra ainsi

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv \pm 1 \pmod{p}$$

congruence dans laquelle il faudra choisir le signe $+$ ou le signe $-$, selon que a est ou n'est pas résidu quadratique de p. Le théorème que cette formule renferme, et qui a été découvert par Euler, est d'une grande importance dans la théorie des résidus. — On fera disparaitre le double signe dans la dernière congruence en élevant ses deux nombres au quarré. On trouve ainsi

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

ce qui est le théorème de Fermat.

Ce dernier théorème peut être démontré très simplement de la manière suivante, sans qu'il soit nécessaire de rien supposer de ce qui précède.

Les nombres a et p conservant leur signification, considérons les $p-1$ multiples de a que voici:

$$a, \; 2a, \; 3a, \; .... \; (p-1)a.$$

Il est facile de voir que deux de ces nombres ne sauraient donner le même reste quand on les divise par p; car si les restes provenant des

multiples ma et na étaient égaux, $ma - na = (m-n)a$ serait divisible par p, ce qui est impossible, a n'étant pas divisible par p, et $m-n$ étant $< p$ sans pouvoir être zéro. Les restes que l'on obtient en divisant par p les $p-1$ multiples de a, étant tous différens entre eux et aucun de ces restes ne pouvant être nul, comme on le voit facilement, ces restes doivent coïncider avec les nombres de la série $1, 2, 3, \ldots p-1$, quand on fait abstraction de l'ordre dans lequel ils se suivent. Il suit de là que le produit des $p-1$ multiples de a, doit donner le même reste que le produit $1.2.3 \ldots p-1$.

La différence de ces produits est donc un multiple de p. Or cette différence pouvant facilement se mettre sous la forme

$$(a^{p-1}-1)(1.2.3 \ldots p-1)$$

et $1.2.3 \ldots p-1$ n'étant pas divisible par p, on en conclut que $a^{p-1}-1$ est multiple de p, ou, ce qui est les même chose, que a^{p-1} étant divisé par p donne l'unité pour reste.

37.

Sur le nombre des transformations différentes, qu'on peut faire subir à une fonction elliptique par la substitution d'une fonction donné de premier degré.

(Par Mr. *N. H. Abel.*)

Soit pour abréger

$$1.\quad \Delta = (1-x^2)(1-c^2x^2);\quad \Delta^1 = (1-y^2)(1-c^{1^2}y^2)$$

et supposons qu'on satisfasse à l'équation différentielle

$$2.\quad \frac{\partial y}{\Delta^1} = a.\frac{\partial x}{\Delta}$$

en y substituant pour y une fonction rationnelle de x de la forme

$$3.\quad y = \frac{A_0 + A_1 x + \ldots + A_{2n+1}.x^{2n+1}}{B_0 + B_1 x + \ldots + B_{2n+1}.x^{2n+1}},$$

où $2n+1$ est un nombre premier et au moins un des coëfficiens A_{2n+1} et B_{2n+1} est différent de zéro. En supposant, ce qui est permis, la fraction précédente réduite à sa plus simple expression, nous dirons que $\frac{\partial y}{\Delta^1}$ se transforme en $a.\frac{\partial y}{\Delta}$ par la substitution d'une fonction de degré $2n+1$.

Il s'agit maintenant de trouver toutes les valeurs différentes de y qui répondent à la même valeur de $2n+1$. Si l'on fait

$$4.\quad \frac{\omega}{2} = \int_0^1 \frac{\partial x}{\Delta} \text{ et } \frac{\omega_1}{2} = \int_0^{\frac{1}{c}} \frac{\partial x}{\Delta}$$

et qu'on désigne par $\lambda\theta$ une fonction de θ, telle que

$$5.\quad \partial\theta = \frac{\partial x}{\Delta} \text{ pour } x = \lambda\theta,$$

et en outre

$$\lambda(0) = 0,$$

il suit immédiatement de ce qui j'ai dit sur le problème général de la transformation des fonctions elliptiques dans le No. 138. du journal d'astronomie de Mr. Schumacher, qu'on satisfera de la manière la plus générale à l'équation $\frac{\partial y}{\Delta^1} = a.\frac{\partial x}{\Delta}$ dans le cas où $B_{2n+1} = 0$, en prenant

$$5.\quad \begin{cases} y = a.\dfrac{x\left(1-\frac{x^2}{\lambda^2\alpha}\right)\left(1-\frac{x^2}{\lambda^2 2\alpha}\right)\ldots\left(1-\frac{x^2}{\lambda^2 n\alpha}\right)}{(1-c^2\lambda^2\alpha.x^2)(1-c^2\lambda^2(2\alpha).x^2)\ldots(1-c^2\lambda^2(n\alpha).x^2)}, \\ c^1 = c^{2n+1}.\left\{\lambda\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right).\lambda\left(\frac{\omega}{2}+2\alpha\right)\ldots\lambda\left(\frac{\omega}{2}+n\alpha\right)\right\}^4, \\ a = \frac{c^{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{c^1}}.(\lambda\alpha.\lambda(2\alpha)\ldots\ldots\lambda(n\alpha))^2, \end{cases}$$

où α est une quantité de la forme

$$6.\quad \alpha = \frac{m\omega + m^1\omega^1}{2n+1},$$

m et m^1 étant deux entiers. Maintenant, ayant trouvé cette solution, il suit encore de la formule (51.) du mémoire cité que toutes les autres valeurs de y seront de la forme $\frac{f^1+f.y}{g^1+g.y}$, où y est donné par (5.), et f^1, f, g, g^1 sont des quantités constantes qui doivent satisfaire à l'équation

$$7.\quad \left(1+\frac{g+f}{g^1+f^1}.x\right)\left(1+\frac{g-f}{g^1-f^1}.x\right)\left(1+\frac{g+c^1f}{g^1+c^1f^1}.x\right)\left(1+\frac{g-c^1f}{g^1-c^1f^1}.x\right) = (1-x^2)(1-c^{1^2}x^2).$$

Cette équation donne vingt-quatre systèmes de valeurs différentes. On trouve ainsi qu'à chaque valeur de α répondent 24 valeurs de y et douze valeurs du module c^1. Mais comme les valeurs de y sont deux à deux égales, mais de signes contraires, nous n'en compterons que douze. Par la même raison nous réduirons le nombre des valeurs de c^1 à six. Cela posé, si l'on fait pour abréger:

$$8.\quad \begin{cases} p = x\left(1-\frac{x^2}{\lambda^2\alpha}\right)\ldots\left(1-\frac{x^2}{\lambda^2(n\alpha)}\right);\ v=(1-c^2\lambda^2\alpha.x^2)\ldots(1-c^2\lambda^2(n\alpha).x^2); \\ \varepsilon = c^{n+\frac{1}{2}}\left\{\lambda\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right)\ldots\lambda\left(\frac{\omega}{2}+n\alpha\right)\right\}^2;\ \delta = c^{n+\frac{1}{2}}(\lambda\alpha.\lambda(2\alpha)\ldots\lambda(n\alpha))^2; \end{cases}$$

on trouvera aisément ces valeurs correspondantes des trois quantités c^1, α, y:

$$9.\quad \begin{cases} & \text{I.} & \text{II.} & \text{III.} & \text{IV.} & \text{V.} & \text{VI.} \\ c^1 = & \varepsilon^2, & \frac{1}{\varepsilon^2}, & \left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^2, & \left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^2, & \left(\frac{1-\varepsilon i}{1+\varepsilon i}\right)^2, & \left(\frac{1+\varepsilon i}{1-\varepsilon i}\right)^2, \\ \alpha = & \pm\frac{\delta}{\varepsilon}, & \mp\delta\varepsilon, & \pm\frac{\delta}{\varepsilon}(1+\varepsilon)^2 i, & \mp\frac{\delta}{\varepsilon}(1-\varepsilon)^2 i, & \pm\frac{\delta}{\varepsilon}(1+\varepsilon i)^2 i, & \mp\frac{\delta}{\varepsilon}(1-\varepsilon i)^2 i, \\ y = & \begin{cases}\frac{\delta}{\varepsilon}.\frac{p}{v}, \\ \frac{1}{\delta\varepsilon}.\frac{v}{p},\end{cases} & \begin{cases}\frac{\varepsilon}{\delta}.\frac{v}{p} \\ \delta\varepsilon.\frac{p}{v},\end{cases} & \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}.\frac{v\mp\delta.p}{v\pm\delta.p}, & \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}.\frac{v\mp\delta.p}{v\pm\delta.p}, & \frac{1+\varepsilon i}{1-\varepsilon i}.\frac{v\mp\delta.p.i}{v\pm\delta.p.i}, & \frac{1-\varepsilon i}{1+\varepsilon i}.\frac{v\mp\delta.p.i}{v\pm\delta.p.i}, \end{cases}$$

(où $i = \sqrt{-1}$).

On voit qu'à chaque valeur de c^1 correspondent deux valeurs différentes de la fonction y. Maintenant si l'on attribue aux nombres m et m^1 des valeurs entières quelconques, on aura toutes les solutions possibles de notre problème. Or parmi ces solutions il n'y aura qu'un nombre fini qui seront différentes entre elles. Cherchons d'abord les solutions différentes qui répondent au premier cas, savoir $c^1 = \varepsilon^2$ et $y = \frac{\delta}{\varepsilon}.\frac{p}{v}$. Pour les trouver soit α^1 une valeur de α et désignons les valeurs correspondantes de y, p, v, δ, ε par y^1, p^1, v^1, δ^1, ε^1. Celà posé il est évident, que si y^1 doit être égal à $\pm y$, on doit avoir:

$$p^1 = p, \quad v^1 = v, \quad \frac{\delta^1}{\varepsilon^1} = \pm\frac{\delta}{\varepsilon}.$$

Or en vertu de (8.) on ne pourra avoir $p^1 = p$, à moins que les quantités $\lambda^2\alpha$, $\lambda^2(2\alpha)$, ... $\lambda^2(n\alpha)$ ne soient, quoique dans un ordre différent, égales à celles-ci:

$$\lambda^2\alpha^1, \quad \lambda^2(2\alpha^1), \quad \ldots\ldots \quad \lambda^2(n\alpha^1).$$

Soit donc

$$\lambda^2\alpha^1 = \lambda^2(\mu\alpha),$$

où μ est moindre que n. On en tire $\lambda\alpha^1 = \pm\lambda(\mu\alpha)$ et de là, en vertu du théorème II. du No. 138. du Journal d'astronomie:

$$\alpha^1 = k\omega + k^1\omega^1 \pm \mu\alpha,$$

où k et k^1 désignent des nombres entiers quelconques. Cela donne

$$\lambda^2(\mu^1\alpha^1) = \lambda^2(\mu^1\mu\alpha),$$

et puisque

$$\lambda(\theta + (2n+1)\alpha) = \lambda\theta,$$

et $2n+1$ est un nombre premier, il suit que

$$p^1 = p, \quad v^1 = v, \quad \delta^1 = \delta, \quad \varepsilon^1 = \varepsilon.$$

Donc les solutions qui répondent à α et α^1 sont précisément égales entre elles.

Soit d'abord $m^1 = 0$ en sorte que $\alpha = \frac{m\omega}{2n+1}$.

Si l'on fait $k^1 = 0$, et qu'on détermine les nombres k et μ de la manière à satisfaire à l'équation

$$k \pm \frac{\mu m}{2n+1} = 1,$$

on aura

$$\alpha' = \frac{\omega}{2n+1}.$$

On voit par là que la solution qui répond à $\alpha = \frac{m\omega}{2n+1}$ est la même que celle qui réponde à $\alpha = \frac{\omega}{2n+1}$, quel que soit m.

Supposons maintenant m^1 différent de zéro, on aura

$$\alpha^1 = k\omega + k^1\omega^1 \pm \frac{m\mu \cdot \omega + m^1\mu\omega^1}{2n+1}.$$

Si l'on détermine les deux nombres entiers μ et k^1 par l'équation

$$k^1 \pm \frac{m^1\mu}{2n+1} = 1,$$

et k par celle-ci:

$$k \pm \frac{\mu m}{2n+1} = \frac{\nu}{2n+1},$$

où ν est positif et moindre que $2n+1$, on aura

$$\alpha^1 = \frac{\omega^1 + \nu\omega}{2n+1}.$$

On voit de là, que pour toutes les valeurs différentes de ν et p, il suffit de donner à α les valeurs:

$$10. \quad \frac{\omega}{2n+1}, \quad \frac{\omega^1}{2n+1}, \quad \frac{\omega^1+\omega}{2n+1}, \quad \frac{\omega^1+2\omega}{2n+1}, \quad \ldots \quad \frac{\omega^1+2n\omega}{2n+1}.$$

Or toutes les solutions ainsi obtenues seront effectivement différentes entre elles; car si l'on attribue à α et à α^1 deux valeurs différentes de la série (10.), il est clair qu'on ne pourra satisfaire à l'équation

$$\alpha^1 = k\omega + k^1\omega^1 \pm \mu\alpha,$$

qui exprime une condition nécessaire de l'identité des deux solutions qui répondent à α et à α^1.

Donc le nombre des solutions différentes qui répondent à $y = \frac{\delta}{\varepsilon} \cdot \frac{p}{\nu}$ est $2n+2$. Maintenant si l'on attribue à α toutes les valeurs (10.), les formules (9.) donneront $12.(2n+2)$ solutions, et il est évident que toutes les $12.(2n+2)$ valeurs correspondantes de y seront nécessairement différentes entre elles. Cependant il ne repond a ces $24.(n+1)$ solutions que $12.(n+1)$ valeurs du module. Il faut observer qne la conclusion précédente n'a pas lieu pour le cas particulier où $n = o$. En effet, dans ce cas y n'aura que douze valeurs différentes, car les deux valeurs $\alpha = \omega$, $\alpha = \omega^1$, auxquelles dans ce cas se réduisent les quantités (10.), donneront pour y une mème valeur, savoir $y = x$. Il faut remarquer égalément que le module c ne doit avoir les valeurs zéro et l'unité. Dans ces cas la fonction $\int \frac{dx}{\Delta}$ n'est plus une fonction elliptique, mais circulaire ou logarithmique.

On pourra mettre les huit dernières valeurs de y (9.) sous une autre forme qui est à quelque égard plus élégante. En effet on pourra démontrer qu'on a

$$11.\begin{cases} v-\delta.p=(1-x.\sqrt{c})(1-2k_1\sqrt{c}.x+c.x^2)(1-2k_2\sqrt{c}.x+cx^2)\ldots. \\ \qquad\qquad \ldots.(1-2k_n\sqrt{c}.x+cx^2), \\ v-\delta.p\sqrt{-1}=(1-x\sqrt{-c})(1-2k_1^{\mathrm{I}}\sqrt{-c}.x-c.x^2)(1-2k_2^{\mathrm{I}}\sqrt{-c}.x-cx^2)\ldots. \\ \qquad\qquad \ldots.(1-2k_n^{\mathrm{I}}\sqrt{-c}.x+cx^2). \end{cases}$$

En changeant le signe de x, on aura des expressions semblables pour $v+\delta.p$ et $v+\delta.p.\sqrt{-1}$. Les quantités k_1, k_2, k_3. . . . k_n sont données par la formule

$$k_\mu=\frac{\Delta(\mu\alpha)}{1-c.\lambda^2\mu\alpha}.$$

Pareillement on a

$$k_\mu^{\mathrm{I}}=\frac{\Delta(\mu\alpha)}{1+c.\lambda^2(\mu\alpha)},$$

où $\Delta(\theta)$ désigne la quantité

$$\frac{\partial\lambda\theta}{\partial\theta}=\pm\sqrt{[(1-\lambda^2\theta)(1-c^2\lambda^2\theta)]}.$$

Donc les numerateur et dénominateur de la fraction (3.) qui exprime la valeur de y, se trouvent décomposés en facteurs dans tous les cas.

Dans le cas où le module c est moindre que l'unité, les équations (9.), nous font voir, que généralement les modules des transformées sont imaginaires, excepté ceux qui répondent à

$$\alpha=\frac{\omega}{2n+1}\quad\text{et à}\quad\alpha=\frac{\omega^{\mathrm{I}}-\omega}{2n+1},$$

et en même tems à l'une des solutions I., II., III., IV. Il n'y a donc seulement que huit modules réels. Si l'on ne desire que ceux qui sont moindres que l'unité, on n'en aura que quatre. Cependant il pourra arriver, c ayart des valeurs particulières, qu'un plus grand nombre des modules transformés sont réels. Je ferai voir dans une autre occasion, comment on pourra trouver toutes ces valeurs particulières. Pour le moment je ferai connoitre une manière d'exprimer toutes les valeurs du module c^1 à l'aide de produits infinis.

Si c est moindre que l'unité, ω sera une quantité réelle, ω^1 au contraire sera imaginaire; car on a

$$\omega^1=2.\int_0^{\frac{1}{c}}\frac{\partial x}{\Delta}=\omega+2\sqrt{-1}.\int_1^{\frac{1}{c}}\frac{\partial x}{\sqrt{[(x^2-1)(1-c^2x^2)]}},$$

c'est-à-dire, si l'on fait

$$\frac{\varpi}{2} = \int_0^1 \frac{\partial x}{\sqrt{[(1-x^2)(1-b^2x^2)]}},$$

où

$$b = \sqrt{(1-c^2)},$$

on aura

$$\omega' = \omega + \varpi\sqrt{-1}.$$

où ϖ est une quantité réelle comme ω. Cela posé les $2n+2$ valeurs de α deviendront:

$$\frac{\omega}{2n+1}, \quad \frac{\varpi i+\omega}{2n+1}, \quad \ldots \quad \frac{\varpi i+(2n+1)\omega}{2n+1}.$$

A la place de ces valeurs on pourra aussi mettre celles-ci:

$$\frac{\omega}{2n+1}, \quad \frac{\varpi i}{2n+1}, \quad \frac{\varpi i+2\omega}{2n+1}, \quad \frac{\varpi i+4\omega}{2n+1}, \quad \ldots \quad \frac{\varpi i+4n\omega}{2n+1},$$

où $i=\sqrt{-1}$.

En faisant $c=1$, $e=\frac{c}{b}$ (formule 189. Tome II. pag. 177.), et mettant ensuite $b\omega$ et $b\varpi$ au lieu de ω et ϖ, et enfin $\alpha = b\left(\frac{\omega}{2}-\theta\right)$, on trouvera $\lambda\theta = f\alpha$ et la formule donnera en vertu de quelques réductions faciles:

$$12.\quad \lambda\theta = \frac{2}{\sqrt{c}}\cdot\sqrt[4]{q}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{\omega}\theta\right)\cdot\frac{\left[1-2q^2\cos\left(\frac{2\pi}{\omega}\theta\right)+q^4\right]\left[1-2q^4\cos\left(\frac{2\pi}{\omega}\theta\right)+q^8\right]\ldots}{\left[1-2q\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{\omega}\theta\right)+q^2\right]\left[1-2q^3\cos\left(\frac{2\pi}{\omega}\theta\right)+q^6\right]\ldots},$$

où $q = e^{-\frac{\varpi}{\omega}\pi}$.

Pour avoir la valeur de ε (8.), il suffit de chercher les valeurs de $\lambda\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right)$, $\lambda\left(\frac{\omega}{2}+2\alpha\right)$, $\ldots$. $\lambda\left(\frac{\omega}{2}+n\alpha\right)$ au moyen de la formule précédente, et de les multiplier ensuite entre elles. D'abord si l'on fait $\alpha=\frac{\omega}{2n+1}$, on trouvera aisément

$$13.\quad \varepsilon = 2\cdot\sqrt[4]{q^{2n+1}}\cdot\left\{\frac{1+q^{2(2n+1)}}{1+q^{2n+1}}\cdot\frac{1+q^{4(2n+2)}}{1+q^{3(2n+1)}}\cdot\ldots\right\}^2.$$

De même si l'on fait

$$\alpha = \frac{\varpi i+2\mu\omega}{2n+1},$$

et pour abréger:

$$\delta_1 = \cos\frac{2\pi}{2n+1}+\sqrt{-1}\cdot\sin\frac{2\pi}{2n+1},$$

on parviendra à cette formule:

$$14.\quad \varepsilon = 2\cdot\sqrt[4]{\left(\delta_1^{\mu}\cdot q^{\frac{1}{2n+1}}\right)}\cdot\left\{\frac{1+\left(\delta_1^{\mu}\cdot q^{\frac{1}{2n+1}}\right)^2}{1+\delta_1^{\mu}\cdot q^{\frac{1}{2n+1}}}\cdot\frac{1+\left(\delta_1^{\mu}\cdot q^{\frac{1}{2n+1}}\right)^4}{1+\left(\delta_1^{\mu}\cdot q^{\frac{1}{2n+1}}\right)^3}\cdot\ldots\right\}^2.$$

Donc on voit, que pour avoir toutes les valeurs de ε, il suffit de substituer dans l'expression

$$15.\quad 2.\sqrt[4]{q}.\left(\frac{1+q^2}{1+q}.\frac{1+q^4}{1+q^3}....\frac{1+q^{2m}}{1+q^{2m-1}}....\right)^2,$$

au lieu de q, les $2n+2$ valeurs q^{2n+1}, $q^{\frac{1}{2n+1}}$, $\delta_1 q^{\frac{1}{2n+1}}$, $\delta_1^2 q^{\frac{1}{2n+1}}$, ... $\delta_1^{2n}.q^{\frac{1}{2n+1}}$, où 1, δ_1, δ_1^2, ... sont les racines de l'équation $\delta^{2n+1}=1$. Deux seulement des valeurs de ε sont réelles, savoir celles qui répondent à la substitution de q^{2n+1} et $q^{\frac{1}{2n+1}}$, c'est à dire à

$$\alpha=\frac{\omega}{2n+1}\quad\text{et}\quad\alpha=\frac{\varpi i}{2n+1}.$$

Il suit encore des formules précédentes que toutes les $2n+2$ valeurs de ε sont nécessairement différentes entre elles, excepté peut-être pour les cas de valeurs particulières du module c. Ayant trouvé les valeurs de ε, on aura celles du module c^1 à l'aide des équations (9.). Il y a à remarquer que l'expression (15.) est précisément la valeur de $\sqrt{c}$, comme on peut le voir en faisant $\theta=\frac{\omega}{2}$. Dans le cas où l'on suppose y de la forme $\frac{\delta}{\varepsilon}.v$, le module c^1, suivant I. (9.) sera égal à ε^2, donc $\sqrt{c^1}=\varepsilon$. Par conséquent dans ce cas le module c se changera successivement dans toutes les valeurs du module c^1, si l'on remplace dans la formule

$$16.\quad \sqrt{c}=2.\sqrt[4]{q}.\left(\frac{1+q^2}{1+q}.\frac{1+q^4}{1+q^3}....\right)^2,$$

q par q^{2n+1}, $\sqrt[2n+1]{q}$, $\delta_1\sqrt[2n+1]{q}$, $\delta_1^2\sqrt[2n+1]{q}$, ... $\delta_1^{2n}\sqrt[2n+1]{q^{2n+1}}$.

Ce théorème s'accorde parfaitement avec le théorème énoncé par Mr. Jacobi dans le tome III. pag. 193. de ce journal. Seulement à l'endroit cité la fonction de q, qui exprime la valeur de $\sqrt{c}$, est presentée sous une autre forme. Donc on trouveroit immédiatement le théorème de ce géomètre, si l'on pouvoit parvenir à démontrer l'identité des deux fonctions

$$17.\quad \sqrt[4]{q}.\left(\frac{1+q^2}{1+q}.\frac{1+q^4}{1+q^3}....\right)^2=\frac{q^{\frac{1}{4}}+q^{\frac{9}{4}}+q^{\frac{16}{4}}+....}{1+2q+2q^9+2q^{16}+....}.$$

On pourra encore démontrer qu'on aura les $2n+2$ valeurs de c^1, en mettant dans la formule

$$18.\quad \sqrt[4]{c}=\frac{1-r}{1+r}.\frac{1-r^3}{1+r^3}.\frac{1-r^5}{1+r^5}....$$

les quantités r^{2n+1}, $\sqrt[2n+1]{r}$, $\delta\sqrt[2n+1]{r}$, $\delta^2\sqrt[2n+1]{r}$, ... $\delta^{2n}\sqrt[2n+1]{r}$, au lieu de r, la lettre r désignant la quantité $e^{-\frac{\omega}{\varpi}\pi}$. Donc cette quantité est liée à q par l'équation

$$\log\left(\frac{1}{r}\right).\log\left(\frac{1}{q}\right) = \pi^2.$$

Pour avoir la valeur du coëfficient α il faut connoitre celle de δ (8.). Or on pourra la déduire aisément de la formule (12.), en y faisant $\theta = \alpha$, 2α .... $n\alpha$. On trouve de cette manière que les valeurs de δ qui répondent respectivement à

$$\alpha = \frac{\omega}{2n+1}, \quad \frac{\varpi i}{2n+1}, \quad \frac{\varpi i+2\omega+1}{2n+1}, \quad \ldots\ldots \quad \frac{\varpi i+4n\omega}{2n+1},$$

sont égales à la valeur de l'expression

$$19. \quad \delta = 2.\frac{\pi}{\omega}.\sqrt[4]{q}.\left(\frac{1-q^2}{1-q}.\frac{1-q^4}{1-q^3}\ldots.\right)^2,$$

en y supposant au lieu de q les valeurs q^{2n+1}, $\sqrt[2n+1]{q}$, $\delta_1\sqrt[2n+1]{q}$, $\delta_1^2\sqrt[2n+1]{q}$, ... $\delta_1^{2n}\sqrt[2n+1]{q}$.

38.

Théorème général sur la transformation des fonctions elliptiques de la seconde et de la troisième espèce.

(Par Mr. *N. H. Abel.*)

Si une intégrale algébrique $f(y, x) = 0$ satisfait à l'équation

$$\frac{\partial y}{\sqrt{[(1-y^2)(1-c^{1\,2}y)]}} = a \cdot \frac{\partial x}{\sqrt{[(1-x^2)(1-c^2x^2)]}},$$

on aura toujours:

$$\int \frac{A+B.x^2}{1-\frac{x^2}{n^2}} \cdot \frac{\partial x}{\sqrt{[(1-x^2)(1-c^2x^2)]}} = \int \frac{A^1+B^1y^2}{1-\frac{y^2}{m^2}} \cdot \frac{\partial y}{\sqrt{[(1-y^2)(1-c^{1\,2}y^2)]}} + k \log p,$$

où A, B, n sont des quantités données, A', B', m, k des quantités constantes, fonctions des premières, et p une certaine fonction algébrique de y et x. Il est très remarquable que les paramètres m et n sont liés entre eux par la même équation, que y et x; savoir $f(m, n) = 0$. Dans le cas où n est infini, le premier membre deviendra seulement une fonction de la seconde espèce et dans ce cas on pourra démontrer que

$$(a.) \int (A+Bx^2) \frac{\partial x}{\sqrt{[(1-x^2)(1-c^2x^2)]}} = \int (A'+B'y^2) \frac{\partial y}{\sqrt{[(1-y^2)(1-c^{1\,2}y^2)]}} + v,$$

où v est une fonction algèbrique des variables x et y.

Au reste il est aisé de démontrer la formule (*a.*). Il n'y a qu'à différentier l'équation

$$a \int \frac{\partial x}{\sqrt{[(1-x^2)(1-c^2x^2)]}} = \int \frac{\partial y}{\sqrt{[(1-y^2)(1-c^{1\,2}y^2)]}},$$

par rapport au module c. Je me réserve de donner dans un autre mémoire des développemens plus étendus sur le théorème ci-dessus.

39.
Suite des notices sur les fonctions elliptiques.

(Par Mr. *C. G. J. Jacobi*, prof. en phil. à Königsberg.)

I. Les formules données dans le troisième cahier de ce journal contiennent la découverte importante, „que les fonctions elliptiques de troisième espèce, dans lesquelles entrent trois variables, peuvent être ramenées à d'autres transcendantes qui n'en ont que deux." De là on tire aisément toute la théorie des fonctions elliptiques de troisième espèce.

II. Soit $q = e^{\frac{-\pi K'}{K}}$, $q' = e^{\frac{-\pi K}{K'}}$, de sorte que l'on trouve q' en q, en mettant k' au lieu de k, ou en changeant le module et son complément. Si l'on met

$$\Theta(x, q) = 1 - 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - 2q^9\cos 6x + \ldots.$$

$$\mathrm{H}(x, q) = 2\sqrt[4]{q}\sin x - 2\sqrt[4]{q^9}\sin 3x + 2\sqrt[4]{q^{25}}\sin 5x - \ldots.$$

on aura:

$$\Theta(ix, q) = \sqrt{\left(\frac{K}{K'}\right)}\, e^{\frac{Kxx}{\pi K'}}\,\mathrm{H}\left(\frac{Kx}{K'} + \frac{\pi}{2}, q'\right),$$

$$\mathrm{H}(ix, q) = i\sqrt{\left(\frac{K}{K'}\right)}\, e^{\frac{Kxx}{\pi K'}}\,\mathrm{H}\left(\frac{Kx}{K'}, q'\right),$$

i étant toujours $= \sqrt{-1}$, formules très remarquables. On pourra déduire l'une de l'autre au moyen de la formule $\sin am(iu, k) = i\tan g\, am(u, k')$.

III. Je suis parvenu à résoudre un problème dont la difficulté avoit éludé long-tems tous mes efforts, savoir de trouver l'expression générale et algébrique des formules de multiplication. En effet on sait qu'en supposant $z = \sin am(nu)$, $x = \sin am(u)$, n étant un nombre impair quelconque, on a

$$z = \frac{A'x + A'''x^3 + A^{(5)}x^5 + \ldots + A^{(nn)}x^{nn}}{1 + A''x^2 + A^{(4)}x^4 + \ldots + A^{(nn-1)}x^{nn-1}} = \frac{U}{V},$$

A', A'', A''', etc. étant des fonctions rationelles et entières de k. On peut aussi trouver successivement pour chaque valeur donnée de n, p. e. $n = 3, 5, 7, \ldots$, les expressions de U et de V; mais trouver généralement pour un nombre n indéfini les valeurs algébriques de A', A'', A''', etc.

en k, est un problème où toutes les méthodes connues paraissent être en défaut. Or, $z = \frac{U}{V}$ étant une substitution rationelle quelconque qui sert ou à la transformation ou à la multiplication des fonctions elliptiques de première espèce, je suis parvenu à sommer par parties le numérateur et le dénominateur de la substitution à faire et à définir l'un et l'autre au moyen d'une équation à différences partielles entre x et k. Dans le cas de la multiplication on tire de cette équation les expressions générales de A', A'', A''', ... On trouve par exemple

$$A'' = 0, \quad A^{(4)} = -\frac{n^2(n^2-1)}{3.4}k^2, \quad A^6 = \frac{n^2(n^2-1)(n^2-4)k^2(1+k^2)}{3.5.6},$$

$$A^{(8)} = -\frac{2n^2(n^2-1)(n^2-4)(n^2-9)k^2(1+k^4)}{3.3.5} - \frac{n^2(n^2-1)(n^2-4)(17n^2-69)k^2}{3.3.4.5},$$

etc. etc. etc.

On trouve très facilement chaque terme $A^{(m)}$ par les deux termes $A^{(m-2)}$, $A^{(m-4)}$, qui le précèdent. En vertu d'une remarque faite dans une autre occasion, savoir qu'étant mis $\frac{1}{kx}$ au lieu de x, z se change en $\frac{1}{\lambda z}$, λ étant le module transformé, on tire aussitôt le numérateur U du dénominateur et réciproquement. Le cas de n pair ne demande que quelques légères modifications.

Königsberg le 3. Oct. 1828.

40.
Zweite Annäherungs-Construction des Kreis-Umfanges.

(Von Herrn *C. G. Specht* zu Berlin.)

In der höchst schätzbaren und reichhaltigen Geometrie des Herrn Professor Paucker zu Mitau befindet sich eine Sammlung von elementar-geometrischen Constructionen, den Umfang eines Kreises näherungsweise zu finden, von denen die genaueste bis zu der fünften Decimalstelle mit dem Calcul übereintrifft, aber doch so weitläufig ist, dafs sie in der wirklichen Ausführung bedeutende Schwierigkeiten verursacht. Ich habe vor einiger Zeit in diesem Journal eine einfache Construction des Kreis-Umfangs bekannt gemacht, welche bis zu der sechsten Decimalstelle mit dem Calcul übereintrifft, und gebe hier eine zweite, die bei der gröfsten Einfachheit bis zu der achten Decimalstelle genau ist.

Man construire den rechten Winkel BAC;*) nehme auf dem einen Schenkel AB desselben, $Aa = am = mp = pq = qB =$ dem Radius des gegebenen Kreises; theile sowohl mp in n und o, so wie auch qB in r und s, in 3 gleiche Theile; nehme auf dem andern Schenkel AC dieses Winkels, $AM = Aa$, $AR =$ der Entfernung zwischen den Puncten M und m, $AC =$ der Entfernung zwischen den Puncten R und r; nehme nun auf der Geraden Co, die $Cc = AB$; und ziehe endlich aus c mit AB eine Parallele, bis sie die CB in d trifft; so wird Cd mit dem Umfange des gegebenen Kreises bis zu der achten Decimalstelle übereinstimmen. Denn es folgt aus der Construction, dafs

$$Cd = \frac{5\sqrt{(3^2+6^2+13^2+15^2)}}{\sqrt{(3^2+6^2+13^2+8^2)}} = 5\sqrt{\left(\frac{439}{278}\right)}.$$

Nun ist $\pi = 3{,}141592653\ldots.$

und $\frac{1}{2}Cd = 3{,}141592639\ldots.$

folglich $\pi - \frac{1}{2}Cd = 0{,}000000014\ldots.$

Es ist zu bemerken, dafs die Formel

$$\frac{13\sqrt{146}}{50} = 3{,}1415919531\ldots,$$

*) Es wird dem Leser leicht sein, die Figur nach der Beschreibung zu entwerfen.
Anm. d. Herausgebers.

welche in dem ersten Heft des dritten Bandes pag. 83. in diesem Journal steht *), erst in der siebenten Decimalstelle um sieben Einheiten kleiner ist, wie die Zahl π, und die merkwürdige Beschaffenheit hat, dafs sie in den beiden nächsten Decimalstellen wieder mit der Zahl π übereinstimmt, so dafs die Formel

$$\frac{7}{10^7} + \frac{13\sqrt{146}}{50} = 3{,}1415926531$$

erst bei der zehnten Decimalstelle von der Zahl π abweicht **).

---

*) Durch einen Druckfehler steht daselbst

3,141591953 statt $2 \times 3{,}141591953$.

**) Wenn man die Zahl π näherungsweise durch Quadrat-Wurzeln ausdrücken will, welche Ausdrücke sich auch mit mehr oder weniger Mühe immer zeichnen lassen, so darf man nur das Quadrat von π, auf die Art wie man Brüche sucht die sich der Zahl π selbst oder überhaupt einer gegebenen irrationalen Zahl möglichst nähern, in einen Kettenbruch und diesen rückwärts in gewöhnliche Brüche verwandeln. Diese Brüche geben wie bekannt den Werth des Kettenbruchs, und folglich ihre Quadrat-Wurzeln die Zahl π selbst, genauer als alle andere Brüche in kleineren Zahlen. Auf ähnliche Weise kann man verfahren, wenn man π durch Cubic-Wurzeln oder in beliebigen anderen Formen, deren Umkehrungen sich leicht berechnen lassen, näherungsweise ausdrücken will.

Anm. d. Herausgebers.

41.
Aufgaben.

Question d'analyse indéterminée.

(Par Mr. *Lejeune-Dirichlet*, prof. de mathém.)

30. La lettre p désignant un nombre premier impair, on sait par le théorème de Wilson, que le produit $1.2.3.... p-1$, augmenté de l'unité, est divisible par p. On peut substituer au produit précédent celui que l'on obtient en remplaçant ses $\frac{p-1}{2}$ derniers facteurs qui sont $p-1$, $p-2$, ... $\frac{p+1}{2}$, par les nombres -1, -2, ..., $-\frac{p-1}{2}$, qui en diffèrent respectivement de p. On voit ainsi que la formule

$$\pm\left(1.2.3....\frac{p-1}{2}\right)^2+1,$$

dans la quelle il faut prendre le signe supérieur ou inférieur, selon que $\frac{p-1}{2}$ est pair ou impair, est toujours un multiple de p. Or $\frac{p-1}{2}$ est pair ou impair, selon que p est de la forme $4n+1$ ou de celle-ci: $4n+3$. On a donc pour tout nombre premier $p=4n+1$,

$$\left(1.2.3....\frac{p-1}{2}\right)^2+1$$

égal à un multiple de p, et pour tout nombre premier $p=4n+3$,

$$-\left(1.2.3....\frac{p-1}{2}\right)^2+1,$$

ou ce qui revient au même

$$\left(1.2.3....\frac{p-1}{2}\right)^2-1$$

égal à un multiple de p.

Ces deux corollaires du théorème de Wilson sont dûs à Lagrange, qui les a énoncés dans le beau mémoire où il a le premier démontré le théorème qu'on vient de nommer. Le dernier de ces corollaires donne lieu à une question que nous croyons pouvoir proposer à l'attention des géomètres qui s'occupent de la théorie des nombres.

La différence

$$\left(1.2.3....\frac{p-1}{2}\right)^2-1$$

étant divisible par p (p désignant un nombre premier $4n+3$) et cette différence pouvant se décomposer dans les deux facteurs:

$$\left(1.2.3....\frac{p-1}{2}\right)+1,\ \left(1.2.3....\frac{p-1}{2}\right)-1,$$

il s'ensuit que l'expression

$$\left(1.2.3....\frac{p-1}{2}\right)\pm 1$$

avec le signe convenable est un multiple de p. On demande une règle qui fasse connoitre le signe convenable, sans qu'il soit nécessaire de chercher par des multiplications successives le reste que l'on obtient en divisant $1.2.3....\frac{p-1}{2}$ par p. Il est facile de voir que la question proposée revient à celle de savoir si $1.2.3....\frac{p-1}{2}$ est ou n'est pas résidu quadratique de p.

Aufgaben von Anderen.

31. *a.* Von geradlinigen Figuren in der Ebene, deren Seiten mit denen gegebener Figuren parallel und von ihnen gleich weit entfernt sind, die Eigenschaften in Beziehung auf die gegebenen Figuren zu untersuchen.

b. Von Polyëdern, deren Seiten-Ebenen mit denen gegebener Polyëder parallel und gleich weit von ihnen entfernt sind, die Eigenschaften in Beziehung auf die gegebenen Polyëder zu untersuchen.

32. Die Zahl der geraden Linien, durch welche n Puncte in der Ebene oder im Raume verbunden werden können, ist $\frac{n.(n-1)}{2}$. Zu sagen, wie viele allgemein von diesen geraden Linien nöthig sind, die Lage der n Puncte zu bestimmen, und welche Modificationen des allgemeinen Gesetzes, wenn es ein solches giebt, entstehen, wenn die Puncte theilweise zu mehr als dreien in Ebenen, oder alle in einer und derselben Ebene liegen.

33. Die Zahl der Puncte zu finden, in welchen sich die $\frac{n.(n-1)}{2}$ geraden Linien schneiden, durch welche n Puncte in der Ebene oder im Raume verbunden werden können, nebst den Modificationen. (32.)

34. Aehnliche Figuren in der Ebene oder im Raume, von krummen oder geraden Grenzen umschlossen, sind im Allgemeinen die-

jenigen, die so gelegt werden können, dafs die bestimmenden Puncte der einen und die ähnlich liegenden bestimmenden Puncte der anderen in geraden Linien liegen, welche durch einen und denselben Punct gehen, und dafs dann zugleich die Entfernungen der bestimmenden Puncte der einen Figur von diesem Puncte (welcher Aehnlichkeits-Punct heifsen kann) Gleichvielfache sind von den Entfernungen der bestimmenden Puncte der anderen von dem nemlichen Puncte. (Man sehe den Aufsatz No. 24. im ersten Bande dieses Journals, 3. Heft, S. 250. *).) Es wäre nun zu untersuchen, welche Eigenschaften Figuren zukommen, die so gelegt werden können, dafs, wie bei ähnlichen Figuren, die bestimmenden Puncte der einen und die zugehörigen Puncte der anderen in geraden Linien liegen, welche durch einen und denselben Punct gehen, dafs aber dann die Entfernungen der bestimmenden Puncte der einen Figur von diesem Puncte, statt, wie bei ähnlichen Figuren, von den Entfernungen der bestimmenden Puncte der anderen von dem nemlichen Puncte Gleichvielfache zu sein, vielmehr um gleich viel von ihnen verschieden sind, oder dafs die Summe zusammengehöriger Entfernungen überall dieselbe sei, oder dafs die Producte der zusammengehörigen Entfernungen alle gleich sind. Das Letztere würde antiparallele Figuren geben.

*) Der Herausgeber dieses Journals hat in einer der Königlichen Academie der Wissenschaften zu Berlin von ihm am 13. März 1828 vorgelesenen Abhandlung einige aus dieser Definition folgende allgemeine Eigenschaften ähnlicher Figuren entwickelt.

42.
Einige Nachrichten von Büchern *).

Es ist in diesem Jahre eine mathematische Schrift des Herrn Doctor Plücker zu Bonn erschienen, unter dem Titel: „Analytisch-geometrische Entwicklungen. Erster Band. Essen bei G. D. Baedeker, 1828." Die Schrift handelt von der Theorie der graden Linie, des Kreises und der Linien zweiter Ordnung, letztere nach der rechten analytischen Methode, nicht aus dem Kegel sondern aus der allgemeinen Gleichung zweiter Ordnung abgeleitet. Sie verbreitet sich über die Gegenstände neuerer geometrischer Untersuchungen, über die Transversalen, Chordalen, Polaren, Aehnlichkeitspuncte und Axen, über die Zuordnung der Pole, die Bedeutung imaginairer Ausdrücke u. s. w. Sie handelt von der Bedeutung der Coefficienten der allgemeinen Gleichung zweiter Ordnung, von den Durchmessern, Brennpuncten, von den Durchschnitten u. s. w. allgemein und einfach, von der Osculation gewissermafsen eigenthümlich, und schliefst mit einem Abschnitte, der sich zu einer bedeutenden Allgemeinheit erhebt. Sie scheint insbesondere zur Vermittelung zwischen der synthetischen und analytischen Methode in der Geometrie beitragen und die analytische Methode auch für die einfacheren Fälle, wo sie weniger anstellig zu sein scheint, geschmeidiger machen zu sollen. Die Art wie sie durch Zerlegung und Verbindung der Gleichungen, durch Multiplication und vermittelst Einführung von unbestimmten Coefficienten, durch Benutzung der Willkürlichkeit der Coordinaten-Winkel und der Lage der Axen und andere Kunstgriffe das analytische Verfahren dem synthetischen gleichsam näher zu rücken strebt, so wie die Sparsamkeit der Rechnungen und Formeln, ist bemerkenswerth. Sie vereinigt in sich auf eine scharfsinnige und eigenthümliche Weise die Untersuchungen die über diesen Gegenstand in neuerer Zeit nach eigenthümlichen Ansichten angestellt worden sind, und von welchen sich eine reichhaltige Sammlung in den *Annales des mathématiques* von Gergonne findet, und schreitet auf diesem Wege weiter. Die Schrift hat unstreitig bedeutenden wissenschaftlichen Werth und verdient alle Aufmerksamkeit. Es ist zu wünschen, dafs ihre Fortsetzung über die Curven höherer Ordnung und die Figuren im Raume bald erscheinen möge. Ueber eine Aeufserung in der Vorrede glaubt der Herausgeber dieses Journals eine Bemerkung machen zu müssen, weil sie theils das Journal selbst, theils persönliche Umstände berührt, welche dem Herausgeber genau bekannt sind. Es heifst nemlich S. V. der Vorrede, dafs der Herr Verfasser mehrere neue, unter sich sehr verschiedene, von ihm auf seinem Wege gefundene Resultate des Herrn Steiner (eines ausgezeichneten Mitarbeiters an diesem Journal), der in die Fufstapfen des Herrn Poncelet zu treten scheine, später im ersten und zweiten Hefte dieses Journals wiedergefunden habe. Der Herausgeber bemerkt, dafs, wie ihm bestimmt bekannt und von ihm auch schon S. 96. ersten Bandes dieses Journals angedeutet ist, Herr Steiner keinesweges weder die Arbeiten des Herrn Plücker, noch die des Herrn Poncelet gekannt hat, als er die seinigen verfertigte, sondern völlig selbstständig arbeitete, daher sich auch nicht eigentlich sagen läfst, dafs Herr Steiner in fremde Fufstapfen trete. Obgleich es noch keinesweges ein Ta-

*) Der Herausgeber nimmt, um Entschuldigung zu erbitten, dafs er nur so selten Nachrichten und Beurtheilungen von Büchern giebt, auf die den vorjährigen Nachrichten (S. 399. des 2ten Bandes dieses Journals) beigefügte Bemerkung Bezug. Diese Bemerkung zeigt die Ursachen der Seltenheit seiner Aeufserungen dieser Art an. Die Bitte, ihn dabei zu unterstützen, ist bis jetzt noch nicht erfüllt worden. Er wiederholt sie.

del sein würde, zu sagen, dafs Jemand in die Fufstapfen eines so ausgezeichneten, classischen Schriftstellers wie Herr Poncelet trete, so glaubt der Herausgeber doch die obige Bemerkung machen zu müssen, damit auf keine Weise, auch nicht scheinbar, etwa ein Schatten auf die Arbeiten des Herrn Steiner falle, sondern diesen, ganz auf eigener Kraft ruhenden, genialen Bemühungen volle Gerechtigkeit widerfahren möge.

Die im vorigen Jahrgange dieses Journals S. 399. und 400. erwähnten *Annales des mathématiques* von Herrn Gergonne und das *Bulletin universel des sciences* von Herrn Baron von Férussac sind auf eine erfreuliche Weise fortgesetzt worden. Das Bulletin ist noch fester begründet worden und verstärkt seine intensive Kraft fernerhin.

Von den eben daselbst erwähnten *Exercices des mathématiques* von Herrn A. L. Cauchy sind wieder 12 neue inhaltsvolle Hefte, also nunmehr in Allem 31 Hefte erschienen. Von dem trefflichen *Cours d'analyse* des Herrn A. L. Cauchy erscheint so eben zu Königsberg in Preufsen bei Bornträger eine deutsche Uebersetzung von Herrn Huzzler, welche zur Verbreitung dieses wichtigen Werkes in Deutschland beitragen wird.

Die ferner daselbst erwähnte zweite Auflage der „*Exercices du calcul intégral*" von Herrn Legendre ist nunmehr erschienen. Die Erneuerung dieses classischen Werkes ist um so interessanter, da über den Gegenstand, mit welchem es sich vorzüglich beschäftigt, die elliptischen Functionen, jetzt so eifrig und vielfältig gearbeitet wird. Es sind, wie der ehrwürdige Verfasser dem Herausgeber zu melden die Güte gehabt hat, zwei Supplemente des Werks zu erwarten, von welchen das eine die Beweise der allgemeinen Theoreme des Herrn C. G. J. Jacobi über die elliptischen Functionen, nebst neuen Entwicklungen enthalten wird und so eben gedruckt wird, das andere über die Entdeckungen des Herrn N. H. Abel und die ferneren Arbeiten der beiden benannten Geometer, diesen Gegenstand betreffend, sich verbreiten wird.

Von Herrn C. G. J. Jacobi ist ein Werk über die elliptischen Functionen, unter dem Titel: *Fundamenta nova Theoriae functionum ellipticarum* unter der Presse. Herr N. H. Abel bearbeitet ebenfalls ein umfassendes Werk über diesen Gegenstand. Diese Schriften werden die weitere Ausführung der Mittheilungen enthalten, welche ihre Verfasser in dem gegenwärtigen Journale und in den „astronom. Abhandlungen des Hrn. Schumacher" gegeben haben, und werden also von grofsem Interesse sein.

Die Kaiserliche Academie der Wissenschaften zu St. Petersburg giebt so eben einen Supplement-Band zu der bereits geschlossenen Suite ihrer Memoiren, enthaltend Arbeiten verstorbener Academiker, heraus. Dieser Band wird, aufser mehreren wichtigen Abhandlungen von Schubert und Fufs, wiederum zwölf noch ungedruckte Abhandlungen des grofsen Euler enthalten. Der Herr Staats-Rath Fufs, beständiger Secretair der kaiserlichen Academie, hat auf die Bitte des Herausgebers die Güte gehabt, ihm die Titel der Eulerschen Abhandlungen mitzutheilen. Es sind folgende:

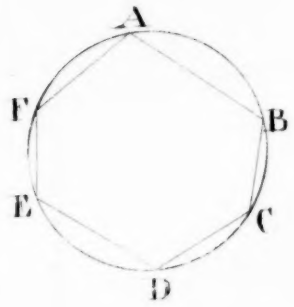
1) De insigni promotione analysis Diophanteae. 1780.
2) Solutio problematis difficillimi, quo hae duae formulae $aaxx+bbyy$ et $aayy+bbxx$ quadrati reddi debent. 1780.
3) Investigatio binorum numerorum formae $xy(x^4-y^4)$ quorum productum, sive quotus, sit quadratum. 1780.
4) De binis numeris, quorum summa, sive aucta sive minuta, tam unius quam alterius quadrato producat quadrata. 1780.
5) Dilucidationes circa binas summas duorum biquadratorum inter se aequales. 1780.
6) De resolutione hujus aequationis: $0=+bx+cy+dxx+exy+fyy+gxxy+hxyy+ixxyy$ per numeros rationales. 1780.
7) Methodus nova et facilis, formulas cubicas et biquadraticas ad quadratum reducendi. 1780.

8) Solutio problematis ad analysin infinitorum indeterminatorum referendi. 1781.
9) De infinitis curvis algebraicis, quarum longitudo indefinita arcui elliptico aequatur. 1781.
10) De infinitis curvis algebraicis quarum longitudo arcui parabolico aequatur. 1781.
11) De binis curvis algebraicis eadem rectificatione gaudentibus. 1781.
12) De curvis algebraicis quarum omnes arcus per arcus circulares metiri liceat. 1781.
13) Solutio problematis analytici difficillimi. 1782.
14) Intégration d'une espèce remarquable d'équations différentielles dans l'analyse des fonctions à deux variables. 1777.

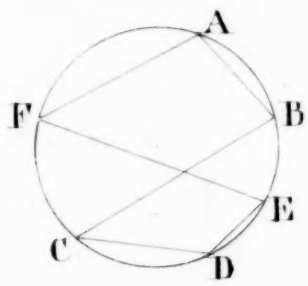
Es ist Eulers eigener, in seinen letzten Lebensjahren ausgesprochener Wunsch gewesen, noch 40 Jahre nach seinem Tode in den Druckschriften der Academie fortzuleben: und wirklich hat der reiche Vorrath bis jetzt vorgehalten, ob er gleich bald nach Eulers Tode um 58 Abhandlungen vermindert worden, aus welchen die *Opuscula analytica* und der vierte Band der zweiten Auflage der *Instit. calc. int.* entstanden sind. Wenn gleich ein halbes Jahrhundert alt, sind die oben erwähnten Abhandlungen doch noch nicht veraltet und enthalten interessante Forschungen über unbestimmte Analysis und höhere Geometrie, welche dem mathematischen Publicum höchst willkommen sein werden. Des grofsen Geometers Wunsch, noch 40 Jahre in den Memoiren der Academie zu leben ist erfüllt, aber Jahrtausende noch wird dieser Heros der Mathematik leben in der Wissenschaft und in der Achtung und Bewunderung der Nachkommen.

Taf I.

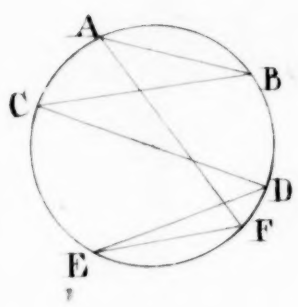
1.



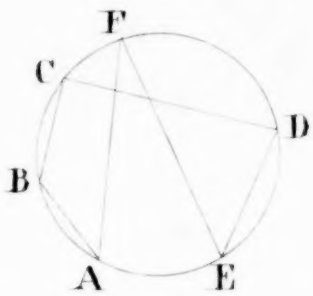
2.



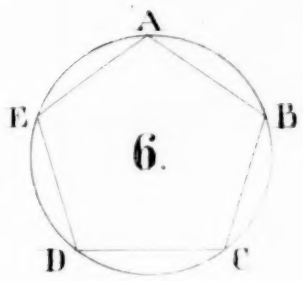
3.

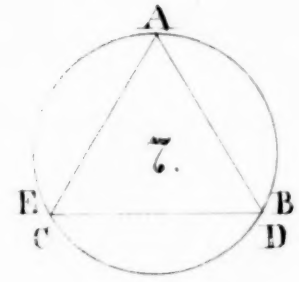


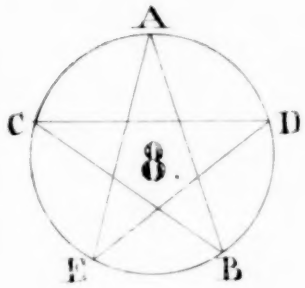
4.

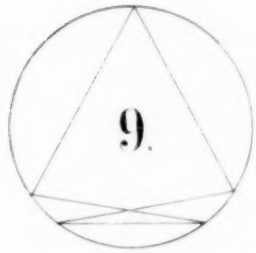


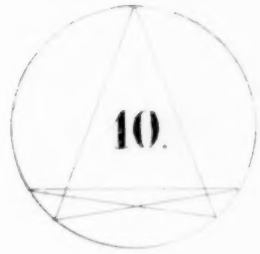
5.

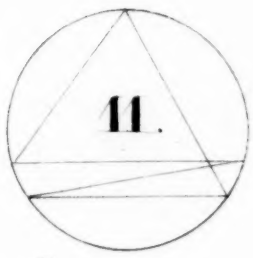




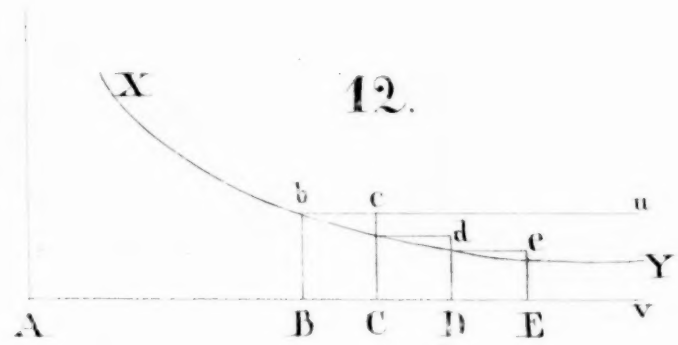




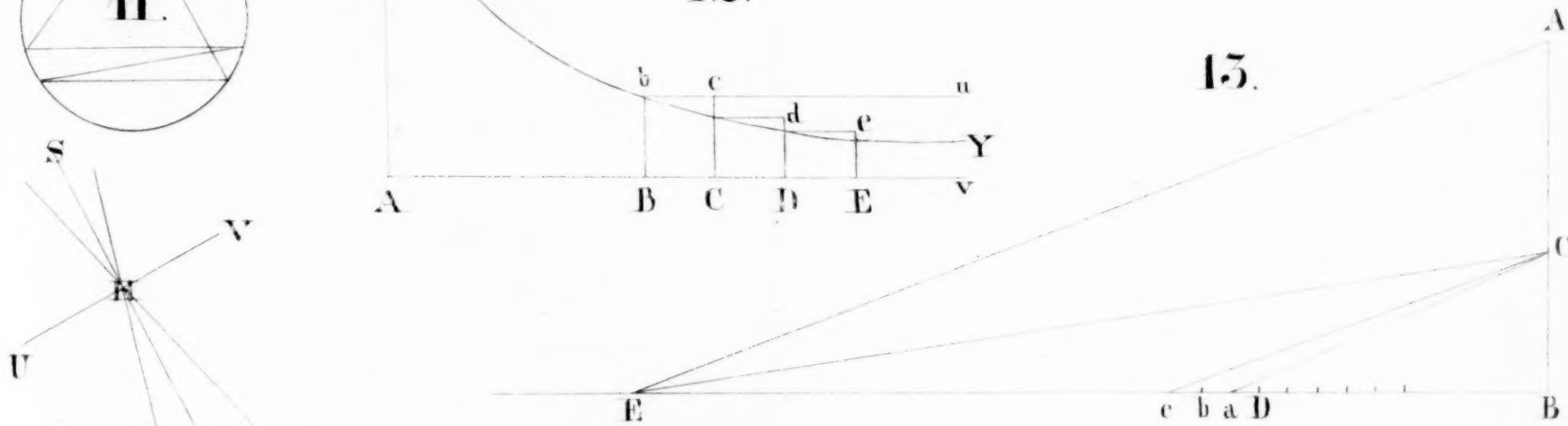


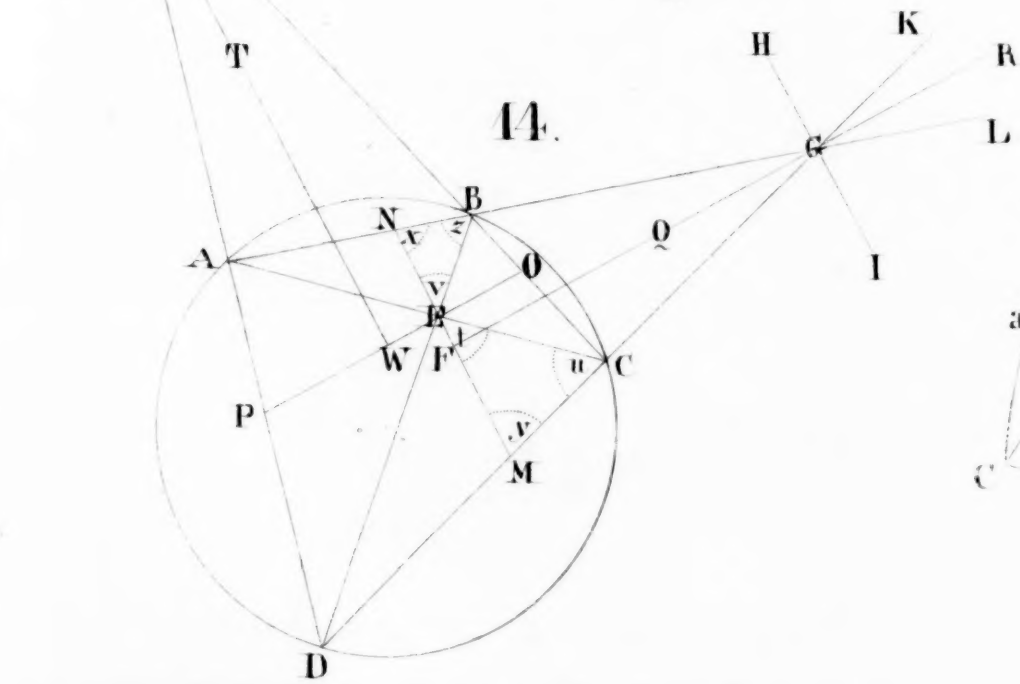


12.

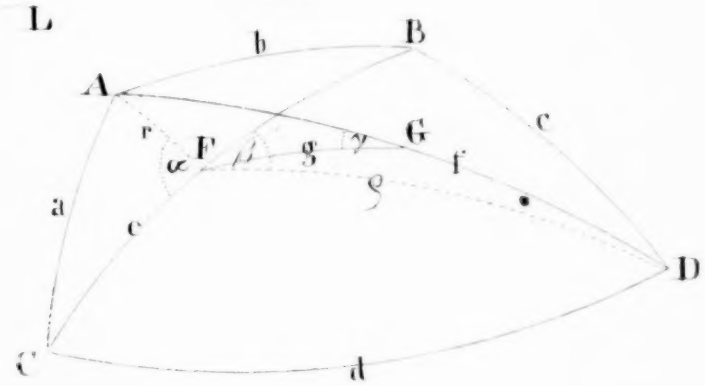


13.

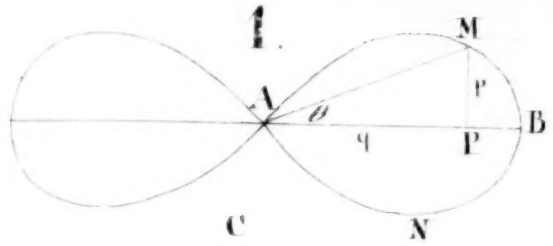




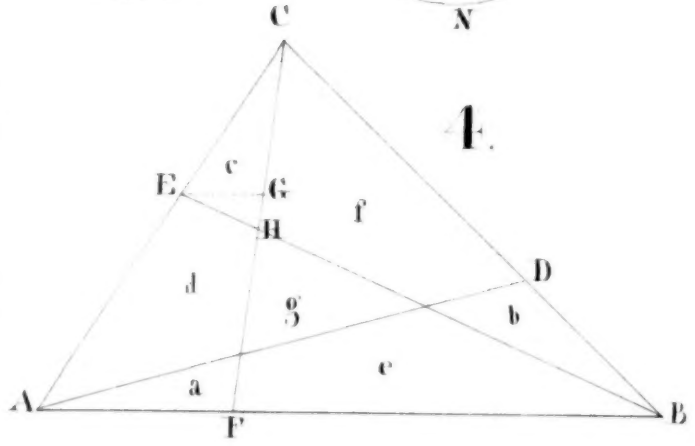
15.



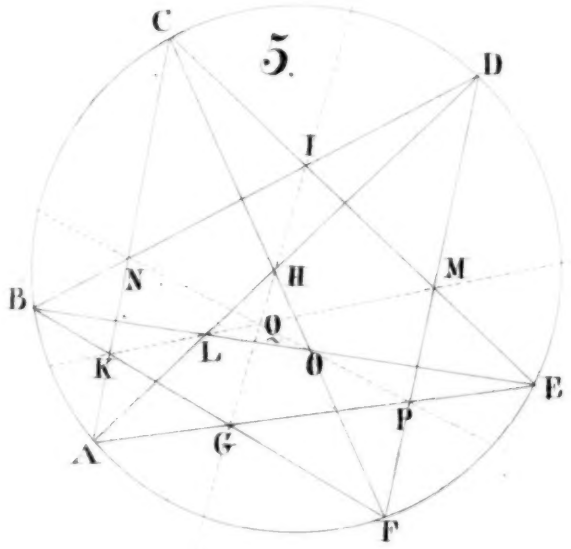
1.


M
A
B
N

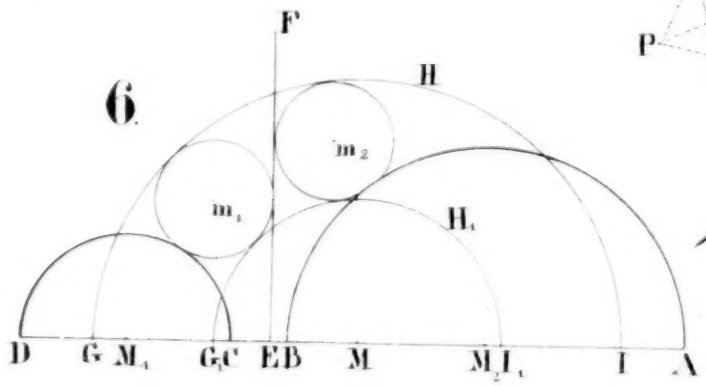
4.


C
E
G
H
D
A
F
B

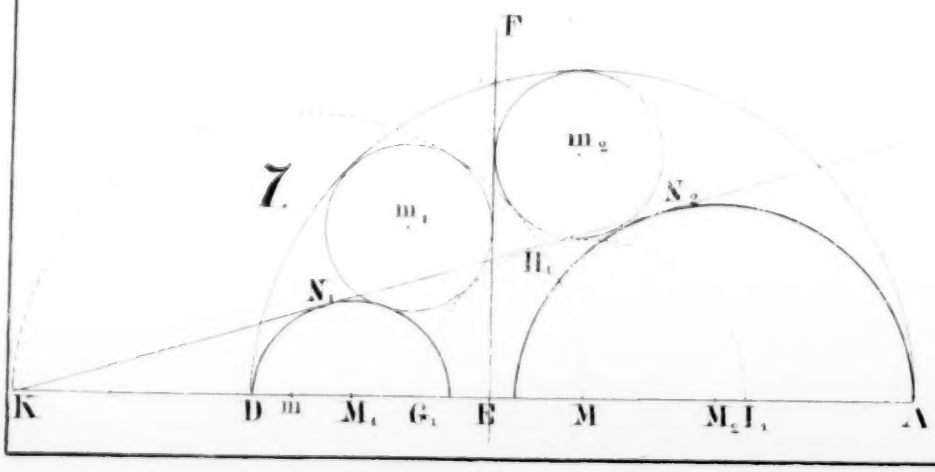
5.


C
D
I
N
H
M
B
O
K
L
E
P
G
A
F

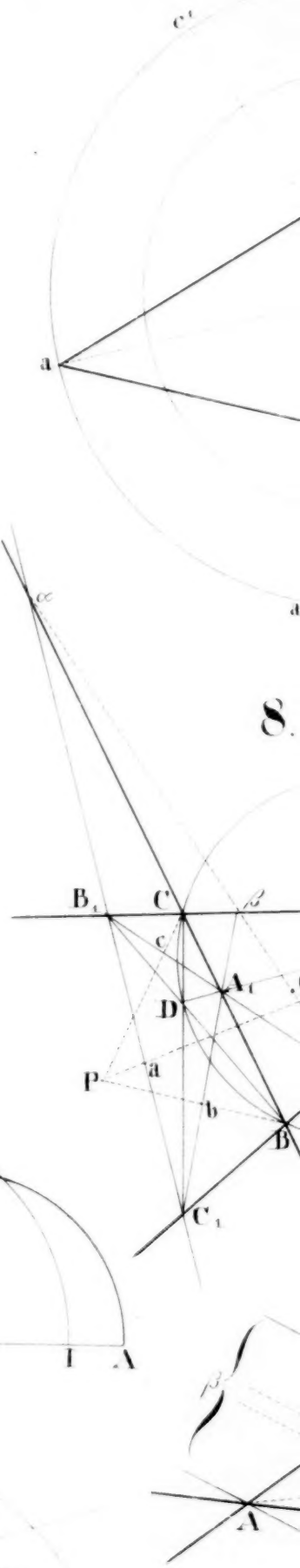
6.


F
H
m 2
m 1
H 1
D
G
M 1
G 1
C
E
B
M
M 2
I 1
I
A

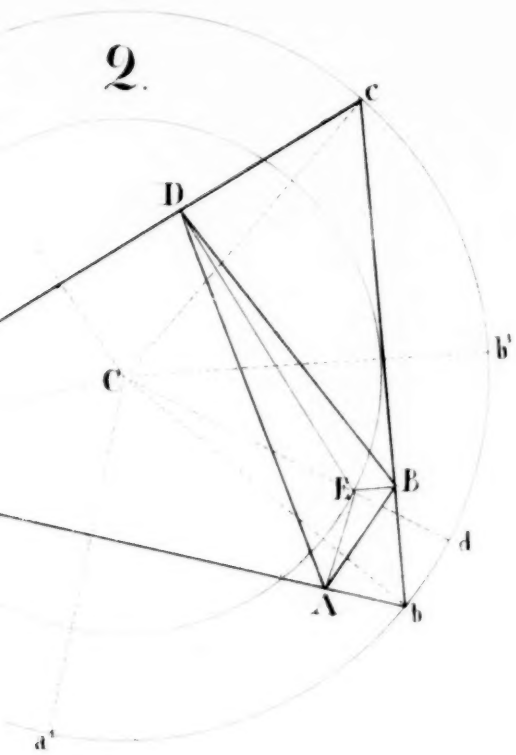
7.


F
m 2
m 1
N 2
H 1
N 1
K
D
m
M 1
G 1
E
M
M 2
I 1
A

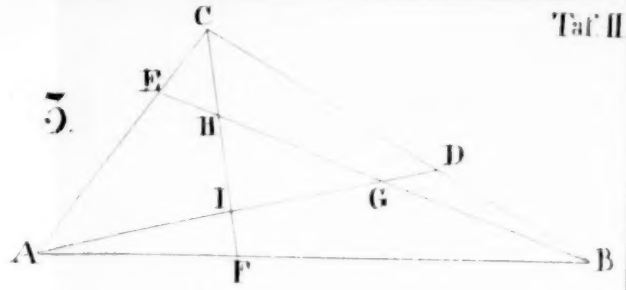
8.


c'
a
α
B 1
C
β
c
A 1
D
P
a
b
B
C 1
β
A

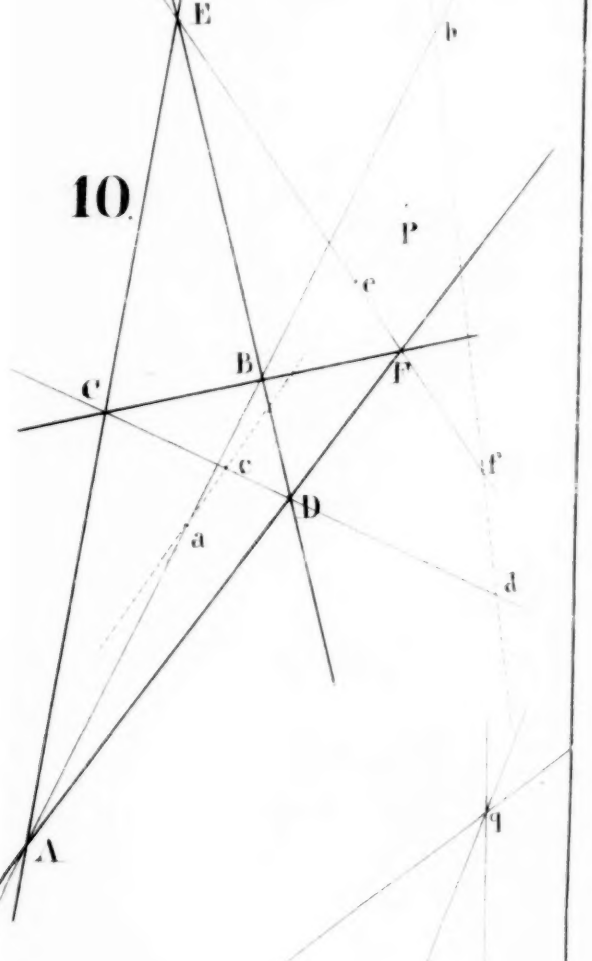
2.


c
D
b'
C
E
B
d
A
b
a'

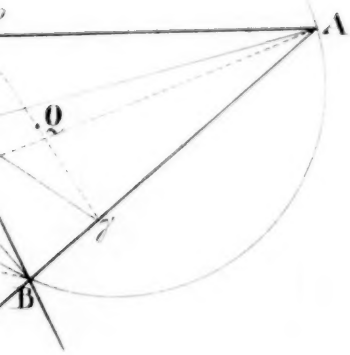
5.


C
E
H
D
I
G
A
F
B

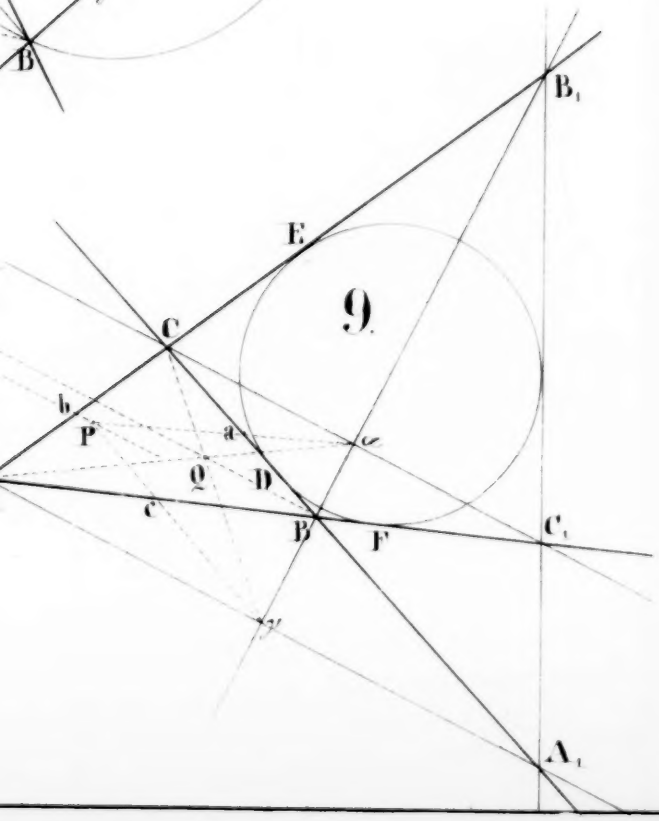
10.


E
b
P
c
B
F
C
c
f
D
a
d
A
q

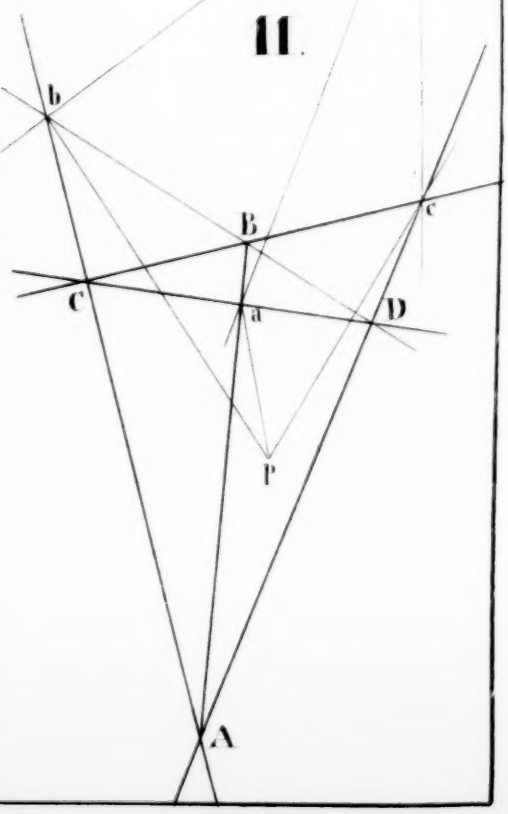
8.


A
Q
B

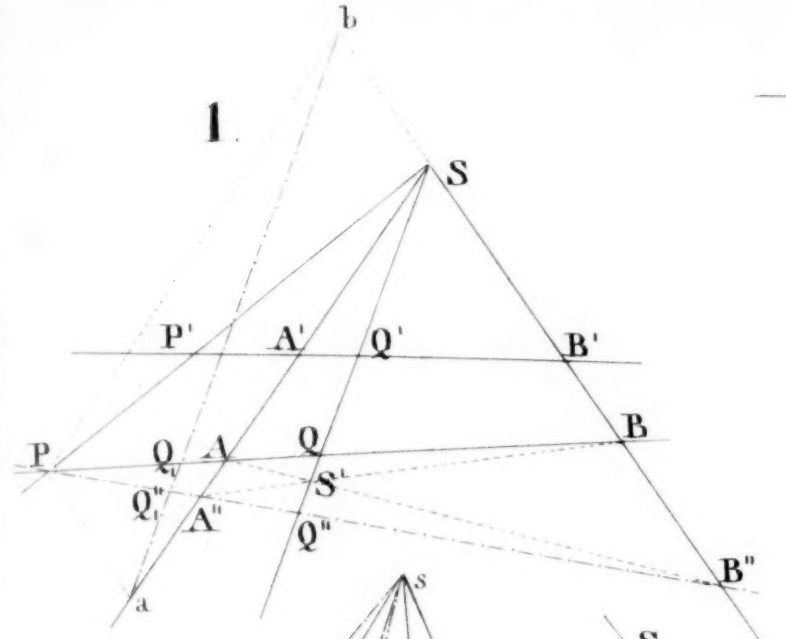
9.


B₁
E
C
b
P
a
c
Q
D
c
B
F
C₁
A₁

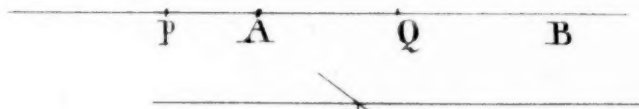
11.


b
B
c
C
a
D
P
A

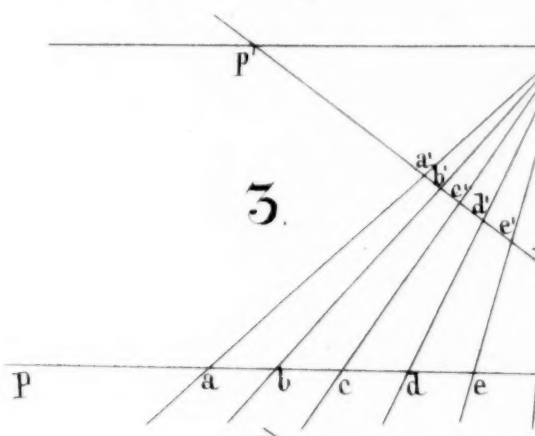
1.



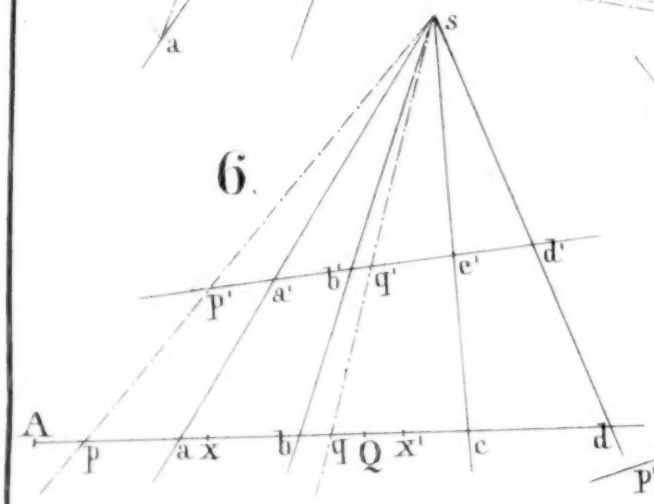
2.



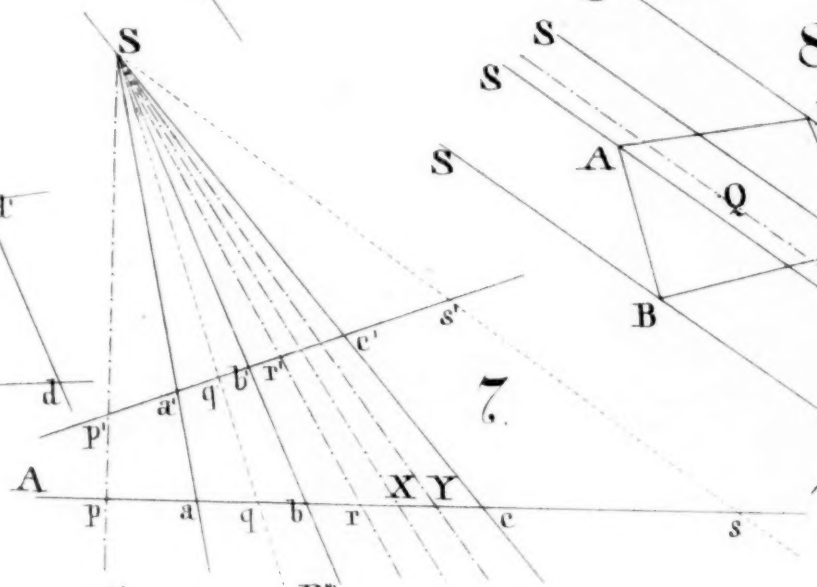
3.



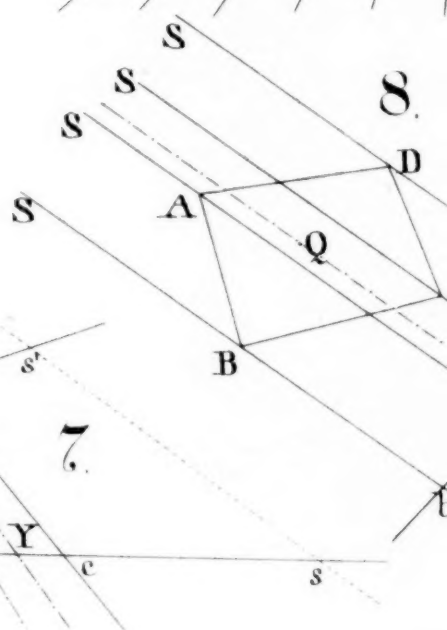
6.



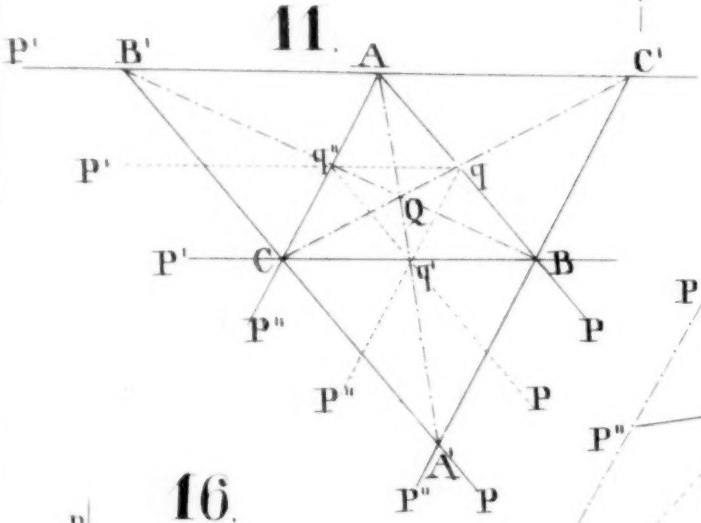
7.



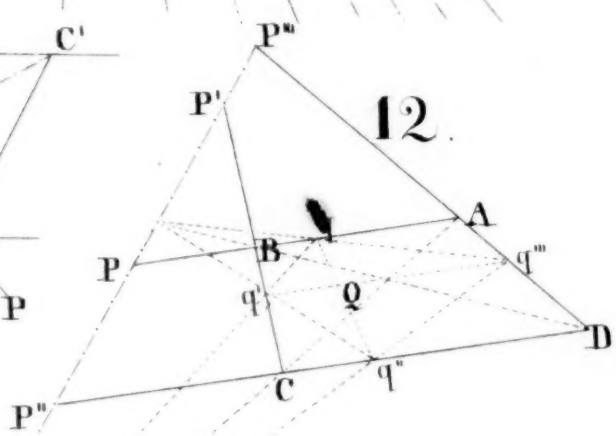
8.



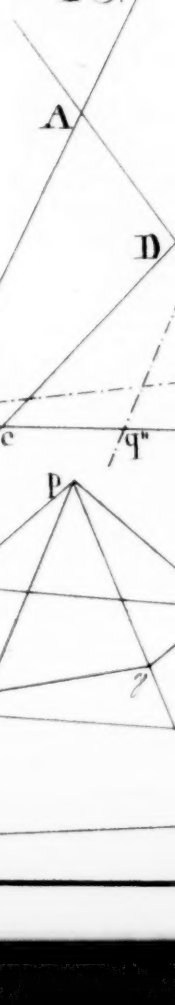
11.



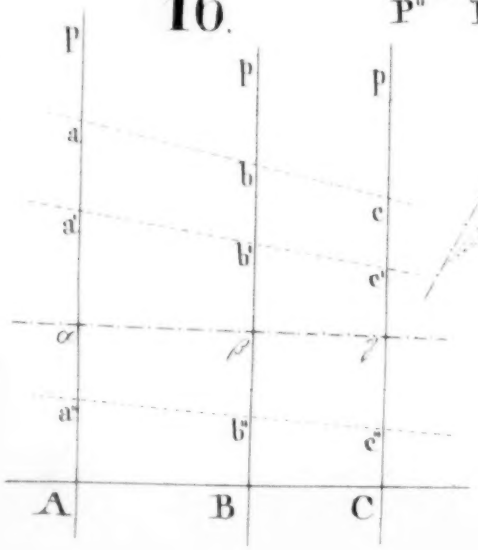
12.



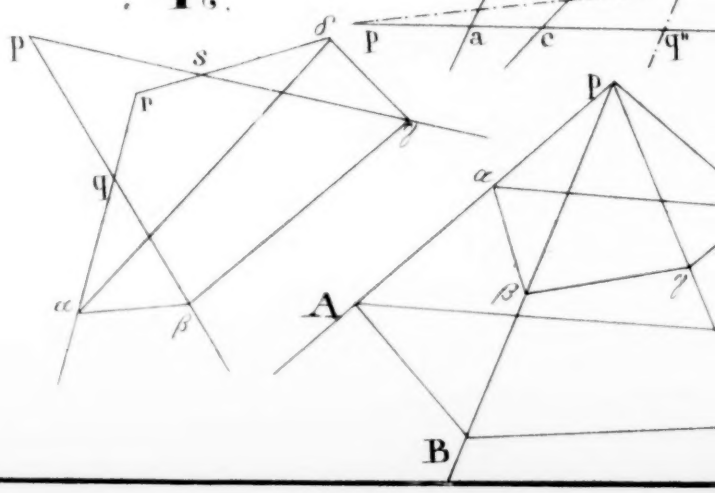
13.

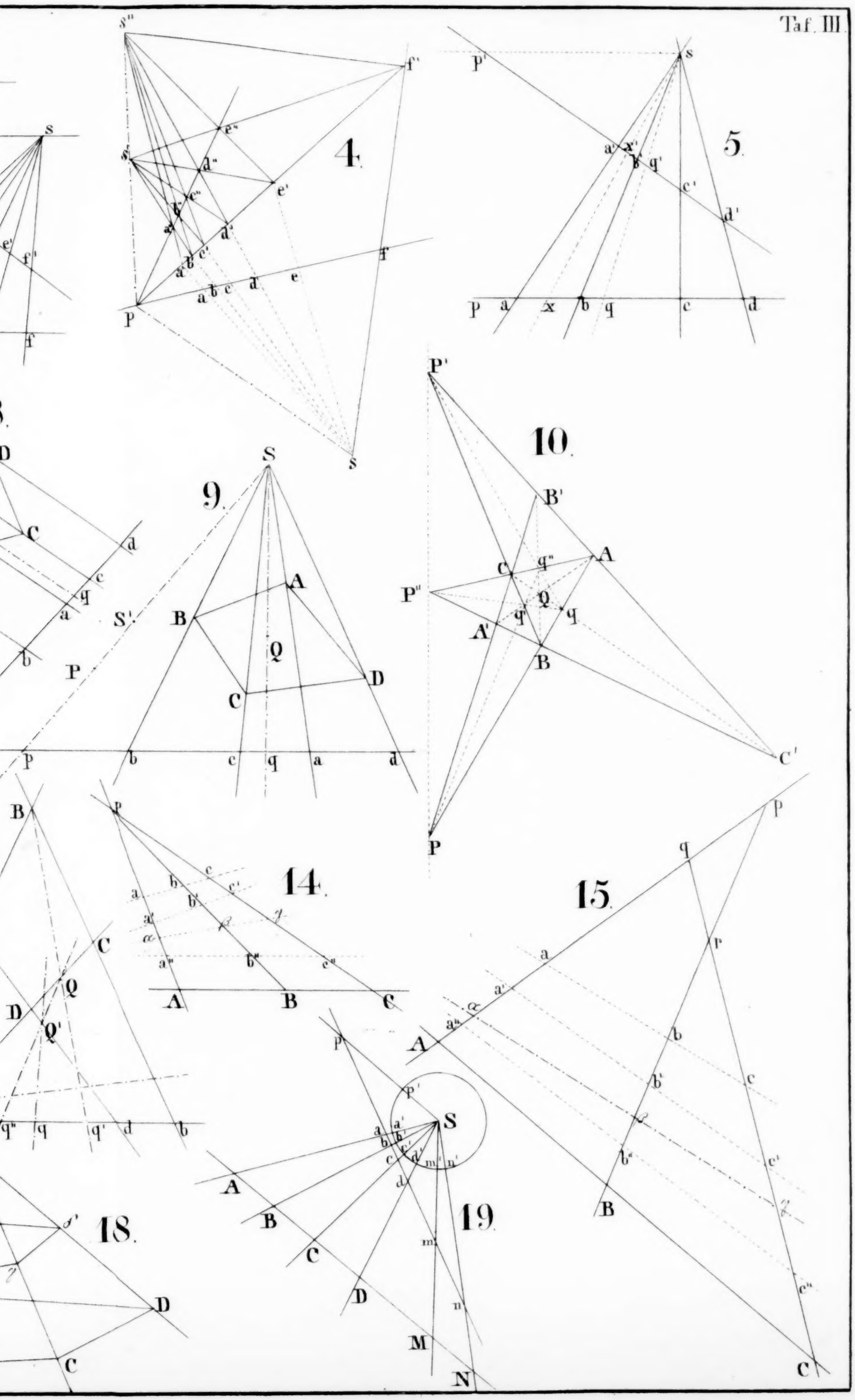


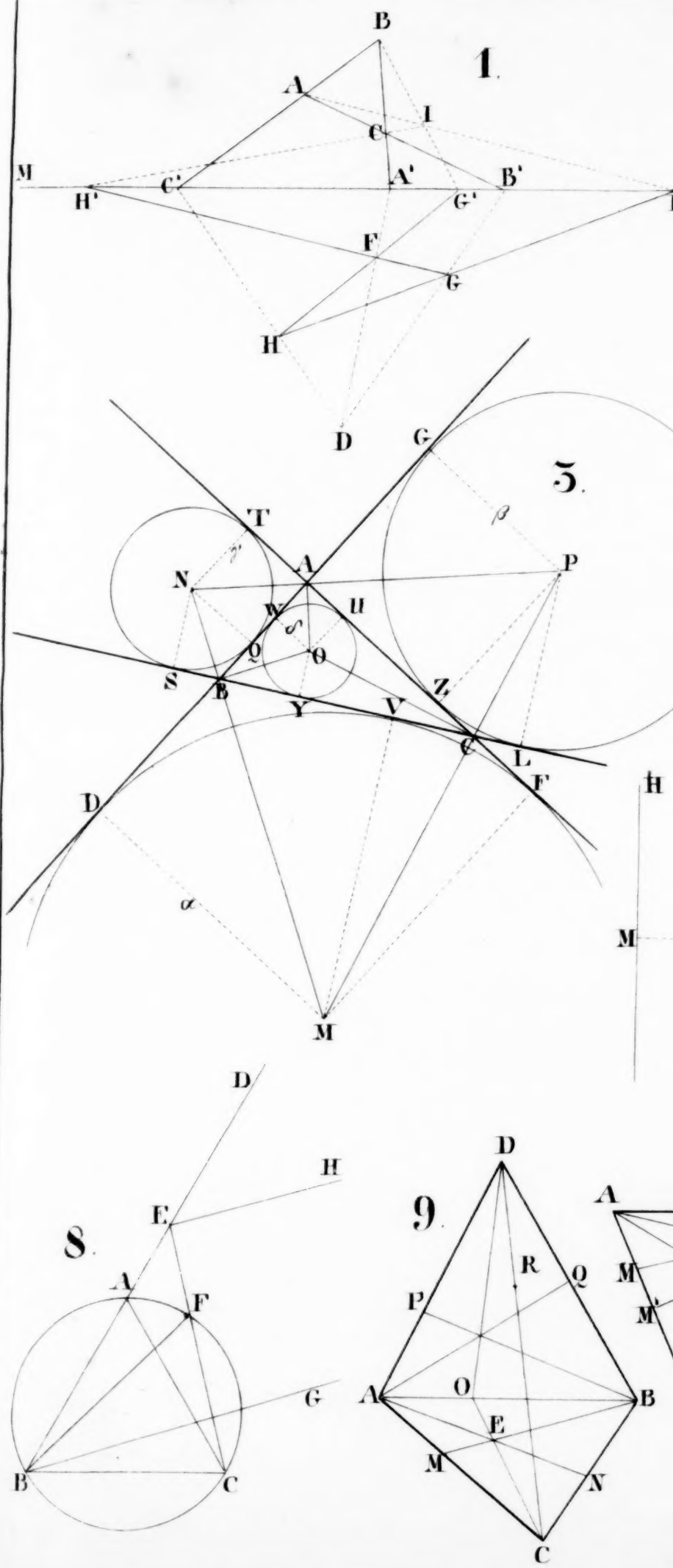
16.



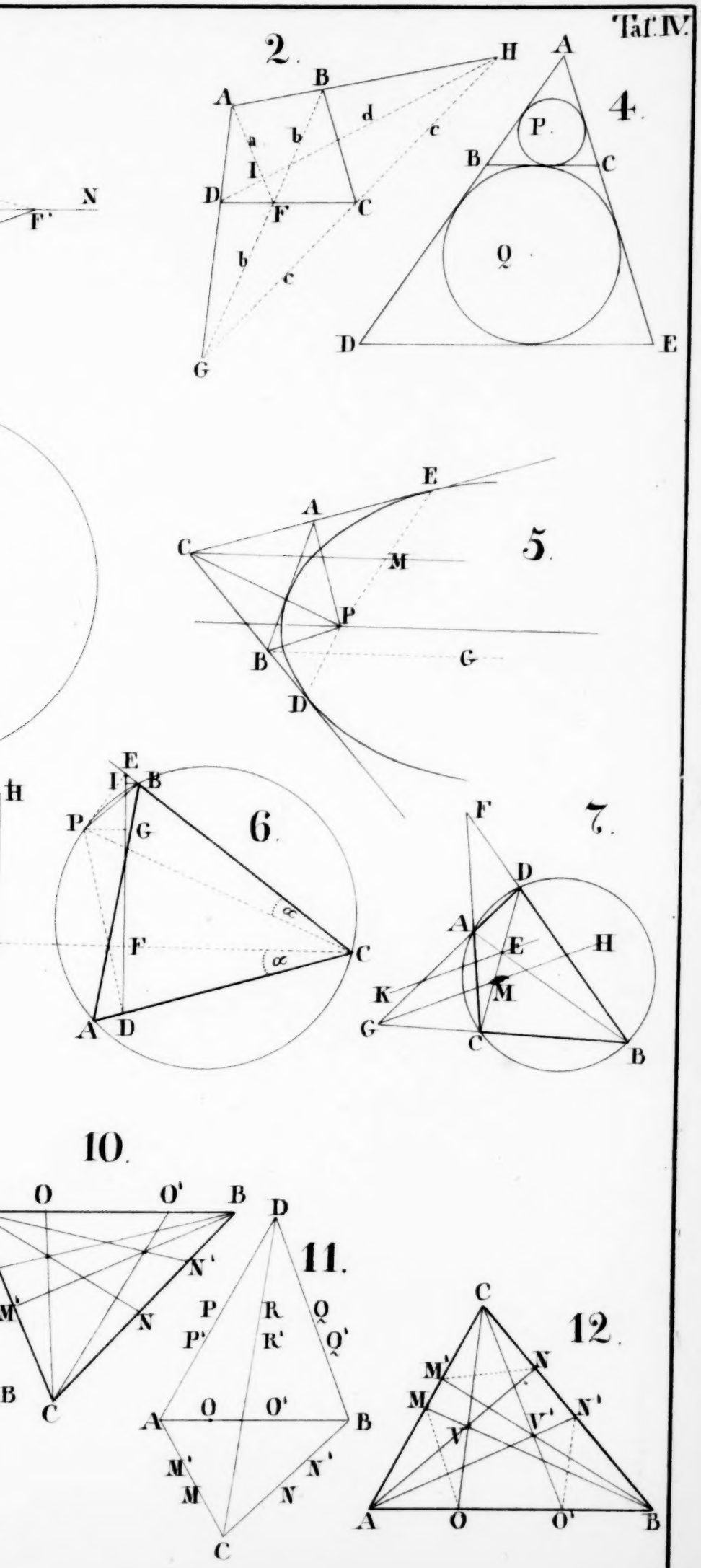
17.




Taf. III.
4.
5.
9.
10.
14.
15.
18.
19.


1.
B
A
I
C
M
H'
C'
A'
B'
G'
F
G
H
D
3.
G
T
β
N
A
P
W
U
δ
Q
O
S
B
Z
Y
V
C
L
F
D
α
M
H
M
8.
D
H
E
A
F
G
B
C
9.
D
R
Q
P
A
O
B
E
M
N
C
A
M
M'

Taf. IV.


2.
A
B
H
a
b
d
c
I
D
F
C
b
c
G
N
F'
4.
A
P
B
C
Q
D
E
5.
E
A
C
M
P
B
G
D
6.
E
I
B
P
G
α
F
α
C
A
D
7.
F
D
A
E
H
K
M
G
C
B
10.
O
O'
B
N'
M'
N
B
C
11.
D
P
R
Q
P'
R'
Q'
A
O
O'
B
M'
N'
M
N
C
12.
C
M'
N
M
N'
V
V'
A
O
O'
B